OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE POITIERS 2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Académie de Poitiers

Les candidats traitent les **deux exercices.**

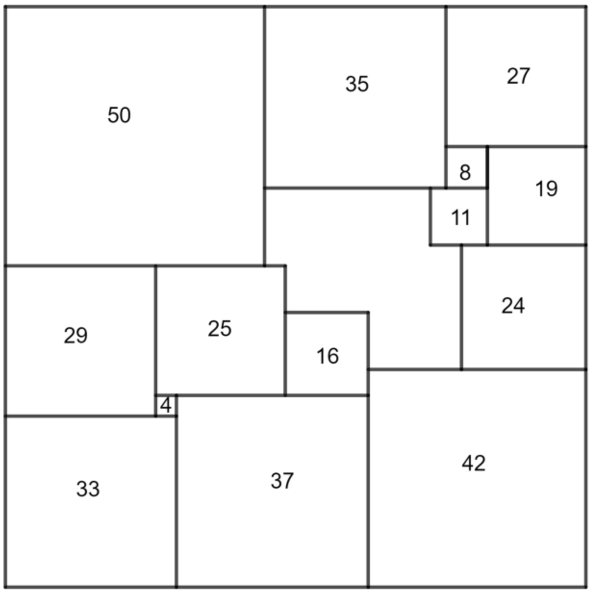
Exercice académique n°1 : *Pour tous les élèves.*

L'exercice est décomposé en trois problèmes entièrement indépendants.

Problème 1 : carrés de carrés

Dans ce problème, la mesure de chaque dimension est un nombre entier.
Paver un rectangle avec des carrés, c'est recouvrir la totalité du rectangle par des carrés, sans déborder des frontières du rectangle, et sans chevauchement.

Le mathématicien Russe Nicolaï Lusin (1883-1950) déclara qu'il n'était pas possible de paver un carré avec des carrés, de côtés différents.
L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il avait tort en reconstituant la zone centrale manquante dans la figure ci-dessous ou chaque entier écrit est le côté du carré dans lequel il se trouve.



Sur l'annexe jointe à la dernière page, faire le dessin de cette zone centrale, et pour chaque carré rajouté, écrire en son centre la valeur de son côté.

Problème 2 : Persistance et terminaison additives.

Soit n un nombre entier naturel. On appelle f la fonction qui à n associe la somme de ses chiffres.

On appelle persistance additive de n, et on note $pa(n)$, le nombre de fois qu'il faut appliquer la fonction f en partant de n pour obtenir un nombre à un seul chiffre.

Ce nombre à un seul chiffre est alors appelé terminaison additive de n et est noté $ta(n)$.

Par exemple, on a $pa(86)=2$ et $ta(86)=5$ car $f(86)=8+6=14$ et $f(14)=1+4=5$.

1) a. Donnez un exemple d'entier dont la persistance additive est égale à 3.

   b. Existe-t-il un entier de persistance additive égale à 4 ?

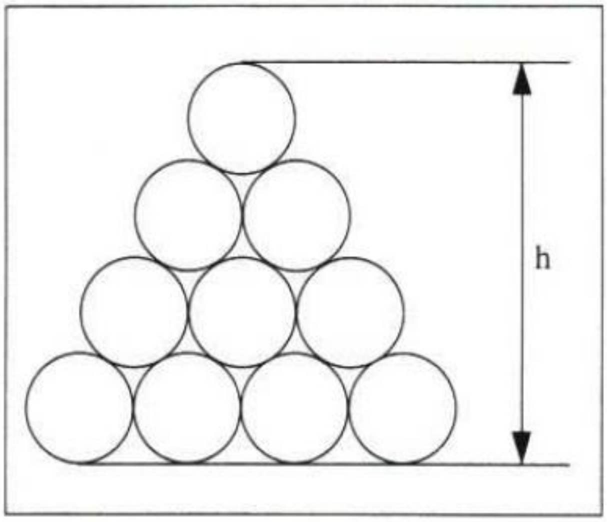
   c. Existe-t-il un entier de persistance additive égale à 5 ?

