OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE REIMS
2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

Juniper Green – Éléments de correction

Première Partie : Version à un joueur

1. **Le cas $N = 20$.**

   a. Tout nombre premier supérieur à $\frac{N}{2}$ (dans le cas $N = 20$: 11 ou 13 ou 17 ou 19) a 1 comme unique voisin possible : il est forcément au début ou à la fin.

   b. Si on veut utiliser deux entiers premiers parmi 11, 13, 17 et 19, on ne pourra faire que trois coups car ces deux entiers premiers ont 1 pour unique voisin (qui serait alors placé au centre de la série de trois coups). Pour optimiser le nombre de coups, il ne faut alors utiliser qu'un seul de ces entiers premiers si bien qu'on ne pourra pas faire plus de 17 coups.

   c. On peut proposer, par exemple, 12-6-18-9-3-15-5-10-20-4-8-16-2-14-7-1-11.

2. **Retour au cas général**

   a. On obtient $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 4, a_6 = 6, a_7 = 6\ , a_8 = 7, a_9 = 8, a_{10} = 9$
   [1]
   [2,1]
   [3,1,2]
   [4,2,1,3]
   [3,1,2,4]
   [3,6,2,4,1,5]
   [3,6,2,4,1,7]
   [3,6,2,4,8,1,7]
   [9,3,6,2,4,8,1,7]
   [9,3,6,2,4,8,1,10,5]

   b. Une suite de coups de longueur maximale entre 1 et N est également une suite de coups entre 1 et $N + 1$.

   Donc une suite de coups de longueur maximale entre 1 et $N + 1$ est de longueur supérieure ou égale à celle entre 1 et N.

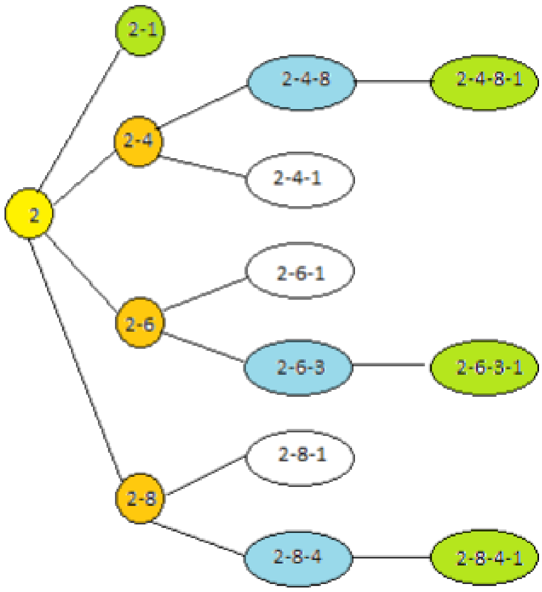
Deuxième partie : Version à deux joueurs

1. **Supposons que $N = 20$.**

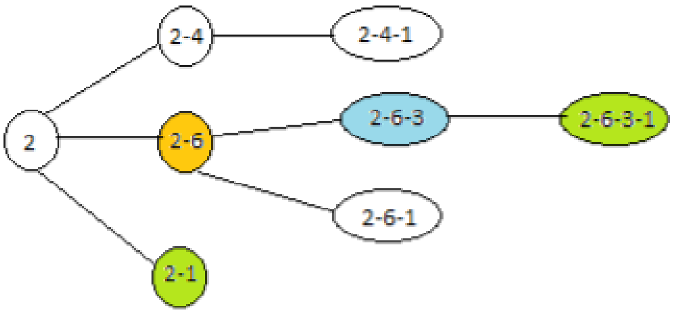
   a. Le joueur A est sûr de gagner la partie s'il commence en choisissant le 11, le 13, le 17 ou le 19,car le joueur B est alors obligé de jouer le 1, il suffit au joueur A de choisir un nombre restant parmi 11, 13, 17 et 19 et B ne pourra alors plus jouer.

