www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

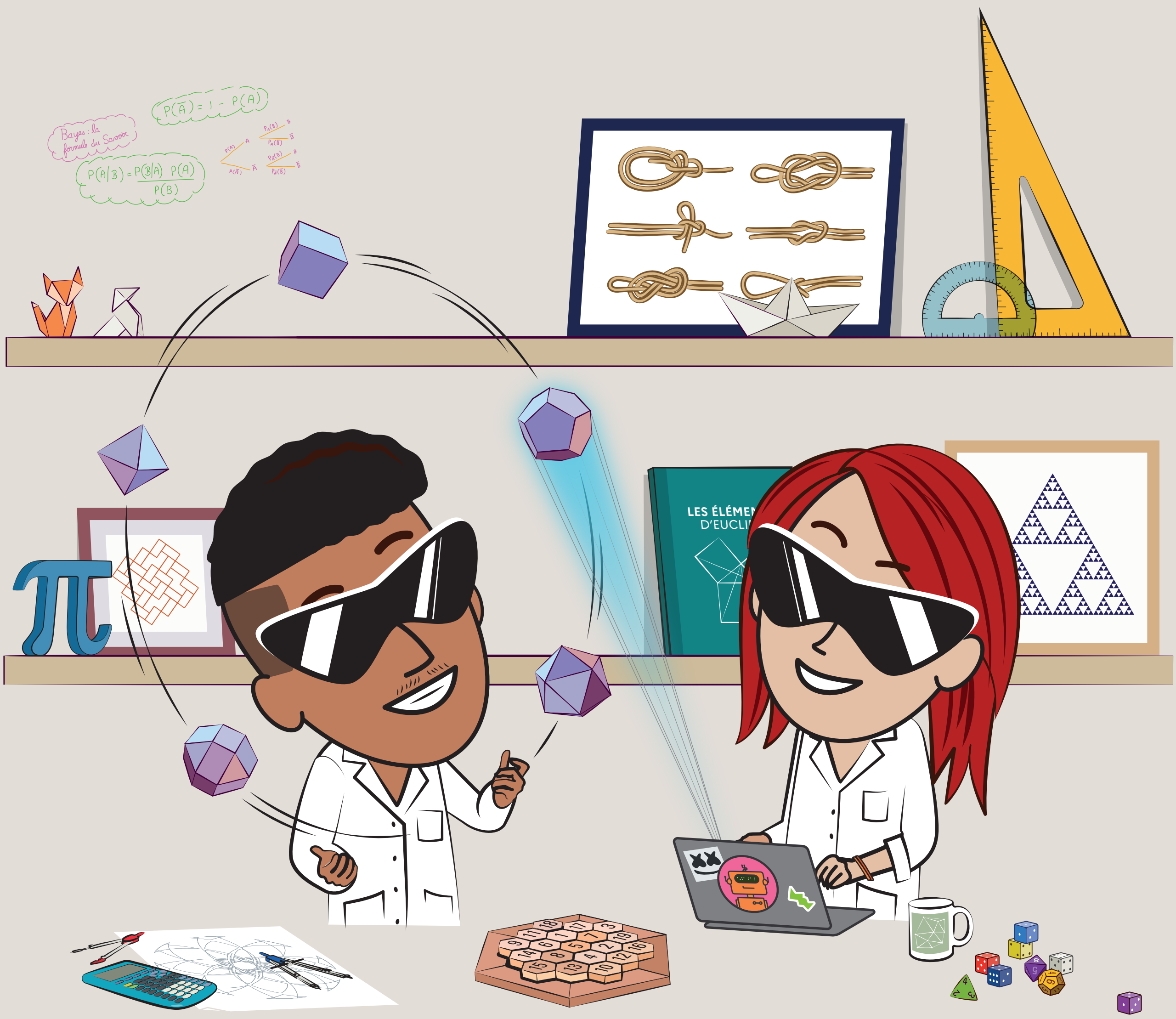
ACADÉMIE DE REIMS 2023

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

OLYMPIADES 2023
Partie académique
Exercice 2 (à traiter par tous les candidats)

Carrés magiques - Correction

A. Carrés magiques

1. Le carré est magique car les dix sommes valent toutes 34 et est normal car il y figure tous les entiers de 1 à 4^2.

2. Un carré d'ordre n constitué du même entier a dans chaque case est magique car toutes les sommes coïncident et valent $n \times a$ mais n'est évidemment pas normal.

