OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE POITIERS
2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

POITIERS 2022

Nous saluons l'intérêt et la variété des thèmes proposés, il y en a pour tous les goûts.

Exercice 1 : « Trois problèmes indépendants »

Problème 1 : Le cône renversé

Le récipient est un cône de hauteur 4, que l'on peut séparer en deux parties disjointes : une partie remplie de liquide et une partie « remplie d'air ».

Désignons par V le volume du récipient, par L le volume du liquide et par A le volume de la partie remplie d'air. Ainsi, nous avons la relation : $V = A + L$.

- Lorsque le récipient est renversé, le liquide occupe un cône de hauteur 3 et homothétique du cône-récipient dans le rapport de leurs hauteurs. Ce rapport d'homothétie est donc égal à $\frac{3}{4}$.
- Lorsque le récipient est posé sur sa base, la partie vide du récipient occupe un cône de hauteur $4 - x$ et homothétique du cône-récipient dans le rapport de leurs hauteurs. Ce rapport d'homothétie est donc égal à $\frac{4-x}{4} = 1 - \frac{x}{4}$.

Or, nous savons qu'une homothétie de rapport k multiplie les volumes par k^3. Appliquons cette propriété aux deux cas de figure précédents. Nous en déduisons, dans le présent contexte, que :

$$\begin{cases} L = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times V = \frac{27}{64} \times V \\ A = \left(1 - \frac{x}{4}\right)^3 \times V \end{cases}$$

.

Compte tenu de la relation $V = L + A$, nous obtenons : $V = \frac{27}{64} \times V + \left(1 - \frac{x}{4}\right)^3 \times V$

La hauteur *x* (en mètres) « indiquée sur le dessin » est donc solution de l'équation : $1 = \frac{27}{64} + \left(1 - \frac{x}{4}\right)^3$

Cette équation est équivalente à l'équation : $\left(1 - \frac{x}{4}\right)^3 = \frac{37}{64}$ d'où nous déduisons : $1 - \frac{x}{4} = \frac{\sqrt[3]{37}}{4}$

Nous obtenons : $x = 4 - \sqrt[3]{37}$ soit 0,667 à 10^{-3} près (résultat lu sur une calculatrice).

La valeur exacte de la hauteur *x* « indiquée sur le dessin » est $x = 4 - \sqrt[3]{37}$ et son arrondi au millimètre près est égal à 0,667.

NB. Le résultat est indépendant du rayon R de base, il ne dépend que des hauteurs, nous ne nous sommes pas servis de la formule donnant le volume d'un cône.

Problème 2 : La cave voûtée

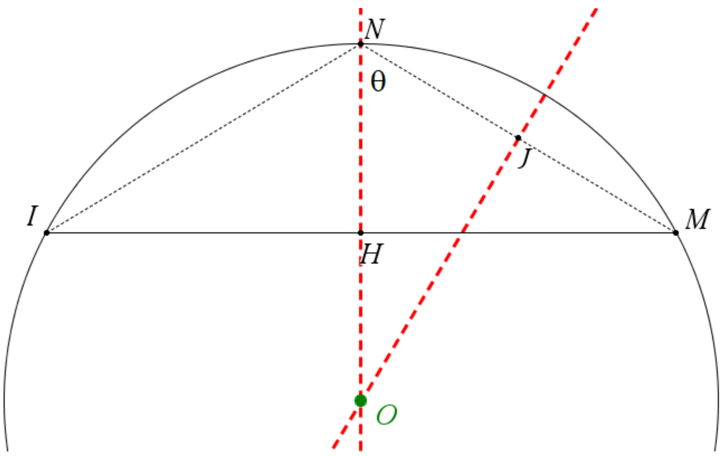
1. D'après les indications de l'énoncé, la droite (*HN*) est la médiatrice de [*IM*]. Donc, *H* est le milieu de [*IM*] et l'angle $\widehat{MHN}$ est un angle droit. Le triangle *HMN* est un triangle rectangle d'hypoténuse [*MN*] dont les côtés de l'angle droit sont [*HM*] et [*HN*] et ont respectivement pour mesures 5 et 3.

Nous pouvons appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle *HMN* :

$$MN^2 = HM^2 + HN^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$$

En conséquence la valeur exacte de la longueur du segment [*MN*] est : $MN = \sqrt{34}$.
L'arrondi à 0,01 m près de cette longueur est 5,83 m (résultat lu sur une calculatrice)

2. En tant que centre d'un cercle passant par les points *I*, *M* et *N*, le point *O* est équidistant des points *I*, *M* et *N*. Il est le point d'intersection de la médiatrice de [*IM*] (médiatrice que nous connaissons, c'est la droite [*HN*]) et de la médiatrice de [*MN*], droite passant par le milieu *J* du segment [*MN*] et perpendiculaire à ce segment.