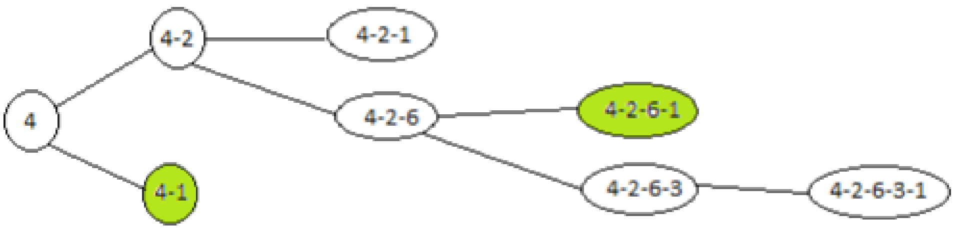
   b. Si A joue le 14, B peut jouer 1 ou 7, il choisit 7 (sinon A pourra jouer 11 par exemple), A est donc obligé de jouer 1, et B pourra choisir 11, 13, 17 ou 19 et gagner la partie.

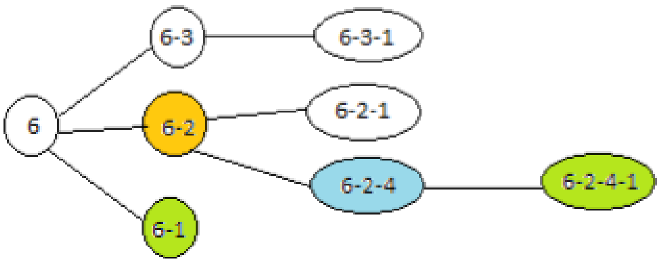
2. **Supposons que $N = 8$.**



3. Supposons que $N = 6$.







Déplacements sur une table de Pythagore – Acad spé – Eléments de correction

Première partie : Des exemples.

1. **a.** Les deux cases atteintes par le cavalier après la case $(5;3)$ sont les cases $(7;4)$ et $(9;5)$.
   b. Horizontalement, on effectue 20 décalages de 2 unités vers la droite donc, en partant de 1, on obtient 41.
   Verticalement, on effectue 20 décalages de 1 unité vers le haut, donc, en partant de 1, on obtient 21.
   La case atteinte, après 20 coups, est donc bien la case $(41;21)$ qui contient la valeur 41×21.
   c. En considérant la case $(1\,;1)$ du départ et les n coups, on atteint la case $(1+2n;1+n)$, qui contient la valeur $(1+2n)\times(1+n)$.
2. En deux coups, le déplacement du cavalier coïncide avec celui du chameau, donc toute case atteinte par le
   chameau (en n coups) l'est également par le cavalier (en $2n$ coups).

Deuxième partie : Dénombrement de déplacements.

1. Tout entier naturel non nul n se trouve sur la 1ère ligne(sur la case $(n;1)$) et sur la 1ère colonne (sur la case $(1;n)$).
2. **a.** Partant de la case $(1;1)$, il faut effectuer 5 déplacements vers la droite et 3 déplacements vers le haut pour atteindre la case $(6;4)$. 5 et 3 étant premiers entre eux, le seul déplacement possible est le déplacement $\binom{5}{3}$.
   b. La case $(1;5)$ peut être atteinte par les déplacements :
   - $\binom{0}{4}$ en 1 coup ;
   - $\binom{0}{2}$ en 2 coups ;
   - $\binom{0}{1}$ en 4 coups.

   c. La case $(7;5)$ peut être atteinte par les déplacements :
   - $\binom{6}{4}$ en 1 coup ;
   - $\binom{3}{2}$ en 2 coups.
3. **a.** Les cases contenant la valeur 14 sont $(1\,;14)$, $(14\,;1)$, $(2;7)$ et $(7;2)$.
   b. Pour chacune des cases :
   - $(1\,;14)$ peut être atteinte par les déplacements $\binom{0}{13}$ (en 1 coup) et $\binom{0}{1}$ (en 13 coups) ;
   - $(14\,;1)$ peut être atteinte par les déplacements $\binom{13}{0}$ (en 1 coup) et $\binom{1}{0}$ (en 13 coups) ;
   - $(2\,;7)$ peut être atteinte par les déplacements $\binom{1}{6}$ (en 1 coup) ;
   - $(7\,;2)$ peut être atteinte par les déplacements $\binom{6}{1}$ (en 1 coup).

