OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE POITIERS
2022

SUJET DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

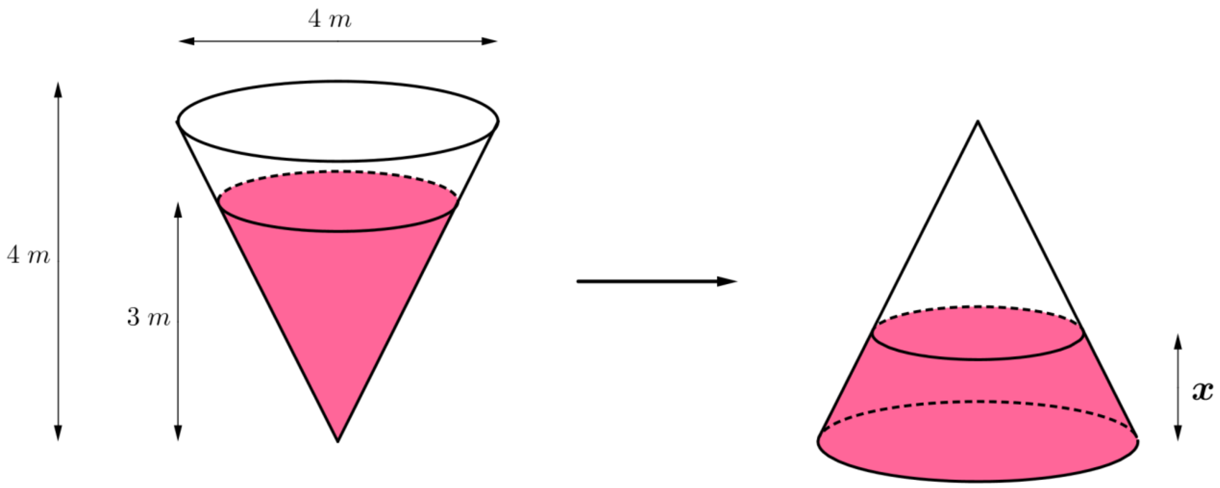
Académie de Poitiers

Les candidats traitent les **deux exercices.**

<u>Exercice académique n°1 :</u> ***Pour tous les élèves.***

L'exercice est décomposé en trois problèmes <u>entièrement indépendants</u>.

<u>Problème 1</u> : le cône renversé.



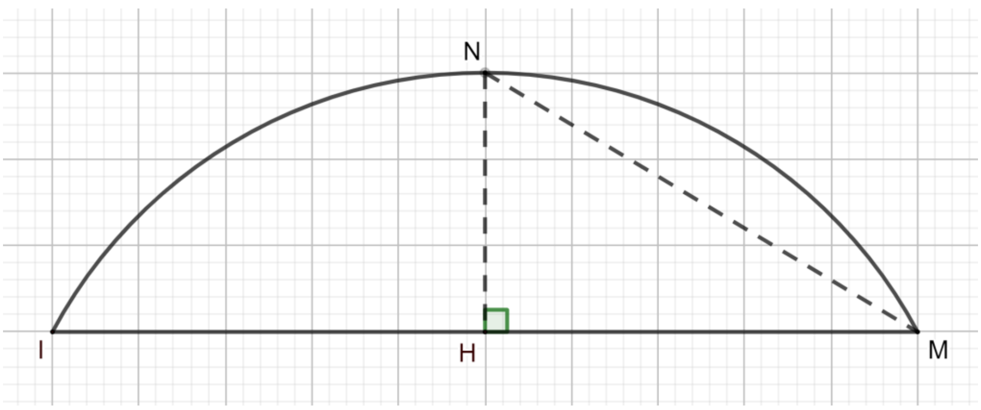
On retourne un récipient conique fermé contenant un liquide.
Calculer la hauteur x indiquée sur le dessin. Arrondir au millimètre.

<u>Rappel :</u> Le volume V d'un cône de rayon r et de hauteur h est donnée par : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

<u>Problème 2</u> : la cave voûtée.

