OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE REIMS 2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

Exercice académique 1 (toutes séries) : Dirichlet

Problème n°1 : Des nombres dans l'intervalle $[0 ; 1]$

1. Les trois « chaussettes » a, b et c sont rangées dans deux « tiroirs » $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ et $\left]\frac{1}{2} ; 1\right]$ donc, d'après le principe de Dirichlet, deux de ces nombres sont dans un ces intervalles.
   Les intervalles étant de longueur $\frac{1}{2}$, la distance entre ces deux réels est inférieure à $\frac{1}{2}$.
2. On place cinq réels « chaussettes » dans l'intervalle $[0 ; 1]$.
   Découpons l'intervalle [0 ; 1] en les quatre intervalles consécutifs suivants (« tiroirs ») :
   $$\left[0 ; \frac{1}{4}\right] ; \left]\frac{1}{4} ; \frac{2}{4}\right] ; \left]\frac{2}{4} ; \frac{3}{4}\right] \text{ et } \left]\frac{3}{4} ; 1\right]$$
   Puisqu'il y a plus de réels que d'intervalles, d'après le principe de Dirichlet, il y a nécessairement un intervalle qui contient deux réels. Tous ces intervalles sont de longueur $\frac{1}{4}$ donc la distance entre ces deux réels est inférieure à $\frac{1}{4}$.
3. Soit n un entier naturel non nul, deux réels parmi $n + 1$ réels de l'intervalle $[0 ;\ 1]$ ont nécessairement une distance inférieure à $\frac{1}{n}$.

Problème n°2 : Avec la division euclidienne par 13.

1. Dans la division euclidienne par 13, les restes sont les entiers de 0 à 12. Il y en a 13.
2.
   a.

Entier	120	108	85	112	92	49	39	53	70	123	85	132	76	21
Reste dans la division euclidienne par 13	3	4	7	8	1	10	0	4	5	6	7	2	11	8

   b. $112 - 21 = 91 = 13 \times 7$ qui est un multiple de 13.

3. On revient au cas général : on choisit arbitrairement 14 entiers naturels.
   a. Les 14 nombres (« chaussettes ») sont rangés selon leur reste par 13 (« tiroirs »). Le principe de Dirichlet permet d'affirmer qu'un des tiroirs "reste" contient au moins deux entiers car il n'y a que treize restes possibles.
   Il y a bien au moins deux entiers parmi les 14 qui ont le même reste.
   b. Ces deux entiers s'écrivent alors sous la forme $13q + r$ et $13q' + r$ avec r, q et q' des entiers.
   Leur différence est $13q + r - (13q' + r) = 13q - 13q' = 13(q - q')$ qui est bien multiple de 13 car $q - q'$ est un entier.

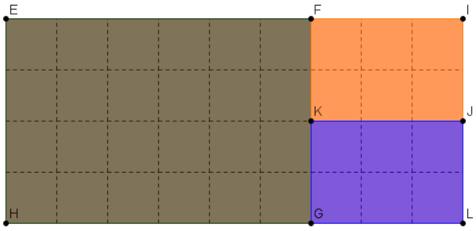
   Parmi 14 nombres entiers naturels choisis arbitrairement, on peut donc toujours en trouver deux tels que leur différence soit multiple de 13.

Problème n°3 : Des bêtes à mauvais caractère.

Divisons l'enclos en 9 rectangles de dimensions 5 et 6 mètres. Les dix bêtes (« chaussettes ») sont réparties dans neuf rectangles (« tiroirs ») donc, d'après le principe de Dirichlet, il y a un rectangle qui contient nécessairement deux bêtes.
La distance maximale entre ces deux bêtes est alors donnée par la longueur de la diagonale du rectangle soit, d'après le théorème de Pythagore, $\sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} < \sqrt{64} = 8$.
Ces deux bêtes ne peuvent alors pas cohabiter. Il est impossible de placer ces dix bêtes dans l'enclos.