2) Les entiers inférieurs ou égaux à 9 ont une terminaison additive égale à leur dernier chiffre.

   Quel est le plus petit entier supérieur à 10 ayant une terminaison additive égale à son dernier chiffre ?

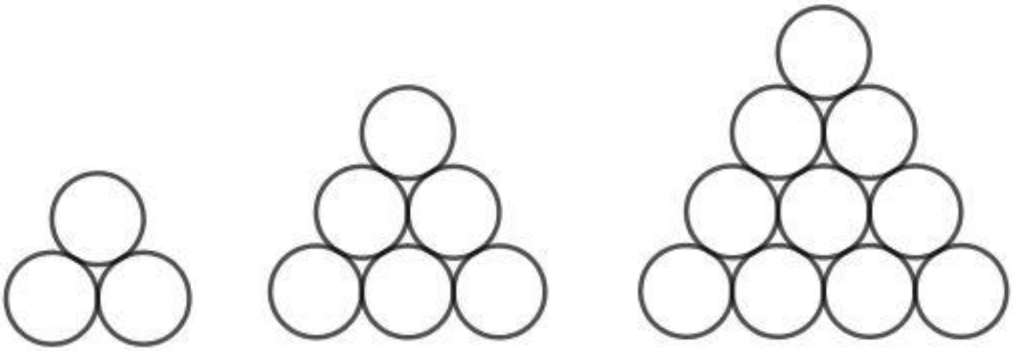
__Problème 3__ : de tubes en tubes

On empile des tubes cylindriques de diamètre 3 cm.



1) Calculez la hauteur h du tas de tubes dessiné ci-contre, donnez sa valeur exacte en cm et une valeur approchée au mm près.

2) On considère les pyramides de tubes suivantes :



1 étage 2 étages 3 étages .... *n* étages

Combien de tubes doit-on utiliser au minimum pour dépasser une hauteur de 2021 mm ?

__Formulaire :__ Pour tout entier $n \geq 1$, $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

<u>Exercice académique n°2 :</u> ***Pour les élèves qui suivent l'enseignement de spécialité mathématiques de première générale.***

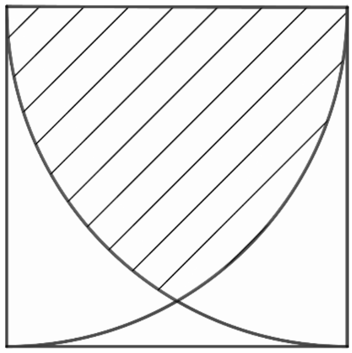
<u>Fête annuelle des mathématiques</u>

Pour la fête annuelle des mathématiques, l'équipe de Poitiers a été choisie cette année pour organiser les festivités.

Elle a tout d'abord décidé de se choisir un nouveau blason.

Pour cela, elle dispose d'une plaque en bois carrée de côté 50 cm, sur laquelle on trace deux quarts de cercles ayant pour centre deux sommets consécutifs comme sur la figure ci-contre :

On découpe le blason qui correspond à la partie hachurée.