Un architecte doit construire un bâtiment dont la pièce principale est constituée d'un plafond vouté.
La hauteur de la pièce en son centre est de 3 mètres, sa largeur de 10 m.
Cette situation peut être représentée par le schéma ci-dessous :

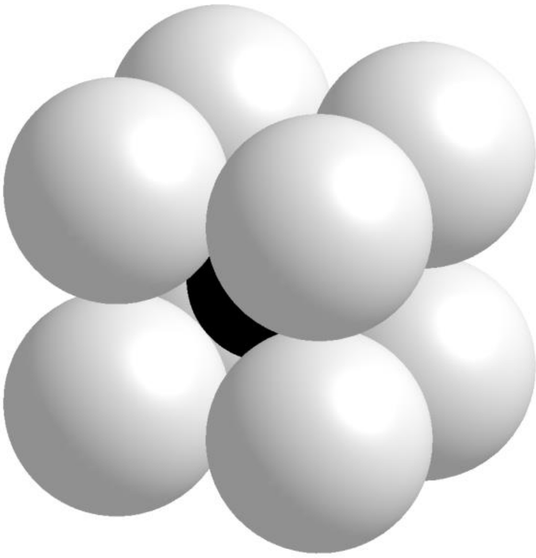
. L'arc de cercle $\widehat{\mathrm{IM}}$ représente la voute.
. Le segment [IM] représente le sol.
. (NH) est la médiatrice de [IM]
. HN = 3 ; IM = 10.

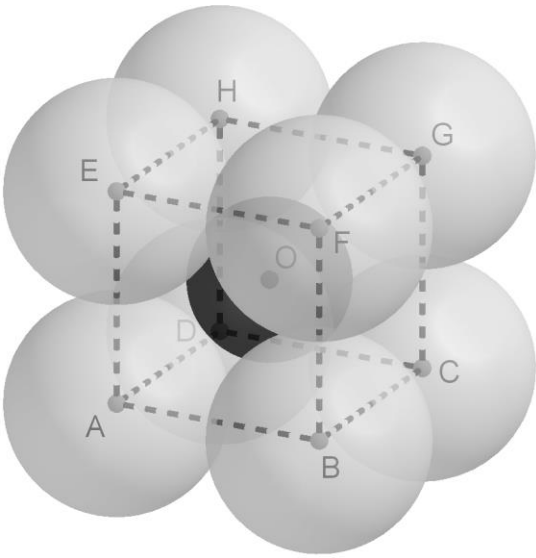


1. Calculer la longueur du segment [MN].
2. Construire sur <u>l'annexe de l'avant dernière page du sujet</u> le centre O du cercle (*C*) dont $\widehat{\mathrm{IM}}$ est un arc.
3. Calculer la longueur de l'arc $\widehat{\mathrm{IM}}$, arrondie à 0,01 m près.

Problème 3 : la petite sphère noire.

On considère huit sphères de rayon 1 dont les centres sont les sommets d’un cube ABCDEFGH d’arête 2.
Une petite sphère noire de centre O est entourée par ces huit sphères et est tangente à chacune d’entre elles.





1. Calculer la longueur exacte de la diagonale [AG].
2. Calculer le rayon de la petite sphère noire.

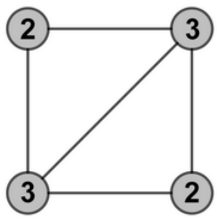
<u>Exercice académique n°2 :</u> ***Pour les élèves qui suivent l'enseignement de spécialité mathématiques de première générale.***

<u>Les pitons et les cordes</u>

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Des pitons de bois sont plantés en terre. Chaque piton est relié à au moins un autre piton par une corde. On peut toujours aller d'un piton A quelconque à un piton B quelconque, en suivant un chemin continu d'une ou plusieurs cordes. Deux pitons distincts sont reliés par au plus une corde et les 2 extrémités d'une corde quelconque sont accrochées à 2 pitons distincts. On obtient ainsi un ensemble de pitons reliés par des cordes que l'on appelle un filet.
On colle une étiquette sur chaque piton, sur laquelle on écrit le nombre de cordes accrochées à ce piton. À chaque filet de n pitons sur lesquels sont inscrits les entiers $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ par ordre décroissant, on fait correspondre la liste ordonnée $(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$.