3. Pour calculer la longueur de l'arc IM, nous devons au préalable calculer le rayon du cercle de centre O qui supporte cet arc ainsi qu'une mesure de l'angle interceptant cet arc, à savoir l'angle $\widehat{IOM}$.

À cet effet, notons θ la mesure de l'angle géométrique $\widehat{HNM}$. C'est l'un des angles du triangle rectangle HNM.

Nous savons à son propos que : $\tan\theta = \frac{HM}{HN} = \frac{5}{3}$ et que : $\cos\theta = \frac{HN}{MN} = \frac{3}{\sqrt{34}}$.

Nous pouvons dire que $\theta = \arctan\left(\frac{5}{3}\right)$ (soit 1,03 radians à 10^{-2} près en lisant sur une calculatrice).

Calculons le rayon du cercle :

Le rayon R du cercle est : $R = OI = OM = ON$.

Or, le segment $[ON]$ est l'hypoténuse du triangle OJN, triangle rectangle en J dont l'angle de sommet N a pour mesure θ et dont le côté $[JN]$ a pour longueur $JN = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$

Nous pouvons écrire : $R = ON = \frac{JN}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{34}}{2} \times \frac{\sqrt{34}}{3} = \frac{34}{6} = \frac{17}{3}$

Le cercle de centre O et passant par les points I, M et N a pour rayon $R = \frac{17}{3}$.

Calculons une mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$ interceptant l'arc IM :

Les triangles ION et MON sont des triangles isocèles isométriques dont les angles de base ont pour mesure θ. Leurs angles de sommet O ont pour même mesure $\pi - 2\theta$, et l'angle $\widehat{IOM}$ a pour mesure deux fois cette valeur.

L'angle $\widehat{IOM}$ a pour mesure $2\pi - 4\theta$

Calculons la longueur de l'arc IM :

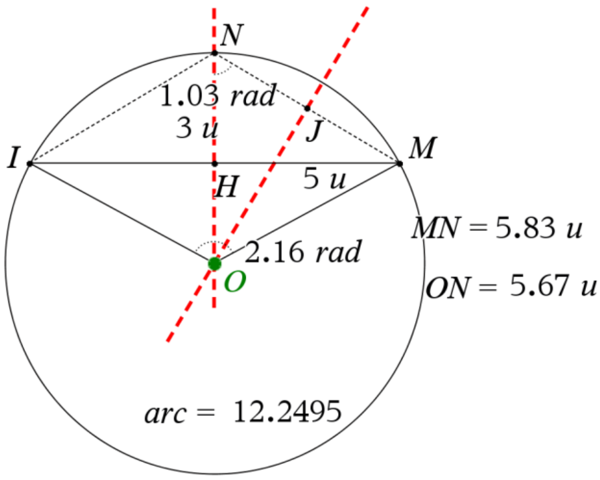
Nous savons que l'arc intercepté par un angle de mesure φ radians sur un cercle de rayon R a pour longueur le nombre $R\varphi$. Dans le présent contexte :

L'arc IM a pour longueur

$$R \times (2\pi - 4\theta) = \frac{17}{3} \times \left(2\pi - 4\arctan\frac{5}{3}\right)$$

L'arrondi à 0,01 près de cette longueur est 12,25 m

(résultat lu sur une calculatrice).



La figure montre quelques-uns des résultats utiles de cet exercice.

Problème 3 : La petite boule noire

1. Calcul de la valeur exacte de la longueur de la diagonale [*AG*] :

Référons-nous à la figure de l'énoncé.

L'arête (CG) du cube est une droite perpendiculaire au plan (ABC). Cette droite est perpendiculaire à toute droite de ce plan en particulier à la droite (AC).

Le triangle ACG est donc rectangle en G. Le segment [AG] en est l'hypoténuse et les côtés de l'angle droit sont [CG], une arête du cube de longueur 2, et [AC], diagonale de l'une des faces carrées de longueur $2\sqrt{2}$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans ce triangle rectangle ACG, nous obtenons :

$$AG^2 = CG^2 + AC^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 12$$

En conséquence, la valeur exacte de la longueur de la diagonale [AG] est :

$$AG = 2\sqrt{3}.$$

2. La petite boule noire est tangente, en deux points diamétralement opposés, à deux boules blanches de rayon 1 de centres respectifs A et G. La distance entre les centres de ces deux boules blanches est égale à la distance AG, soit à $2\sqrt{3}$.