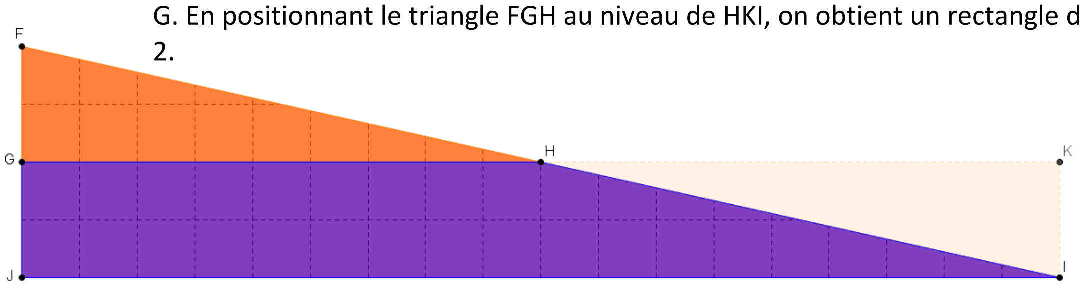
Exercice académique 2 (spé maths) : Quadrature

Partie A : Quelques cas particuliers



1. Le rectangle de longueur 9 et de largeur 4 peut être découpé ainsi :
Il suffit ensuite de placer les deux rectangles FIJK et KJLG côte à côte au-dessus ou en dessous de celui EFGH pour obtenir un carré de côté 6.

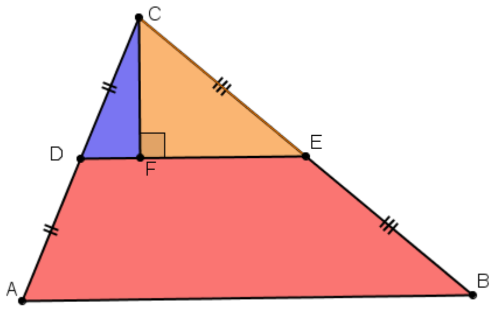
2.
 a. Le triangle rectangle de longueur de base 18 et de hauteur 4 peut être découpé en les deux pièces FGH et GHIJ où G est le milieu de [FJ] et H est le point d'intersection entre [FI] et la parallèle à (IJ) passant par G. En positionnant le triangle FGH au niveau de HKI, on obtient un rectangle de longueur 18 et de largeur 2.



 b. Le rectangle obtenu, de longueur 18 et de hauteur 2, peut être découpé en trois rectangles identiques de dimensions 6 par 2. En superposant ces trois rectangles, on obtient un carré de côté 6.

3. Il est impossible de découper le rectangle de longueur 6 et de largeur 4 afin de former, sans chevauchement ni vide, un carré de côté 5 puisque l'aire du rectangle vaut 24 tandis que celle du carré est de 25. En effet, le découpage et la recombinaison, sans chevauchement ni vide, conserve l'aire.