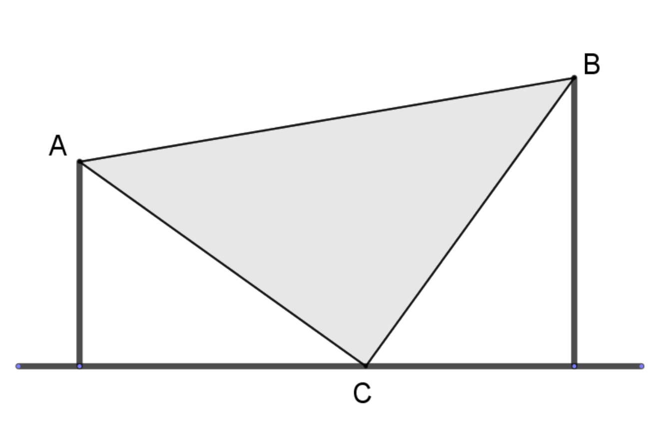
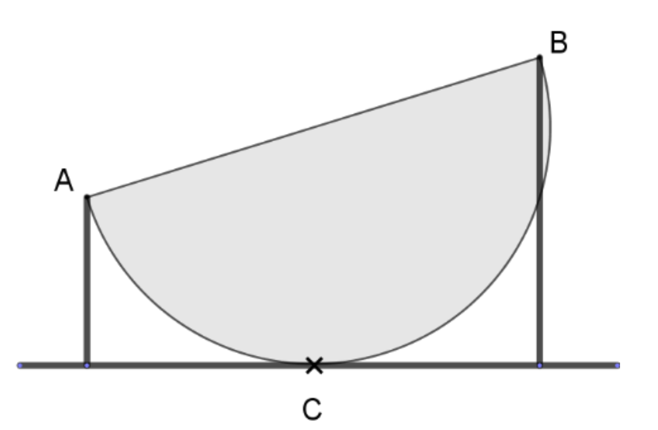


1) Quelle est la surface de ce blason ?

L'équipe de Poitiers doit enfin s'occuper de la banderole qu'elle va devoir accrocher à l'entrée de l'établissement qui accueillera les festivités. Elle dispose de deux poteaux de hauteurs respectives 2 m et 3 m. L'écartement des 2 poteaux va dépendre de la forme choisie pour la banderole.

2 formes différentes sont envisagées : triangle rectangle-isocèle (*figure n°1*) et demi-disque (*figure n°2*).

On fixe la banderole en deux sommets en A (sommet poteau de 2 m) et en B (sommet poteau de 3 m), de telle sorte qu'elle touche le sol en un unique point C.

	
<u>Figure n°1</u> : Banderole ABC isocèle-rectangle en C	*<u>Figure n°2</u>* : Banderole demi-disque de diamètre [AB].

2) Quel est, dans chacun des deux cas, l'écartement horizontal des 2 poteaux ?

<u>Exercice académique n°2</u> : ***Pour les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité mathématiques de première générale***

<u>Tableau magique</u>.

1) a. Déterminez le quotient et le reste de 21 dans la division par 5.

b. Recommencez avec 16.

2) Soit A l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et 24.

Quels sont les quotients et restes possibles lorsqu'on divise un élément de A par 5 ?

3) Trouvez deux ensembles d'entiers naturels E et F, contenant chacun 5 entiers, tels que tout élément de A s'écrive de manière unique comme somme d'un élément de E et d'un élément de F.

4) A Pierre, Kévin et Lola, on donne une feuille de papier avec le tableau suivant :

9	6	5	7	8
19	16	15	17	18
4	1	0	2	3
24	21	20	22	23
14	11	10	12	13

Quelles sont les 3 remarques que l'on peut faire en examinant ce tableau ?

5) On dit aux trois amis :

- Eloignez-vous les uns des autres, choisissez une case du tableau, entourez l'entier qui s'y trouve, et barrez la colonne et la ligne qui contiennent cette case.
- Tant que c'est possible, recommencez en choisissant une case non barrée.
- Chacun de votre côté, relevez le nombre d'entiers que vous avez entouré sur votre feuille et faites la somme de ces entiers entourés, puis rapprochez-vous pour comparer vos résultats.

Pourquoi Pierre, Kévin et Lola ont-ils l'air si étonné, une fois cette comparaison faite ? Justifiez votre réponse.

Annexe du problème 1 de l'exercice n°1 de la partie académique :

Schéma à compléter avec les carrés manquants, en indiquant à l'intérieur de chaque carré la longueur de son côté :