OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE REIMS
2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

ACADÉMIE
DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mardi 23 mars 2021

Candidats suivant la spécialité mathématiques

Seconde partie – de 16h10 à 18h10
Composition par équipe

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique 1

Juniper Green - Toutes sections

Juniper Green est un jeu mathématique créé par Richard Porteous, enseignant à l'école de Juniper Green, auquel le jeu doit son nom.

Première Partie : Version à un joueur

Soit N un entier naturel non nul. Les règles du jeu sont les suivantes :

- On choisit un nombre entier entre 1 et N.
- Une fois qu'un nombre a été choisi, il ne peut plus être joué.
- À partir du second nombre, on doit choisir un nombre entre 1 et N qui est un diviseur ou un multiple du précédent.
- On continue ainsi jusqu'à ne plus pouvoir jouer.

1. Le cas $N = 20$.

On suppose ici que $N = 20$. On joue ainsi avec la liste d'entiers suivante :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

En commençant avec le nombre 12, on peut par exemple faire la suite de coups :

$$12 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 18 \rightarrow 9 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 4 \rightarrow 20 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 14 \rightarrow 7$$

avec le tableau ci-dessous dans lequel les nombres choisis, lors de la partie, ont été rayés :

~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~

La partie s'arrête car il n'y a plus de diviseur ou de multiple de 7 non encore utilisé. Nous avons effectué au total 15 coups au cours de cette partie. Mais est-il possible de faire mieux ?

- **a.** Justifier que les nombres 11, 13, 17 et 19 ne peuvent apparaitre qu'au début ou à la fin d'une suite de coups.
- **b.** En déduire qu'on ne peut pas faire plus de 17 coups au jeu du Juniper Green avec $N = 20$.
- **c.** Proposer une suite de coups de longueur 17.

2. Retour au cas général

Revenons au cas général où N est un entier naturel non nul quelconque. On note a_N le nombre maximal de coups possibles à une partie de Juniper Green avec N nombres. On vient, par exemple, de démontrer que $a_{20} = 17$.

- **a.** Déterminer les valeurs de a_N, pour $N = 1, 2, \dots, 10$.
- **b.** Expliquer pourquoi les valeurs de a_N sont de plus en plus grandes.

Deuxième partie : Version à deux joueurs

Les règles du jeu sont à peu près les mêmes que pour la version à un joueur :

- Deux joueurs A et B choisissent à tour de rôle un nombre entier entre 1 et N. Le joueur A commence.
- Une fois qu'un nombre a été choisi, il ne peut plus être joué.
- À partir du second nombre, on doit choisir un nombre entre 1 et N qui est un diviseur ou un multiple du précédent.
- Le premier joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

Voici un exemple de partie dans le cas $N = 20$ où le joueur A perd car il ne peut plus jouer :

Joueur A	7		2		10		15		18		12		8		1		Perdu
Joueur B		14		20		5		3		6		4		16		11	

On cherche à savoir s'il existe une stratégie gagnante pour que l'un des joueurs remporte la partie à coup sûr.

1. **Supposons que $N = 20$.**
   a. Identifier une stratégie gagnante pour le joueur A s'il commence en choisissant le 11, le 13, le 17 ou le 19.
   Pour empêcher cette stratégie gagnante évidente du joueur A, on ajoute une règle du jeu supplémentaire :
   - Le joueur A doit commencer par choisir un nombre pair.

   b. Expliquer pourquoi le joueur A ne doit pas choisir le 14 pour commencer la partie.
2. **Supposons que $N = 8$.**
   Démontrer que, si le joueur A commence la partie en choisissant le 2, alors il peut gagner la partie à coup sûr.
3. **Supposons que $N = 6$.**
   Démontrer que, quel que soit le nombre pair choisi par le joueur A pour commencer la partie, il existe toujours une stratégie gagnante pour le joueur B.

Exercice académique 2

Déplacements sur une table de Pythagore

⋯										
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯

On considère une table de Pythagore dans laquelle une case repérée par $(a\ ;\ b)$ contient la valeur $a \times b$ avec a le nombre de décalages vers la droite et b le nombre de décalages vers le haut.