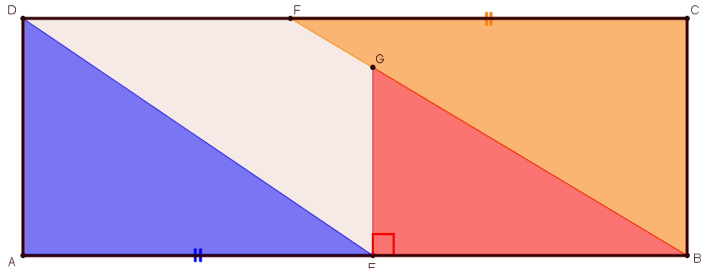
Partie B : Cas généraux



1.
 a. D'après le théorème des milieux, la droite (DE) joignant les milieux des segments [AC] et [BC] est parallèle au troisième côté [AB].
 b. Notons A' le symétrique du point F par la symétrie centrale de centre D.
 Les points A', D et F sont nécessairement alignés si bien que (A'E) est parallèle à (AB).
 De même, en notant B' le symétrique du point F par la symétrie centrale de centre E, on montre que (A'B') est parallèle à (AB).
 Comme A est le symétrique de C par rapport à D et que A' est celui de F, par conservation des angles géométriques par symétrie centrale, $\widehat{AA'D} = \widehat{CFD} = 90°$.
 De même, $\widehat{BB'E} = \widehat{CFE} = 90°$.
 Dès lors, les droites (AA') et (BB') sont parallèles puisqu'elles sont perpendiculaires à la même droite (A'B').
 Comme les côtés opposés de ABB'A' sont parallèles deux à deux, ABB'A' est un parallélogramme.
 Comme de plus, $\widehat{AA'B} = 90°$, ABB'A' est un rectangle.
 Ainsi, en positionnant, par rotation de 180°, le triangle CDF en ADA' et le triangle CEF en BEB', les triangles DCF, CEF et le trapèze ABED peuvent être combinés, sans chevauchement ni vide, pour former un rectangle.
 c. Comme un triangle a au moins deux angles aigus, il suffit d'appliquer la démarche des deux questions précédentes à deux angles aigus de ce triangle (il suffit en fait de renommer les sommets).

2. Il suffit de découper le rectangle de longueur a et de largeur b en deux rectangles identiques de longueur $\frac{a}{2}$ et de largeur b.
En positionnant ces deux rectangles identiques l'un au dessus de l'autre, on obtient un rectangle de longueur $a' = \frac{a}{2}$ et de largeur $b' = 2b$. Ainsi, $\frac{a'}{b'} = \frac{1}{4} \times \frac{a}{b}$.

3.



a. Comme $b \leq a$, par produit par $a > 0$, on a :
$ab \leq a^2$.
Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit que
$\sqrt{ab}$Erreur ! Signet non défini.$\leq a$, c'est-à-dire : $AE \leq AB$. Comme $AE \leq AB$ le point E de [AB) est bien un point du segment [AB].

b. Il suffit de prouver que $DF \leq AE$.
Or, $DF = DC - FC = a - \sqrt{ab}$.

Ainsi,
$DF \leq AE \iff$
$a - \sqrt{ab}$Erreur ! Signet non défini.$<$
$\sqrt{ab}$Erreur ! Signet non défini.
$\iff a < 2$Erreur ! Signet non défini. $\sqrt{ab} \iff a^2 < 4ab \iff a < 4b$.

Comme la dernière égalité est vraie par hypothèse, on a bien $DF \leq AE$ donc la perpendiculaire à (AB) passant par E coupe bien le segment [FB].

c. Dans le repère $\left(A\,; \frac{1}{a}\right.$Erreur ! Signet non défini.$\overrightarrow{AB}, \frac{1}{b}$ Erreur ! Signet non défini.$\left.\overrightarrow{AD}\right)$, on a :
$A(0;0), B(a;0)$Erreur ! Signet non défini.$, C(a;b)$Erreur ! Signet non défini.$, D(0;b)$Erreur ! Signet non déf
$\sqrt{ab}\,; b)$.

d. Notons H le point de coordonnées $(\sqrt{ab}\,;\ \sqrt{ab} - b)$ dans ce repère.
Comme E et H ont la même abscisse $\sqrt{ab}$, (HE) est perpendiculaire à (AB).

De plus, $\overrightarrow{BF}(-\sqrt{ab}\,; b)$ et $\overrightarrow{BH}(\sqrt{ab} - a\,;\ \sqrt{ab} - b)$.

$xy' - x'y = -\sqrt{ab} \times \left(\sqrt{ab} - b\right) - (\sqrt{ab} - a) \times b = -ab + b\sqrt{ab} - b\sqrt{ab} + ab = 0.$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires, si bien que les points H, B et F sont alignés.

Ainsi, le point H appartient à la droite (BF) et à la perpendiculaire à (AB) passant par E : c'est donc le point d'intersection de ces deux droites, c'est-à-dire le point G.