Nous avons : distance AG = 2×(rayon d'une boule blanche) + (diamètre boule noire).
Autrement dit : $2\sqrt{3} = 2 \times 1 +$ (diamètre boule noire).

Le diamètre de la boule noire est donc égal à $2\sqrt{3} - 2$ et son rayon à $\sqrt{3} - 1$.

La boule noire a pour rayon $\sqrt{3} - 1$, soit 0,732 unité à 0,001 près.

Exercice 2 : Des pitons et des cordes

Partie 1

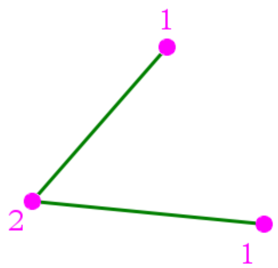
Remarquons préalablement qu'une corde ayant jusqu'à preuve du contraire deux bouts, il y a deux fois plus de bouts que de cordes et deux fois moins de cordes que de bouts …

1. Chaque corde ayant deux bouts, le nombre total de nœuds d'attache est nécessairement un nombre pair.

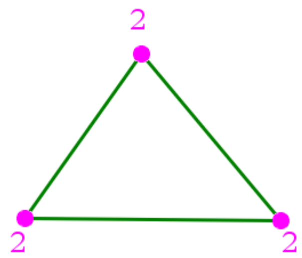
La somme 2 + 2 + 1 étant un nombre impair, le triplet (2, 2, 1) ne peut correspondre à aucun filet.

2. Avec trois pitons, on doit utiliser au moins deux cordes (car d'un piton on doit aller aux deux autres) et au plus trois cordes (si on relie tous les pitons deux à deux).

Il y a exactement deux sortes de filets possibles.



Un filet $(2,\ 1,\ 1)$



Un filet $(2,\ 2,\ 2)$

3.a. Soit un filet de *n* pitons. D'un piton donné, on doit pouvoir aller en suivant une ou plusieurs cordes à chacun des $(n-1)$ autres pitons, ce qui génère au moins $2 \times (n-1)$ bouts.

Il y a au moins $(n-1)$ cordes.

3.b. Nous obtenons le nombre maximal de cordes lorsque tous les *n* pitons sont reliés deux à deux.

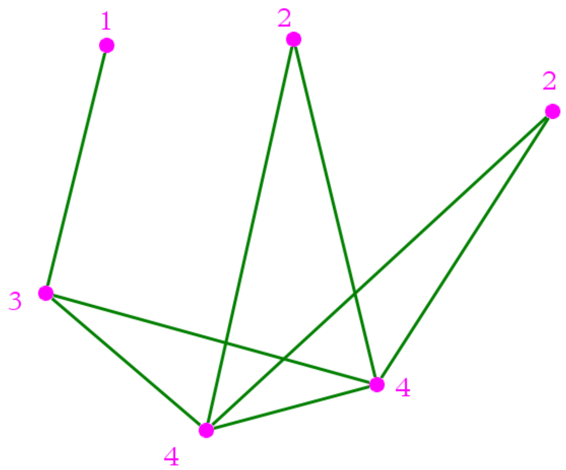
Or, on sait que le nombre de paires d'éléments dans un ensemble de *n* éléments est le nombre : $\binom{n}{2} = \frac{n\times(n-1)}{2}$ (coefficient binomial d'indices 2 et *n*).

Nous pouvons aussi justifier en remarquant que, de chacun des *n* pitons partent au plus $(n-1)$ cordes et dans le cas où tous les pitons sont reliés deux à deux, de chaque piton partent exactement $(n-1)$ cordes.

Il y a donc au plus $n \times (n-1)$ bouts de corde (et au plus deux fois moins de cordes ...).

Il y a au plus $\frac{n\times(n-1)}{2}$ cordes.