Première partie : Des exemples.

Dans cette partie, on s'intéresse à un cavalier qui se déplace sur cette table de Pythagore selon le protocole suivant :

- Il commence sur la case $(1; 1)$.
- Il se déplace, un certain nombre de fois, en effectuant, à chaque coup, un décalage de 2 cases vers la droite et de 1 case vers le haut.

Il passe donc de la case $(1; 1)$, à la case $(3; 2)$, à la case $(5; 3)$, ...

1. **a.** Déterminer les deux cases atteintes par le cavalier après la case $(5; 3)$.
   b. Expliquer pourquoi la case atteinte après 20 coups contient la valeur 21×41.
   c. Soit n le nombre de coups, donner une formule, dépendante de n, permettant de calculer la valeur contenue dans la case atteinte après ces n coups.
2. Un chameau se déplace de 4 cases vers la droite et de 2 cases vers le haut.
   Expliquer pourquoi toutes les cases atteintes par le chameau le sont également par le cavalier.

Deuxième partie : Dénombrement de déplacements.

Soit n un entier naturel non nul.

Dans cette partie, on s'intéresse au nombre de déplacements possibles permettant de passer de la case $(1; 1)$ aux cases contenant la valeur n, **en effectuant éventuellement plusieurs coups**.

On donne les notations suivantes :

- Un déplacement est représenté par un couple $\binom{h}{v}$ où h correspond au nombre de cases horizontales et v au nombre de cases verticales qui composent ce déplacement (par exemple, le déplacement d'un cavalier de la première partie sera noté $\binom{2}{1}$). h et/ou v peuvent être nuls.
- On note ND_n le nombre total des déplacements possibles permettant de passer de la case $(1; 1)$ à la case contenant l'entier n donné.

1. Justifier que tout entier n strictement positif figure sur (au moins) une case de la table de Pythagore.
2. **a.** Justifier qu'il n'existe qu'un seul déplacement $\binom{h}{v}$ permettant d'atteindre la case $(6; 4)$. Le préciser.
   b. Déterminer quels déplacements permettent d'atteindre la case (1;5) et les nombres de coups correspondants.
   c. Même question concernant la case (7 ;5).
3. Dans cette question, on va déterminer la valeur de ND_{14}.
   a. Déterminer toutes les cases $(a\ ; b)$ qui contiennent la valeur 14.
   b. Pour chacune des cases précédentes, préciser les déplacements qui permettent de les atteindre.
   c. En déduire que $ND_{14} = 6$.
4. Reproduire et compléter le script ci-dessous afin qu'il calcule, par balayage, le nombre de déplacements (en 1 ou plusieurs coups) qui permettent d'atteindre une case contenant la valeur n.

```
def dep_pythagore(n):
    cpt=0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            for k in range(n):
                if .................. :
                    ....................
    return ........
```

5. **Cas général**

Un déplacement $\binom{h}{v}$ est dit « irréductible » lorsqu'il ne peut pas être fractionné en plusieurs déplacements identiques. Par exemple, le déplacement $\binom{2}{1}$ est irréductible alors que $\binom{10}{4}$ ne l'est pas car peut être fractionné en deux coups avec le déplacement $\binom{5}{2}$.

a. Retrouver le fait que les cases atteintes par le chameau (défini dans la première partie) le sont également par le cavalier (défini dans la première partie).

b. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\binom{h}{v}$ soit irréductible.

c. Déterminer le nombre de possibilités de fractionner un déplacement $\binom{h}{v}$ non irréductible.

d. Pour une valeur de n donnée, en déduire une démarche permettant de déterminer la valeur de ND_n.

ACADÉMIE
DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mardi 23 mars 2021

Candidats ne suivant pas la spécialité mathématiques

Seconde partie – de 16h10 à 18h10
Composition par équipe

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique 1

<u>Juniper Green - Toutes sections</u>

Juniper Green est un jeu mathématique créé par Richard Porteous, enseignant à l'école de Juniper Green, auquel le jeu doit son nom.