   c. $ND_{14} = 6$ car il y a bien 6 déplacements possibles pour passer de la case $(1;1)$ aux cases contenant la valeur 14.
4. On complète l'algorithme ainsi :

```python
def dep_pythagore(n):
    cpt=0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            for k in range(n):
                if (1+k*i)*(1+k*j)==n:
                    cpt=cpt+1
    return cpt
```

5. **Cas général**
   a. Le déplacement du chameau est $\binom{4}{2}$ qui est réductible en $\binom{2}{1}$ (déplacement du cavalier) donc on retrouve le résultat de la première partie.
   b. Le déplacement $\binom{h}{v}$ est irréductible si, et seulement si, h et v n'ont pas de diviseur commun autre que 1.
   c. Dans le cas où $\binom{h}{v}$ n'est pas irréductible, il y aura autant de déplacements fractionnés possibles qu'il y a de diviseurs communs, autres que 1, à h et v.

d. Afin de déterminer le nombre ND_n , on peut proposer le protocole suivant :

- On détermine toutes les cases contenant n ;
- Pour chacune d'elles, on détermine le déplacement (global) $\binom{h}{v}$ permettant d'y parvenir et :
  - ✓ Si le déplacement est irréductible, on augmente la valeur de ND_n de 1 ;
  - ✓ Sinon, on augmente la valeur de ND_n du nombre de diviseurs communs, autres que 1, à h et v.

Déplacements sur une table de Pythagore – Acad non spé – Eléments de correction

3. Les deux cases atteintes par le cavalier après la case $(5;3)$ sont les cases $(7;4)$ et $(9;5)$.

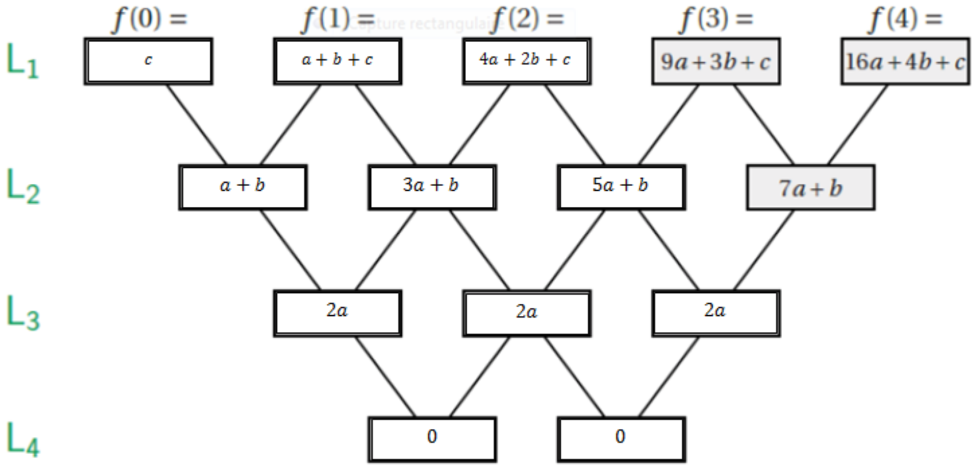
4. Horizontalement, on effectue 20 décalages de 2 unités vers la droite, donc, en partant de 1, on obtient 41.
Verticalement, on effectue 20 décalages de 1 unité vers le haut, donc, en partant de 1, on obtient 21.
La case atteinte, après 20 coups, est donc bien la case $(41;21)$ qui contient la valeur 41×21.