3. Dans un carré magique et normal d'ordre n, on note S_n la somme des nombres le constituant.
   a) $S_3 = 1 + 2 + \cdots + 3^2 = 1 + 2 + \cdots + 9 = \frac{9(9+1)}{2} = 45$
   b) $S_n = 1 + 2 + \cdots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$

4. Reprenons le carré de *Luo Shu*.
   a) Si on échange deux nombres dans ce tableau, le carré n'est plus magique.
   En effet, notons *a* et *b* les deux valeurs échangées. Ces deux valeurs ne peuvent pas être présentes à la fois sur la même colonne et la même ligne. Notons *CL* une ligne ou colonne où apparaît initialement le nombre échangé *a* et où *b* n'y apparaissait pas.
   La somme des valeurs constituant initialement *CL* est 15. Suite à la permutation de *a* et de *b*, la somme vaut désormais 15+*b*-*a*≠15. Or, un carré magique d'ordre 3 voit ses 3 lignes et 3 colonnes ayant une somme de valeurs égale à 15 (=S_3 /3=45/3).

   b) En échangeant les nombres du tableau, S_3 est évidemment inchangée par commutativité de la somme.

B. Une méthode de construction de carrés magiques

1. a) Le 1 se retrouve placé dans la case vide en dessous du 5.
Le 9 se retrouve placé dans la case vide au-dessus du 5.

b) Une fois placé les valeurs 1 et 9, il suffit de placer le nombre 3 par l'enroulement de la figure obtenue en faisant coïncider les deux bords verticaux accentués : le nombre 3 se place ainsi à gauche du nombre 5 et le nombre 7 à droite.

		1		
	4	9	2	
7	3	5	7	3
	8	1	6	
		9		

2. On commence par remplir une diagonale sur deux par les nombres entiers successifs compris entre 1 et 25 (25 car 5^2 cases).
On obtient ainsi la figure suivante :

				1				
			6		2			
		11		7		3		
	16		12		8		4	
21		17		13		9		5
	22		18		14		10	
		23		19		15		
			24		20			
				25				

Il suffit ensuite d'enrouler les parties extérieures au carré en faisant se superposer les traits doublés horizontaux délimitant le carré central d'ordre 5, puis en faisant de même avec les traits doublés verticaux. On aboutit alors au carré suivant :

				1				
			6		2			
		11	24	7	20	3		
	16	4	12	25	8	16	4	
21		17	5	13	21	9		5
	22	10	18	1	14	22	10	
		23	6	19	2	15		
			24		20			
				25				

Il suffit ensuite de vérifier que le carré central est bien un carré magique en calculant la somme de chaque ligne et de chaque colonne puis de chaque diagonale :

- 11+24+7+20+3=65
- 4+12+25+8+16=65
- 17+5+13+21+9=65
- 10+18+1+14+22=65
- 23+6+19+2+15=65
- 11+4+17+10+23=65
- 24+12+5+18+6=65
- 7+25+13+1+19=65
- 20+8+21+14+2=65
- 3+16+9+22+15=65
- 11+12+13+14+15=65
- 23+18+13+8+3=65

Il existe au moins un carré magique d'ordre 5 :

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

C. Carrés magiques d'ordre 3 - Cas général

1. $M = a + b + c = d + e + f = g + h + i = a + d + g = b + e + h = c + f + i = a + e + i = c + e + g$

2. En considérant les quatre sommes où e apparaît, on a :
$4M = (d + e + f) + (b + e + h) + (a + e + i) + (c + e + g)$
puis, en réordonnant, $4M = (a + b + c) + (g + h + i) + (d + e + f) + 3e = 3M + 3e$
On a donc bien $4M = 3M + 3e$, puis $e = \frac{M}{3}$.

3. On pose $x = e - a$ et $y = e - c$.
On a donc $a = e - x$ et $c = e - y$. De plus,

- $a + b + c = M = 3e$ et donc $b = 3e - a - c = 3e - (e - x) - (e - y) = e + x + y$.
- $b + e + h = M = 3e$ et donc $h = 3e - b - e = 3e - (e + x + y) - e = e - x - y$.
- $c + e + g = M = 3e$ et donc $g = 3e - c - e = 3e - (e - y) - e = e + y$.
- $a + e + i = M = 3e$ et donc $i = 3e - a - e = 3e - (e - x) - e = e + x$.
- $a + d + g = M = 3e$ et donc $d = 3e - a - g = 3e - (e - x) - (e + y) = e + x - y$.
- $d + e + f = M = 3e$ et donc $f = 3e - d - e = 3e - (e + x - y) - e = e - x + y$.

4. On sait qu'alors $S_3 = 45$. Or, en ajoutant les coefficients du tableau précédent, on aussi $S_3 = 9e$.
Ainsi, $9e = 45$ et donc $e = 5$.