Par exemple, le filet constitué de 4 pitons, dont deux sont reliés à deux autres par une corde et dont deux sont reliés à trois autres par une corde est associé au quadruplet $(3,3,2,2)$. Voici une représentation :



<u>Partie 1</u>

1. Le triplet $(2,2,1)$ ne correspond à aucun filet. Expliquer pourquoi.
2. Énumérer tous les filets constitués de trois pitons. Faire des dessins.
3. Soit un filet contenant n pitons.
   a) Quel est le nombre minimal de cordes dans ce filet ?
   b) Quel est le nombre maximal de cordes dans ce filet ? Justifier.
4. Trouver un filet de six pitons, associé à la liste ordonnée $(4,4,3,2,2,1)$.

<u>Partie 2</u>

On dit qu'un filet contenant n pitons est parfait si sa liste associée contient tous les entiers de 1 à $n-1$.

1. Dessiner un filet parfait pour chacun des cas :
   a) $n = 2$ b) $n = 3$ c) $n = 4$
   Dans chaque cas, écrire la liste de n entiers, associée au filet.
2. Pourquoi un filet parfait contient exactement deux pitons d'où partent le même nombre de cordes ?
3. Décrire un algorithme qui permet de construire un filet parfait contenant n pitons. On pourra prendre un exemple pour expliquer cet algorithme.
4. Exprimer en fonction de n, le nombre a_n de cordes d'un filet parfait contenant n pitons, et donner les valeurs de a_n , pour n variant de 2 à 11.

<u>Exercice académique n°2</u> : *Pour les élèves <u>ne</u> suivant <u>pas</u> l'enseignement de spécialité mathématiques de première générale.*

<u>Distance sur un quadrillage</u>

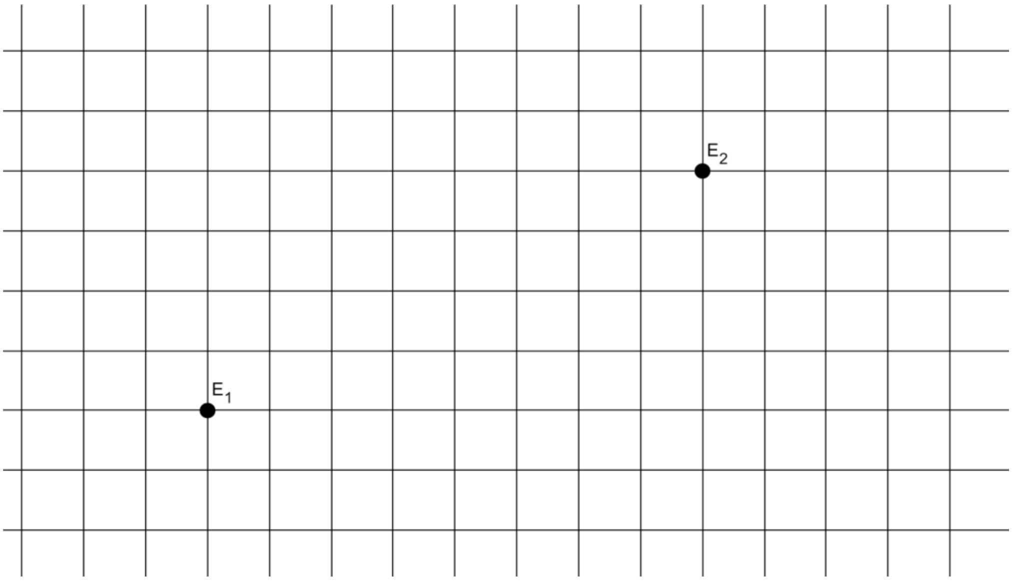
<u>Partie 1 :</u>

Dans une ville où les rues forment un réseau quadrillé comme ci-dessous, Monsieur et Madame Cadinamic travaillent dans deux entreprises différentes E_1 et E_2 situées sur des carrefours, comme indiqué sur le plan ci-dessous.