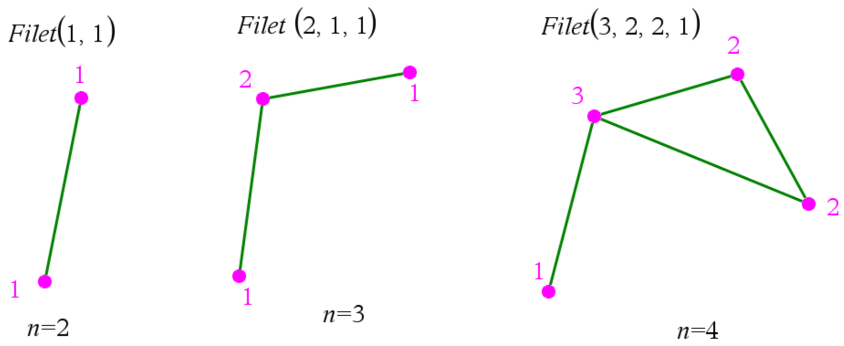
4. Ci-contre, un exemple de filet (4, 4, 3, 2, 2, 1) avec six pitons.



Partie 2

1.a, b et c.

Sur un même dessin, les trois filets demandés.



2. La « liste associée » à un ensemble de n pitons détermine une application de cet ensemble de n pitons vers l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, ensemble qui possède exactement un élément de moins que l'ensemble des pitons.

Si le filet est parfait, alors l'application ainsi déterminée par la « liste associée » est une application surjective. Chacun des éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ est l'image d'un piton au moins. Comme il y a exactement un piton de plus que le nombre d'éléments de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, un et un seul des éléments de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ est l'image de deux pitons.

Un filet parfait contient exactement deux pitons d'où partent le même nombre de cordes.

3. L'algorithme que nous proposons est le suivant :

Soit un filet parfait de n pitons et soit d_n le nombre de cordes commun aux deux pitons d'où partent le même nombre de cordes.

La liste associée à ce filet parfait est :

$(n-1, n-2, \dots, d_n+1, d_n, d_n, d_n-1, \dots, 1)$.

Ajoutons un piton de plus en reliant ce nouveau piton d'une part à l'un des deux pitons d'où partent le même nombre de cordes et d'autre part aux pitons d'où partent un nombre de cordes strictement supérieur à d_n .

(Il y a donc à $(n-d_n)$ pitons auxquels ce nouveau piton est relié et d_n pitons auxquels il n'est pas relié).

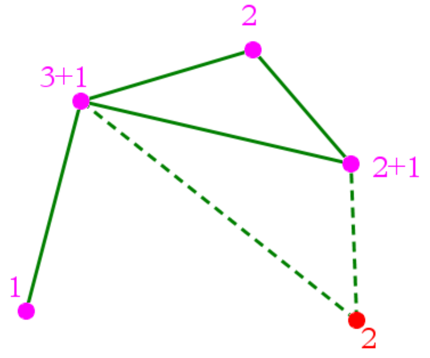
La liste associée à ce filet, nouveau piton excepté, devient $(n, n-1, \dots, d_n+1, d_n, d_n-1, \dots, 1)$. Cette liste décrit une fois et une seule chacun tous les entiers de 1 à n.

Quant au nouveau piton, le nombre de cordes qui en partent est égal à $(n-d_n)$. C'est la valeur prise deux fois.

Nous obtenons la formule de récurrence : $d_{n+1} = n - d_n$

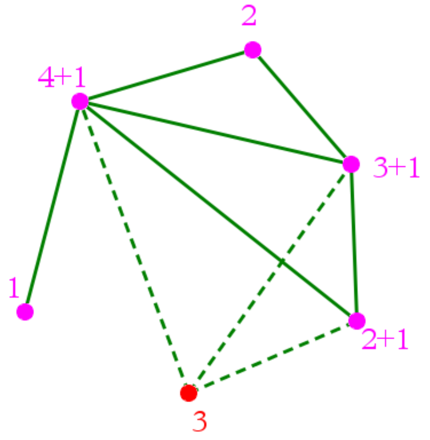
Ci-contre, les passages de 4 à 5 pitons puis de 5 à 6 pitons.

Filet $(4, 3, 2, 2, 1)$



De $n = 4$ *à* $n = 5$

Filet $(5, 4, 3, 3, 2, 1)$



De $n = 5$ *à* $n = 6$

4. Explicitons la valeur de d_n introduite dans la question précédente.

L'examen des premiers schémas montre que : $d_2 = d_3 = 1$; $d_4 = d_5 = 2$; $d_6 = 3$.

Ce qui nous amène à conjecturer que peut-être $d_{2p} = d_{2p+1} = p$ pour tout entier p au moins égal à 1.

Montrons par récurrence cette propriété, ainsi initialisée, en prouvant son hérédité.