5. **a.** Les cases atteintes par le cavalier sont, successivement :

$$1 - 6 - 15 - 28 - 45 - 66 - 91 - 120 - 153 - 190 - 231 - 276.$$

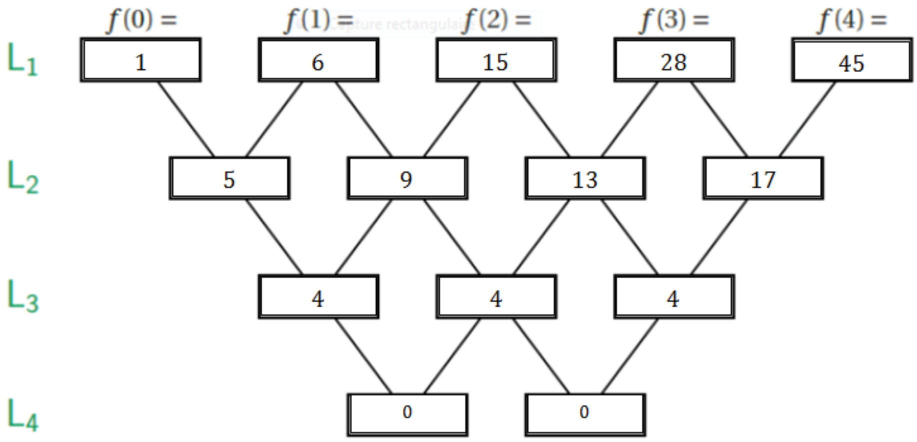
Ainsi, la valeur 190 est atteinte par le cavalier au 10ème coup).
b. De même, 264 ne l'est pas.

6. **a.** $f(3) = a \times 3^2 + b \times 3 + c = 9a + 3b + c$ et $f(4) = a \times 4^2 + b \times 4 + c = 16a + 4b + c$.
b. De même, $f(0) = c, f(1) = a + b + c$ et $f(2) = 4a + 2b + c$.
c.



d. La ligne L_4 ne contient que des 0.

7. **a.** Avec la méthode des « soustractions successives », on obtient le diagramme ci-dessous :



La fonction polynômiale f recherchée est donc de degré $4 - 2 = 2$ et est définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

De plus, $f(0) = 1$ fournit $c = 1$; puis $f(1) = 6$ fournit $a + b + c = 6$ soit $a + b = 5$.

Et $f(2) = 15$ fournit $4a + 2b + c = 15$, soit $4a + 2b = 14$ ou encore $2a + b = 7$

Reste à résoudre, $\begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ a = 7 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$

On obtient donc l'expression $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

b. Après 20 coups, on se situe donc sur une case contenant la valeur $f(20) = 2 \times 20^2 + 3 \times 20 + 1 = 861$.

8. **a.** La case atteinte, après n déplacements, contient la valeur $f(n) = 2n^2 + 3n + 1$.
b. il s'agit de résoudre $2n^2 + 3n + 1 = 2021$, soit $2n^2 + 3n - 2020 = 0$, qui n'admet pas de solution entière. Les élèves peuvent justifier ceci par divers moyens, notamment avec la calculatrice et le menu RECUR, GRAPH, EQUA, ...

9. Si on part de la 1ère colonne, la case de départ a pour format $(1\,;b)$ avec b entier naturel non nul. Les valeurs contenues dans les cases atteintes par le cavalier, après n déplacements, sont donc de la forme

$(1 + 2n)(b + n)$.

Le cavalier atteindra la valeur 2021 si, et seulement si, $(1 + 2n)(b + n) = 2021 = 43 \times 47$.

Travaillant avec des entiers naturels, on a donc quatre possibilités :

- $\begin{cases} 1 + 2n = 1 \\ b + n = 2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ b = 2021 \end{cases}$
- $\begin{cases} 1 + 2n = 2021 \\ b + n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1010 \\ b = -1009 \end{cases}$ exclu car b positif.
- $\begin{cases} 1 + 2n = 43 \\ b + n = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 21 \\ b = 26 \end{cases}$
- $\begin{cases} 1 + 2n = 47 \\ b + n = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 23 \\ b = 20 \end{cases}$

Le cavalier peut donc se positionner directement sur la case $(1; 2021)$ et n'effectuer alors aucun coup, ou bien partir de la case $(1\,;26)$ et faire 21 coups, ou bien partir de $(1\,;20)$ et faire 23 coups.