5. Il faut étudier différents cas :

- Si on place « 1 » en haut à gauche, la somme de la diagonale étant 15, le nombre en bas à droite est « 9 ». La somme des deux cases à situer à droite de « 1 » doit être 14, c'est donc nécessairement « 8 » et « 6 ». Or ces deux valeurs soulèvent une contradiction car $9 + 8 = 17$ et $9 + 6 = 15$...

1		
	5	
		9

- Par rotation, « 1 » ne peut être positionné dans aucun coin.
- « 1 » est donc positionné au milieu d'une ligne/colonne, il y a quatre possibilités. Travaillons avec le cas où « 1 » est situé au milieu de la ligne du haut, ce qui impose « 9 » au milieu de la ligne du bas et les cases adjacentes à « 1 » sont « 8 » et « 6 ». Une fois ces deux valeurs placées, les autres s'en déduisent, ce qui nous donne deux carrés magiques différents : un avec le « 8 » à droite du « 1 » et un avec le « 8 » à gauche.

	1	
	5	
	9	

8	1	6
	5	
	9	

Voici le raisonnement où on déduit la position forcée des quatre nombres entiers restant à placer 2, 3, 4 et 7 dans le cas où le « 8 » est à droite du « 1 » :

La diagonale avec le « 8 » et le « 5 » implique que la valeur manquante est « 2 » puisque la somme totale vaut 15 ; l'autre diagonale, avec le « 6 », a pour valeur manquante le « 4 ». On peut vérifier que la ligne complétée est bien de somme 15.

8	1	6
	5	
4	9	2

Pour finir de compléter le carré, il suffit de travailler par colonne, la somme totale valant 15 et de vérifier que les sommes conviennent.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

- Le nombre « 1 » pouvant être situé à quatre endroits, ça donne un total de huit carrés magiques normaux d'ordre 3, ces 8 carrés magiques se déduisant les uns des autres par une symétrie du carré de *Luo Shu* :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Voici les 8 :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	2	7
1	9	5
8	4	3

4	3	8
9	5	1
2	7	6

8	4	3
1	9	5
6	2	7

Exercice 1 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Au pays des heureux – Eléments de correction

1. On considère, dans cette question uniquement, la composition ci-contre.

Valeur en *heureux*	1	2	3	4	5
Nombre de pièces disponibles	1	1	1	1	1

a) Le Max de cette composition est :
$1\times 1 + 1\times 2 + 1\times 3 + 1\times 4 + 1\times 5 = 15$.

b) Jusqu'à 5 c'est évident. Ensuite,
$6 = 1 + 5$; $7 = 2 + 5$; $8 = 3 + 5$; $9 = 4 + 5$; $10 = 5 + 4 + 1$
$11 = 5 + 4 + 2$; $12 = 5 + 4 + 3$; $13 = 5 + 4 + 3 + 1$; $14 = 5 + 4 + 3 + 2$ et enfin $15 = 5 + 4 + 3 + 2 + 1$. La composition est bien complète.

2. On considère, dans cette question uniquement, la composition ci-contre.

Valeur en *heureux*	1	3	5	7	9
Nombre de pièces disponibles	1	1	1	2	2

a) Le Max de cette composition est :
$1\times 1 + 1\times 3 + 1\times 5 + 2\times 7 + 2\times 9 = 41$.

b) Cette composition n'est pas complète car on ne peut pas atteindre 2 (par exemple).

3. Cette composition est clairement désirée.

Valeur en *heureux*	1	2	3
Nombre de pièces disponibles	1	2	3

Le Max de cette composition est $1 + 2\times 2 + 3\times 3 = 14$.
On peut atteindre 1, 2, 3, $4(=3+1)$, $5(=3+2)$, $6\ (=3+2+1)$, $7(=2+2+3)$, $8(=2+3+3)$, $9(=3+3+3)$, $10(=1+3+3+3)$, $11(=2+3+3+3)$, $12(=1+2+3+3+3)$, $13(=2+2+3+3+3)$ et $14(=1+2+2+3+3+3)$. Elle est donc complète.

4. a) Le Max de cette composition est $1+2\times 2=5$ et on peut atteindre 1, 2, 3, 4 et 5. La composition est complète.

b) D'après la question précédente, tous les nombres de 1 à 5 peuvent être atteints. En ajoutant 5, tous les nombres de 6 à 10 peuvent être atteints. En ajoutant encore 5, tous les nombre de 11 à 15 peuvent être atteints. En ajoutant encore 5, tous les nombre de 16 à 20 peuvent être atteints. Or 20 est le Max de la composition qui est alors complète.

c) En itérant le procédé à partir de la composition précédente, avec les 10 en plus, on peut atteindre tous les nombres de 21 à 60, puis en rajoutant les 50, tous les nombres de 61 à 310. La composition de départ est donc complète.