La distance de deux carrefours voisins est toujours de 100 mètres.

En toute logique et équité, ils cherchent à louer ou acheter un logement sur l'une des rues, à égales distances en voiture de leurs deux entreprises.

1. Indiquer tous les endroits possibles pour leur logement, dans le cas ci-dessous.
   <u>Répondre sur l'ANNEXE 1 de la dernière page du sujet.</u>



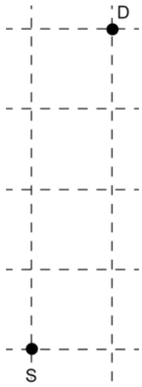
2. a) Quelle est la plus petite distance à parcourir pour relier E_1 à E_2 ?
   b) Existe-t-il un chemin de 1900 mètres qui va de E_1 à E_2 ? Justifier.

<u>Partie 2 :</u>

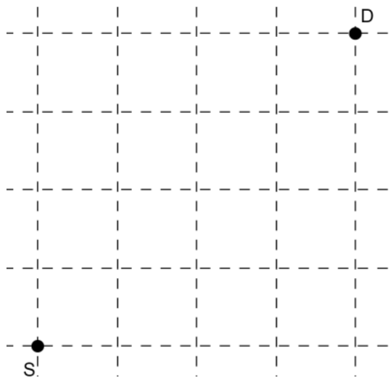
Mme Cadinamic fréquente une salle de sport située en S ci-dessous. Ce samedi, elle invite ses amis sportifs à un repas à son domicile, situé au point D de la carte.

Avant sa réception, elle organise une course à travers la ville depuis son club de sport (S) jusqu'à chez elle (D). Pour cela elle imagine le plus long trajet possible qui reste dans le rectangle de diagonale [SD], périmètre compris, et qui ne passe jamais 2 fois par la même rue. (Il peut passer plusieurs fois par le même carrefour).

1. a) Quelle est la longueur de ce trajet dans le cas ci-contre ?