Supposons que pour un certain entier $p \geq 1$, la propriété $d_{2p} = d_{2p+1} = p$ soit vérifiée.

D'après la formule de récurrence énoncée à la question précédente :

$$\begin{cases} d_{2p+2} = (2p+1) - d_{2p+1} = 2p + 1 - p = p + 1 \\ d_{2p+3} = (2p+2) - d_{2p+2} = 2p + 2 - (p+1) = p + 1 \end{cases}$$

Ainsi, si la propriété $d_{2p} = d_{2p+1} = p$ est vraie, alors il est vrai que $d_{2(p+1)} = d_{2(p+1)+1} = p + 1$.

La propriété $d_{2p} = d_{2p+1} = p$ est héréditaire.

Cette propriété est donc vraie pour tout entier p au moins égal à 1.

Déterminons maintenant a_n :

Le nombre total de cordes est égal à la somme $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ augmentée de la valeur de d_n.

Nous savons que $1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n \times (n-1)}{2}$.

Distinguons deux cas :

- Cas n pair, $n = 2p$: $a_{2p} = \frac{2p \times (2p-1)}{2} + p = 2p^2$. Autrement dit, $a_n = \frac{n^2}{2}$.
- Cas n impair, $n = 2p + 1$: $a_{2p+1} = \frac{2p \times (2p+1)}{2} + p = 2p \times (p+1)$. Autrement dit, $a_n = \frac{n^2 - 1}{2}$.

Complétons le tableau des valeurs de a_n pour n allant de 2 à 11 :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	2	4	8	12	18	24	32	40	50	60

Exercice 3 : Distance sur un quadrillage

Partie 1

1. Rapportons le plan à un repère d'origine E_1 dans lequel le point E_2 a pour coordonnées (8 ; 4).

Soit A (x, y) la position de l'appartement dans ce repère. L'un au moins des nombres x et y est un entier (l'appartement est censé donner sur une rue au moins).

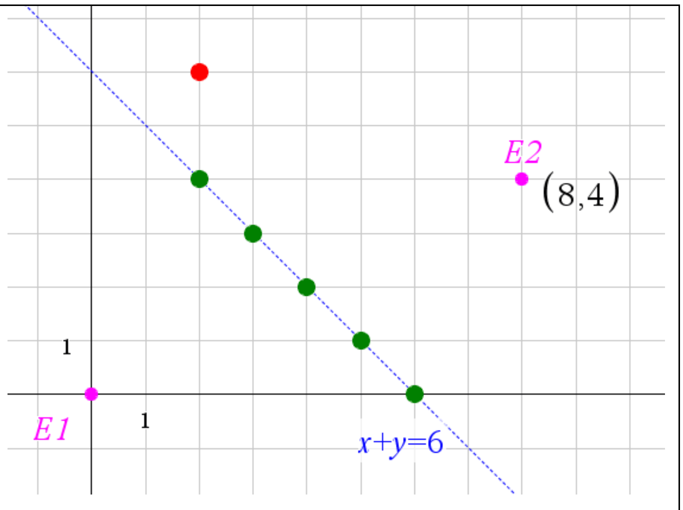
Nous allons supposer (*ce qui est une certaine interprétation de l'énoncé et un ajout d'hypothèse, nous sommes clairement en infraction mais nous assumons* ...) que le couple cherche un appartement dans le « quartier » tel que $0 \leq x \leq 8$ et $0 \leq y \leq 4$. Alors :

- La distance la plus courte de A à E_1 en suivant le réseau quadrillé est égale à $x + y$.
- La distance la plus courte de A à E_2 en suivant le réseau quadrillé est égale à $(8 - x) + (4 - y)$.

(Distances exprimées en centaines de mètres).

Il y a équidistance de A aux points E_1 et E_2 lorsque $(8 - x) + (4 - y) = x + y$ soit lorsque $2x + 2y = 12$, autrement dit lorsque $x + y = 6$.

Nous obtenons cinq points de coordonnées respectives (2, 4) ; (3, 3) ; (4, 2) ; (5, 1) ; (6, 0) équidistants des points E_1 et E_2 figurés en vert sur le dessin.