5. Dans cette question, on souhaite construire des **compositions parfaites**, c'est-à-dire des compositions **désirées**, **complètes**, les **moins lourdes possibles.**

a) On a besoin d'une pièce de 1 et de deux pièces de 2 pour atteindre 1, 2, 3, 4 et 5. L'entier suivant étant 6, la valeur en heureux suivante ne peut pas être strictement supérieur à 7 sinon, 6 ne sera pas atteint. On sait déjà que la composition de la question 4.b) est désirée et complète. Reste à vérifier si la composition proposée dans cette question l'est aussi (ce qui est bien le cas…). Ell est alors plus légère et devient la composition parfaite à 3 valeurs.

b) Avec le même raisonnement, on trouve que la composition parfaite à 4 valeurs est

Valeur en *heureux*	1	2	6	24
Nombre de pièces disponibles	1	2	3	4

c) La composition à p valeurs étant parfaite, il n'est pas nécessaire d'ajouter une valeur inférieure à Max. La plus grande valeur possible ensuite pour que la composition soit parfaite est donc Max+1.

Exercice 1 (à traiter par les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Exercice 1 non spé - Un arbre pythagoricien - Correction

1. Voir annexe.

2. M Pitt Hagor récolte 2 fruits la première année, 4 la deuxième année et 8 la troisième année.

3. Pour $n \geq 1$, on note $N(n)$ le nombre de nouvelles branches apparues sur l'arbre l'année n.
On a $N(1) = 2$ et $N(2) = 4$.

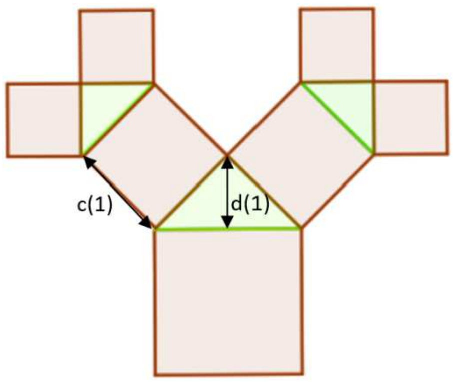
a) $N(3) = 8, N(4) = 16$ et $N(5) = 32$.
b) $N(n+1) = 2N(n)$.
c) $N(n) = 2^n$

4. a) Développer $(a-1)(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n)$, puis utilisez un télescopage.
b) Il suffit de remplacer a par 2 dans l'expression ci-dessus.
c) En notant $S(n)$ le nombre total de fruits l'année n,

$$S(n) = N(1) + N(2) + \cdots N(n) = 2 + 2^2 + \cdots 2^n = 2^{n+1} - 2$$

5. a) $N(10) = 2^{10}$ et $S(10) = 2^{11} - 2$
donc la masse de la récolte la 10ème année est $(2^{11} - 2) \times 5 = 10\,230\ g = 10{,}23\ kg$.
b) On veut $(2^{n+1} - 2) \times 5 > 10^6$. A la calculatrice, on trouve $n = 18$.

Hauteur de l'arbre : Pour $n \geq 1$, On notera $c(n)$ la longueur du côté d'une des branches nouvellement apparues en mètres au printemps 2020+n ($n^{\text{ème}}$ année) et on notera $d(n)$ la hauteur du bourgeon d'une des branches nouvellement apparues en mètres au printemps 2020+n ($n^{\text{ème}}$ année).



6. a) Avec le théorème de Pythagore, on trouve $c(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ mètres.
b) De manière immédiate (voir schéma), la hauteur de l'arbre en 2021 est $1 + 2d(1)$.
Avec le théorème de Pythagore, on trouve $d(1) = \frac{1}{2}$ mètres.
La hauteur de l'arbre la première année est donc $1 + 2d(1) = 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2$ mètres.

7. a) $1 + 2d(1) + c(2)$ de manière immédiate (voir schéma).
b) Avec le théorème de Pythagore, on trouve $c(2) = \frac{1}{2}$
La hauteur de l'arbre en 2022 est $1 + 2d(1) + c(2) = 2 + \frac{1}{2} = 2{,}5$ mètres.

8. En 2023, la hauteur de l'arbre est $1 + 2d(1) + c(2) + 2d(2) = 2{,}5 + 2 \times \frac{1}{4} = 3$ mètres.
En 2024, la hauteur de l'arbre est $1 + 2d(1) + c(2) + 2d(2) + c(3) = 3 + \frac{\sqrt{2}}{4}$ mètres.

ANNEXE – Arbre pythagoricien

à rendre avec la copie