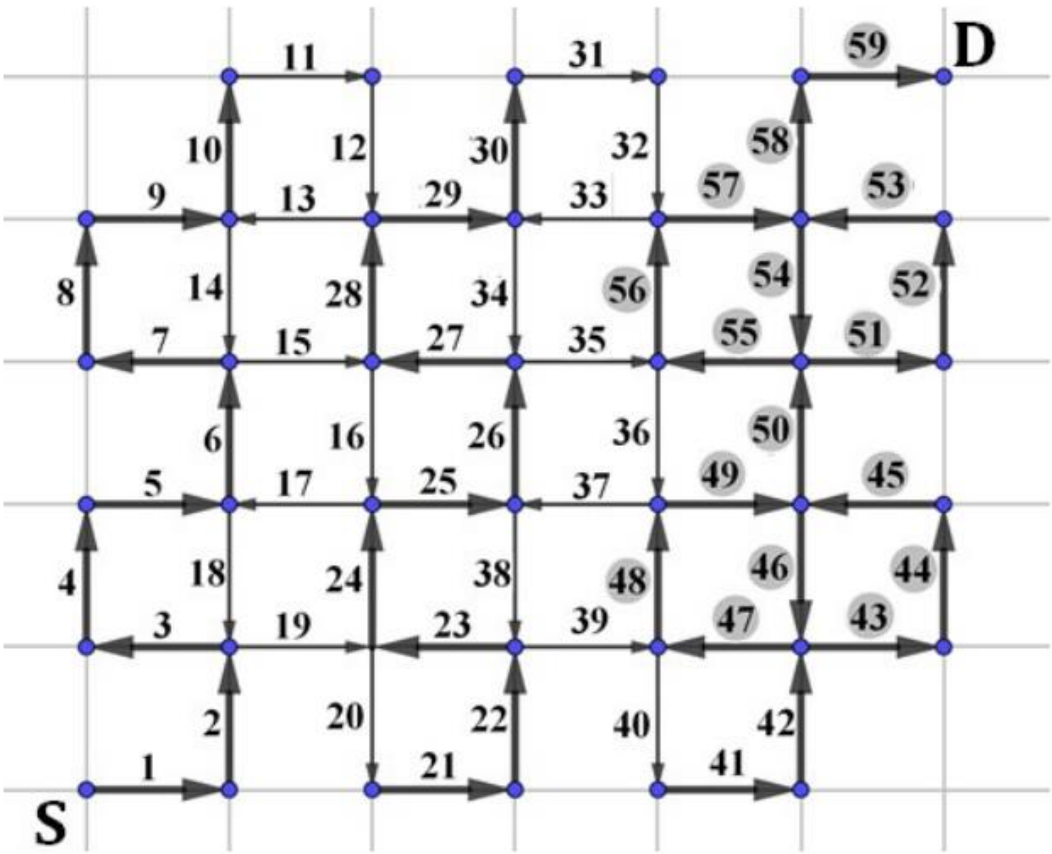


b) Dessiner un chemin de longueur 3200 m dans le cas ci-dessous.
Répondre sur l’ANNEXE 2 de la dernière page du sujet.