Ainsi, G a pour coordonnées dans ce repère $(\sqrt{ab}\,;\ \sqrt{ab} - b)$.

e. Comme G et E ont la même abscisse, $GE = \sqrt{ab} - b$.

f. Considérons la translation de vecteur $\overrightarrow{ED}$.
Cette translation transforme les points B et G en B' et G' donc le triangle EBG en DB'G'.

Cette translation transforme le segment [EG] en un segment parallèle donc le point G' est sur la droite (AD).

De plus, par conservation des angles, l'image B' est sur la demi-droite [DC).

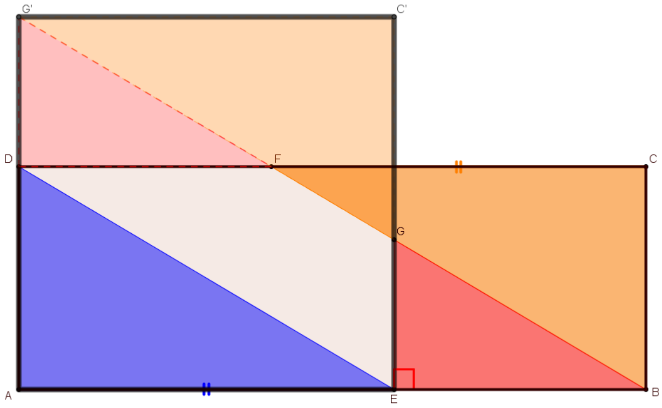
Par conservation des longueurs, $DB' = EB = a - \sqrt{ab}$ donc B' est le point F.

De même, $DG' = EG = \sqrt{ab} - b$. Ainsi, $AG' = AD + DG' = b + \sqrt{ab} - b = \sqrt{ab}$.

Par des arguments similaires, le triangle BCF est transformé en GC'G' par la translation de vecteur $\overrightarrow{BG}$ avec C' sur (GE), $\widehat{GC'G'} = 90°$, $C'E = C'G + GE = CB + GE = b + \sqrt{ab} - b = \sqrt{ab}$ et

$G'C' = FC = \sqrt{ab}$Erreur ! Signet non défini..

Ainsi, on peut utiliser le découpage du rectangle pour obtenir un carré par recombinaison, sans chevauchement ni vide.



Exercice académique 2 (non spé maths) : Déchiffrement

1. La lettre K est la 11ème lettre de l'alphabet.
- ✓ $N \leftarrow 11$.
- ✓ $q \leftarrow 00000$.
- ✓ Premier tour de la boucle « Tant que » : $8 = 2^3 \leq 11 < 2^4 = 16$ donc $k \leftarrow 3$, $q \leftarrow 01000$ et $N \leftarrow N - 8 = 3$.
  Deuxième tour de la boucle « Tant que » : $2 = 2^1 \leq 3 < 2^2 = 4$ donc $k \leftarrow 1$, $q \leftarrow 01010$ et $N \leftarrow N - 2 = 1$.
  Troisième tour de la boucle « Tant que » : $1 = 2^0 \leq 1 < 2^1 = 2$ donc $k \leftarrow 0$, $q \leftarrow 01011$ et $N \leftarrow N - 1 = 0$
  Fin de la boucle « Tant que »
- ✓ Afficher $q = 01011$

2. Z est la 26ème lettre de l'alphabet.
- ✓ $N \leftarrow 26$.
- ✓ $q \leftarrow 00000$.
- ✓ Premier tour de la boucle « Tant que » : $16 = 2^4 \leq 26 < 2^5 = 32$ donc $k \leftarrow 4$, $q \leftarrow 10000$ et $N \leftarrow N - 16 = 10$.
  Deuxième tour de la boucle « Tant que » : $8 = 2^3 \leq 10 < 2^4 = 16$ donc $k \leftarrow 3$, $q \leftarrow 11000$ et $N \leftarrow N - 8 = 2$.
  Troisième tour de la boucle « Tant que » : $2 = 2^1 \leq 2 < 2^2 = 4$ donc $k \leftarrow 1$, $q \leftarrow 11010$ et $N \leftarrow N - 2 = 0$
  Fin de la boucle « Tant que »
- ✓ Afficher $q = 11010$