Première Partie : Version à un joueur

Soit N un entier naturel non nul. Les règles du jeu sont les suivantes :

- On choisit un nombre entier entre 1 et N.
- Une fois qu'un nombre a été choisi, il ne peut plus être joué.
- À partir du second nombre, on doit choisir un nombre entre 1 et N qui est un diviseur ou un multiple du précédent.
- On continue ainsi jusqu'à ne plus pouvoir jouer.

1. Le cas $N = 20$.

On suppose ici que $N = 20$. On joue ainsi avec la liste d'entiers suivante :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

En commençant avec le nombre 12, on peut par exemple faire la suite de coups :

$$12 \to 6 \to 3 \to 18 \to 9 \to 1 \to 8 \to 16 \to 4 \to 20 \to 5 \to 10 \to 2 \to 14 \to 7$$

avec le tableau ci-dessous dans lequel les nombres choisis, lors de la partie, ont été rayés :

~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~

La partie s'arrête car il n'y a plus de diviseur ou de multiple de 7 non encore utilisé. Nous avons effectué au total 15 coups au cours de cette partie. Mais est-il possible de faire mieux ?

a. Justifier que les nombres 11, 13, 17 et 19 ne peuvent apparaitre qu'au début ou à la fin d'une suite de coups.

b. En déduire qu'on ne peut pas faire plus de 17 coups au jeu du Juniper Green avec $N = 20$.

c. Proposer une suite de coups de longueur 17.

2. Retour au cas général

Revenons au cas général où N est un entier naturel non nul quelconque. On note a_N le nombre maximal de coups possibles à une partie de Juniper Green avec N nombres. On vient, par exemple, de démontrer que $a_{20} = 17$.

a. Déterminer les valeurs de a_N, pour $N = 1, 2, \ldots, 10$.

b. Expliquer pourquoi les valeurs de a_N sont de plus en plus grandes.

Deuxième partie : Version à deux joueurs

Les règles du jeu sont à peu près les mêmes que pour la version à un joueur :

- Deux joueurs A et B choisissent à tour de rôle un nombre entier entre 1 et N. Le joueur A commence.
- Une fois qu'un nombre a été choisi, il ne peut plus être joué.
- À partir du second nombre, on doit choisir un nombre entre 1 et N qui est un diviseur ou un multiple du précédent.
- Le premier joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

Voici un exemple de partie dans le cas $N = 20$ où le joueur A perd car il ne peut plus jouer :

Joueur A	7		2		10		15		18		12		8		1		Perdu
Joueur B		14		20		5		3		6		4		16		11	

On cherche à savoir s'il existe une stratégie gagnante pour que l'un des joueurs remporte la partie à coup sûr.

1. **Supposons que $N = 20$.**
   a. Identifier une stratégie gagnante pour le joueur A s'il commence en choisissant le 11, le 13, le 17 ou le 19.

   Pour empêcher cette stratégie gagnante évidente du joueur A, on ajoute une règle du jeu supplémentaire :

   - Le joueur A doit commencer par choisir un nombre pair.

   b. Expliquer pourquoi le joueur A ne doit pas choisir le 14 pour commencer la partie.
2. **Supposons que $N = 8$.**
   Démontrer que, si le joueur A commence la partie en choisissant le 2, alors il peut gagner la partie à coup sûr.
3. **Supposons que $N = 6$.**
   Démontrer que, quel que soit le nombre pair choisi par le joueur A pour commencer la partie, il existe toujours une stratégie gagnante pour le joueur B.