NB. Selon la façon d'interpréter l'énoncé, nous pourrions trouver d'autres points en dehors du « quartier ». Par exemple, le point rouge (2 ; 6) *est à la distance 8 de chacune des entreprises. Mais, en dehors du « quartier », l'expression des distances en fonction de x et de y changerait suivant la position dans le plan du logement, il faudrait entamer une discussion. Nous pensons qu'en question inaugurale de l'exercice, il n'y a pas lieu d'entrer outre mesure dans ces considérations.*

2.a. Orientons le schéma selon les quatre points cardinaux. Le point E_2 étant au Nord-Est de E_1, les chemins les plus courts de E_1 à E_2 sont obtenus lorsque ils sont constitués uniquement de tronçons en direction du Nord ou en direction de l'Est. Ces chemins les plus courts ont pour longueur 1200 mètres.

La distance la plus courte de E_1 à E_2 est égale à 1200 mètres.

2.b. Les chemins les plus courts entre les deux points ont pour longueur un nombre pair de centaines de mètres puisque leur longueur est égale à 1200 mètres.

Pour aller autrement de E_1 à E_2, tout parcours de rue vers le Sud (respectivement vers l'Ouest) induira un autre parcours de rue compensatoire en sens inverse vers le Nord (respectivement vers l'Est) de même longueur.
Tout chemin de E_1 à E_2 a donc nécessairement pour longueur un nombre pair de centaines de mètres.
Or, une longueur égale à 1900 mètres représente un nombre impair de centaines de mètres.

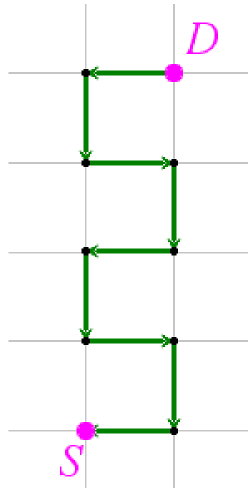
Il n'existe pas de chemin de 1900 mètres qui va de E_1 à E_2.

Partie 2

1.a. Les trajets les plus courts de D à S ont pour longueur 500 et s'orientent vers le Sud-Ouest.
On note que pour un trajet confiné dans ce rectangle de diagonale $[SD]$, on ne peut pas passer deux fois par le même carrefour.

Pour obtenir le trajet le plus long, il s'agit d'effectuer le plus possible de zigzags, nécessairement vers l'Est (vers le Nord, on ne peut pas compenser sous peine de parcourir deux fois une même rue).

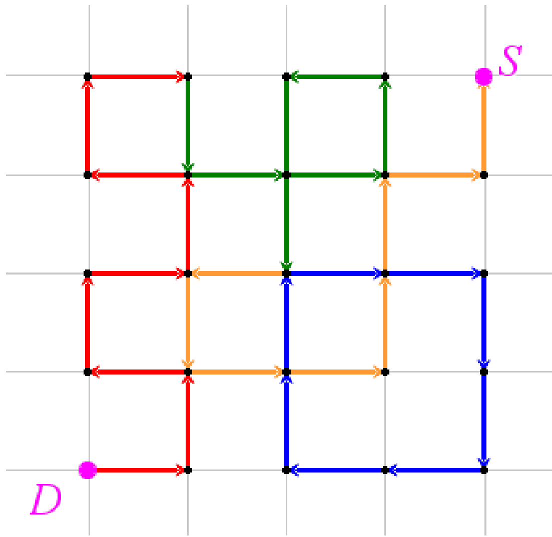
Chose que réalise le trajet ci-contre. Il ne peut en effet y avoir de trajet plus long car nous épuisons dans ce trajet toutes les possibilités d'orientation à contre-sens vers l'Est (deux possibles).



La longueur du trajet le plus long de D à S est égale à 900 mètres.

1.b. Les trajets les plus courts de D à S ont pour longueur 800 mètres et s'orientent vers le Nord-Est.

Pour obtenir un trajet de 3200 mètres, c'est-à-dire 2400 mètres de plus, nous devons prévoir 12 tronçons orientés à contre-sens, soit vers le Sud soit vers l'Ouest. En tout, nous devons parcourir 32 segments de 100 mètres entre deux carrefours consécutifs sur 40 possibles. Nous proposons empiriquement le trajet ci-contre : le trajet rouge (900 mètres) suivi du trajet vert (700 mètres) suivi du trajet bleu (800 mètres) suivi du trajet orange (800 mètres) ce qui fait bien un total de 3200 mètres.



2. Nous avons cherché un parcours permettant de « visiter » les deux sommets du rectangle autres que S et D.

Chacun des parcours rouge, vert, magenta, bleu a pour longueur 1000 mètres, tandis que le parcours orange a pour longueur 2100 mètres.

Nous parvenons empiriquement à une longueur totale de 6100 mètres.