3. En reprenant l'algorithme,
Notons $N_1 = N$ et k_1 le premier entier tel que 2^{k_1} soit le plus grand possible en restant inférieur ou égal à N_1, on a donc $2^{k_1} \leq N_1 < 2^{k_1+1}$ si bien que $0 \leq N_1 - 2^{k_1} < 2^{k_1+1} - 2^{k_1}$ soit $0 \leq N_1 - 2^{k_1} < 2^{k_1}$. Notons $N_2 = N_1 - 2^{k_1}$.
On reprend le même procédé avec N_2, … On construit alors deux suites $(N_i)_{i\geq 1}$ et $(k_i)_{i\geq 1}$ avec, pour tout entier $i \geq 1$, $N_{i+1} = N_i - 2^{k_i}$ et $0 \leq N_{i+1} < 2^{k_i} \leq N_i$.
$(N_i)_{i\geq 1}$ est donc une suite d'entiers naturels strictement décroissante donc il existe un entier $r \geq 1$ tel que $N_r = 0$ et on a alors $N = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_{r-1}}$.
Il suffit maintenant de noter que les entiers k_i, pour i entier compris entre 1 et $r - 1$ correspondent à la postion des « 1 » dans le quintuplet de codage.
Ainsi, pour décoder le quintuplet 01110, on calcule $2^3 + 2^2 + 2^1 = 14$ ce qui correspond à la lettre N.

4. En reprenant la méthode ci-dessus,
00010 se décode en calculant $2^1 = 2$, ce qui donne la lettre B.
10010 se décode en calculant $2^4 + 2^1 = 18$, ce qui donne la lettre R.
00001 se décode en calculant $2^0 = 1$, ce qui donne la lettre A.
10110 se décode en calculant $2^4 + 2^2 + 2^1 = 22$, ce qui donne la lettre V.
01111 se décode en calculant $2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 15$, ce qui donne la lettre 0.
Le message est « BRAVO ».

5. Le quintuplet le plus fréquent est celui associé à la lettre E, à savoir 00101

6.

a. Il y a des quintuplés trop « grands » comme 11111. Si on veut décoder avec l'algorithme précédent, on doit calculer $2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 31$, qui n'est pas associé à une lettre de l'alphabet...

b. On peut penser que le qintuplet 01011 est associé à la lettre E.

c. Au quintuplet 01011, on associe le calcul $2^3 + 2^1 + 2^0 = 11$. Or la lettre E est la 5ème lettre de l'alphabet donc la valeur du décalage est 6.

d. 01011 se décode en calculant $2^3 + 2^1 + 2^0 = 11$ et $11 - 6 = 5$, ce qui donne la lettre E.
10010 se décode en calculant $2^4 + 2^1 = 18$ et $18 - 6 = 12$, ce qui donne la lettre L.
00111 se décode en calculant $2^2 + 2^1 + 2^0 = 7$ et $7 - 6 = 1$, ce qui donne la lettre A.
01010 se décode en calculant $2^3 + 2^1 = 10$ et $10 - 6 = 4$, ce qui donne la lettre D.
01000 se décode en calculant $2^3 = 8$ et $8 - 6 = 2$, ce qui donne la lettre B.
11011 se décode en calculant $2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 27$ et $27 - 6 = 21$, ce qui donne la lettre U.
11110 se décode en calculant $2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 30$ et $30 - 6 = 24$, ce qui donne la lettre X.
11111 se décode en calculant $2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 31$ et $31 - 6 = 25$, ce qui donne la lettre Y.
Le message est « ELLEADEBEAUXYEUX ».