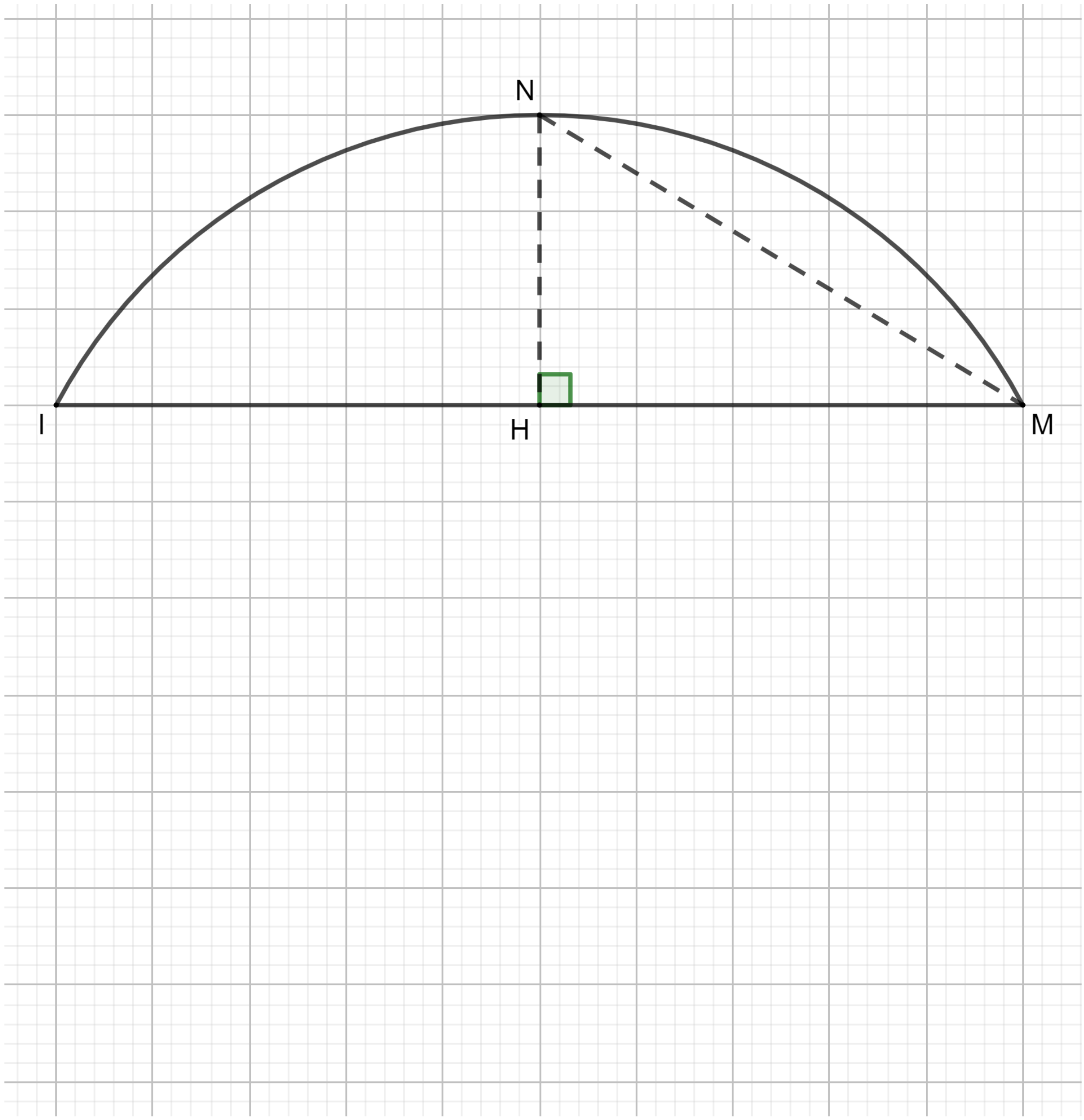


2. On a dessiné un parcours numéroté qui semble le plus long possible entre S et D sur le quadrillage 5 × 6 ci- dessous. Il y a une alternance de traits gras et fins pour aider à suivre le parcours. La longueur de ce parcours est 5900 m. Pourtant, on peut faire un parcours plus long entre S et D.

Dessiner ce nouveau parcours en trait plein sur la feuille située en ANNEXE 3 de la dernière page du sujet et donner la longueur de ce parcours amélioré.

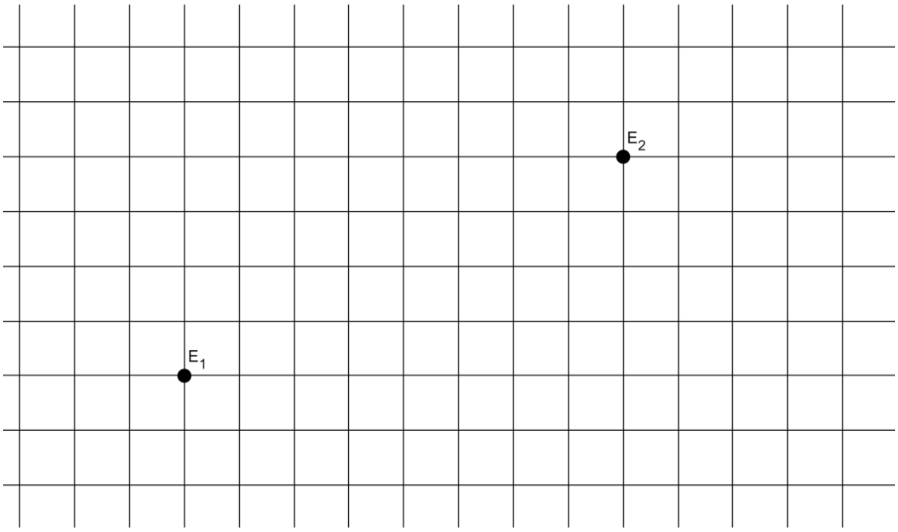


Annexe du problème 2 « cave voûtée » de l'exercice n°1 de la partie académique :

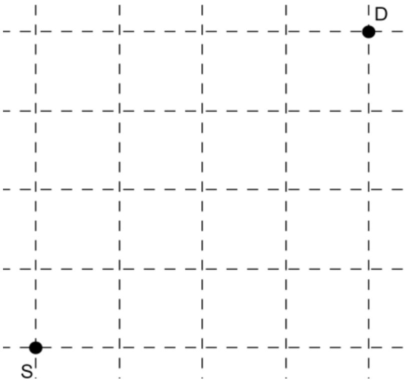


Annexes de l’exercice académique n°2 (pour les élèves ne suivant pas l’enseignement de spécialité mathématiques)

ANNEXE 1



ANNEXE 2



ANNEXE 3