Exercice académique 2

<u>Déplacements sur une table de Pythagore</u>

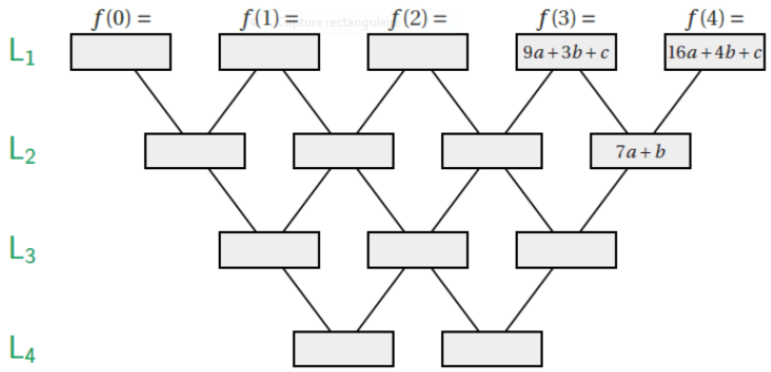
On considère une table de Pythagore dans laquelle une case repérée par $(a\ ;\ b)$ contient la valeur $a \times b$ avec a le nombre de décalages vers la droite et b le nombre de décalages vers le haut.
Un cavalier se déplace sur cette table de Pythagore selon le protocole suivant :

- Il commence sur la case $(1; 1)$.
- Il se déplace, un certain nombre de fois, en effectuant, à chaque coup, un décalage de 2 cases vers la droite et de 1 case vers le haut.

Il passe donc de la case $(1; 1)$, à la case $(3; 2)$, à la case $(5; 3)$, ...

⋯										
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	⋯

1. Déterminer les deux cases atteintes par le cavalier après la case $(5; 3)$.
2. Expliquer pourquoi la case atteinte après 20 coups contient la valeur 21×41.
3. **a.** Une case contenant la valeur 190 peut-elle être atteinte par le cavalier ?
   b. Même question pour une case contenant la valeur 264.
4. On considère une fonction polynomiale du second degré f, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c trois réels $(a \neq 0)$.
   a. Vérifier que $f(3) = 9a + 3b + c$ et $f(4) = 16a + 4b + c$.
   b. Exprimer, sur le même principe, $f(0), f(1)$ et $f(2)$, en fonction de a, b et c.
   c. Reproduire et compléter le diagramme ci-dessous (dit de « soustractions successives »), dans lequel chaque élément d'une ligne est obtenu en soustrayant le nombre de gauche à celui de droite dans la ligne précédente.
   Par exemple, le dernier élément de la ligne L_2 s'obtient ainsi :
   $$(16a + 4b + c) - (9a + 3b + c) = 16a + 4b + c - 9a - 3b - c = 7a + b$$



   d. Quelle remarque peut-on faire concernant la ligne L_4 ?

Dans la suite de l'exercice, on admet le résultat suivant :

> Dans un diagramme de « soustractions successives » dans lequel la ligne L_1 contient les images des premiers entiers naturels par une fonction f $(f(0), f(1), f(2), \ldots)$, si la ligne L_i ne contient que des 0, alors la fonction f peut être exprimée sous la forme d'une fonction polynomiale de degré $(i - 2)$.

Par exemple, si la ligne L_5 ne contient que des 0, alors la fonction f peut être exprimée sous la forme d'une fonction polynomiale de degré $5 - 2 = 3$ (donc définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, avec a, b, c et d des réels).

5. Dans cette question, on se propose de trouver une autre méthode permettant de déterminer la valeur de la case atteinte par le cavalier après 20 coups.
   Pour ce faire, on va tenter de trouver une fonction f telle que les valeurs de $f(i)$ correspondent aux valeurs contenues dans les cases atteintes par le cavalier après i coups.

On doit ainsi avoir $f(0) = 1, f(1) = 6, \ldots$

a. En utilisant la méthode des « soustractions successives », appliquée aux valeurs contenues dans les cases atteintes par le cavalier, déterminer une expression possible de la fonction f (la première ligne contiendra les valeurs de $f(0), f(1), f(2), f(3)$ et $f(4)$).

b. Retrouver alors la valeur contenue dans la case atteinte après 20 coups.

6. **a.** Exprimer, en fonction de n, la valeur contenue dans la case atteinte après n déplacements ?

   b. Le cavalier peut-il atteindre une case contenant la valeur 2021 ? On pourra s'aider de la calculatrice.

7. On suppose que le cavalier peut partir depuis n'importe quelle case de la première colonne de la table de Pythagore. On donne $2021 = 43 \times 47$.

   Quelle pourrait être sa case de départ pour atteindre la valeur 2021 ?