OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE POITIERS
2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

CORRECTION OLYMPIADES

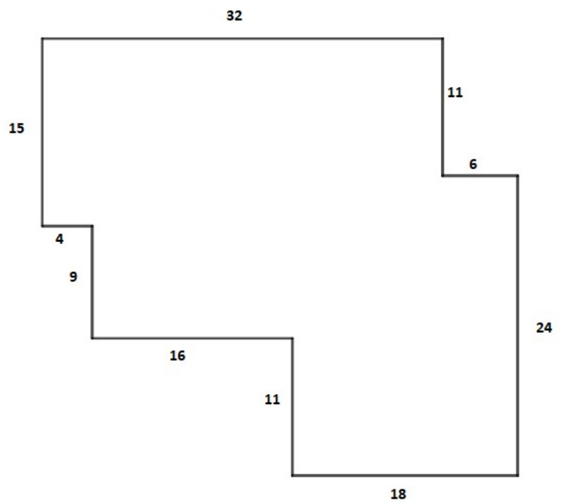
EXERCICES ACADÉMIQUES

POITIERS 2021

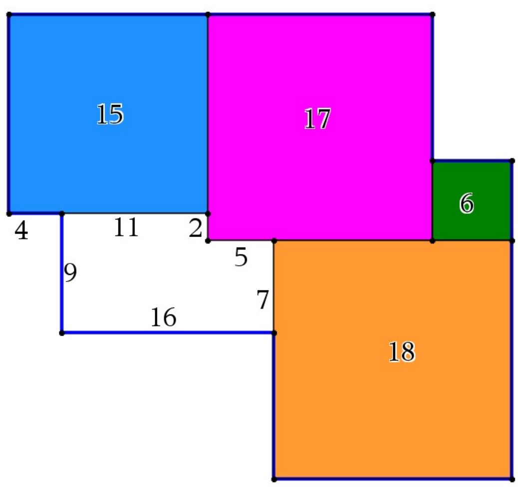
Exercice 1 : Trois problèmes indépendants

Problème 1 : carré de carrés

Voici une solution empirique de ce problème.



Le « morceau central » se présente sous la forme d'un polygone à dix côtés que l'on peut inscrire dans un rectangle de format 38×35. Ci-contre, on a marqué les mesures des différents côtés de ce polygone.



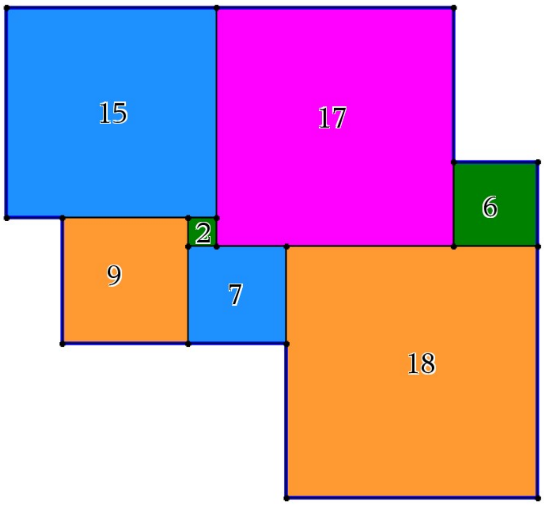
Avec quatre carrés, on arrive à recouvrir une partie du « morceau central », laissant à découvert un polygone n'ayant plus que six côtés.

Les mesures de ces six côtés sont 11, 9, 16, 7, 5 et 2, et on remarque entre ces nombres des relations « intéressantes », telles que :

$11 = 9 + 2$; $16 = 9 + 7$; $5 + 2 = 7$ ...

De ce fait, des carrés de côtés 9, 7 et 2 finissent le recouvrement.

Il existe une solution permettant de recouvrir le « morceau central » avec sept carrés.



Problème 2 : persistance et terminaison additives

1. Remarquons préalablement que les entiers 10, 11, ..., 18 ont tous une persistance additive égale à 1 car la somme de leurs deux chiffres est comprise, au sens large, entre 1 et 9. Ensuite, l'entier 19 est le plus petit entier dont la persistance additive est égale à 2. Tous les entiers qui s'écrivent avec deux chiffres ont une persistance additive égale à 1 ou bien à 2 car la somme de leurs chiffres est inférieure ou égale à 18 (l'entier 99 ayant la plus grande somme des chiffres possible). Par exemple, les entiers de 20 à 27 ou de 30 à 36 ont une persistance additive égale à 1, tandis que 28, 29, 37, 38 et 39 ont une persistance additive égale à 2.

1.a. Pour proposer un exemple d'entier dont la persistance additive est égale à 3, on peut chercher un entier dont la somme des chiffres est égale à l'un des entiers de persistance additive 2 que l'on vient de citer.

Par exemple, la somme des chiffres de l'entier 199 est égale à 19. Puisque $pa(19) = 2$, nous pouvons affirmer que : $pa(199) = 3$.

199 est un exemple de nombre dont la persistance additive est égale à 3

(Il en est de même, notamment, de 289 ou de 388, ou de 991. Mais aussi de 6886 dont la somme des chiffres est égale à 28)

1.b. L'énoncé ne posant que la question « d'existence » d'un entier dont la persistance additive est égale à 4, il suffit de justifier cette existence, sans forcément exhiber un tel entier.

Choisissons l'un des entiers dont la persistance additive est égale à 3 et désignons par N_3 cet entier. Soit alors N_4 un entier dont la somme des chiffres est égale à N_3 (il en existe car l'entier N_3 est décomposable de nombreuses manières en somme d'entiers appartenant à $\{1, 2, ..., 9\}$). Puisque la somme des chiffres de l'entier N_4 a pour persistance additive 3, cet entier a pour persistance additive 4.

L'existence d'entiers de persistance additive 4 est prouvée.

1.c. L'entier N_4 ayant pour persistance additive 4, soit N_5 un entier dont la somme des chiffres est égale à N_4 (il en existe car N_4 est décomposable de nombreuses manières en somme d'entiers appartenant à $\{1, 2, ..., 9\}$). La somme des chiffres de l'entier N_5 ayant pour persistance additive 4, cet entier N_5 a pour persistance additive 5.

L'existence d'entiers de persistance additive 5 est prouvée.

NB. La résolution de cette question est terminée, voici cependant pour information un exemple d'entier de persistance 4 et la façon d'en construire un de persistance 5 :

Choisissons : $N_3 = 991$, dont la persistance additive est égale à 3 et remarquons que : $N_3 = 9 \times 110 + 1$.

Considérons l'entier N_4 qui s'écrit $\underbrace{999..................991}_{(110 \textit{ fois le chiffre } 9)}$, soit : $N_4 = 90 \times \left(1 + 10 + ... + 10^{109}\right) + 1 = 10^{111} - 9$.

Cet entier, par construction, a pour somme des chiffres $9 \times 110 + 1$ c'est-à-dire l'entier N_3. Donc, la persistance additive de N_4 est égale à 4.

Remarquons que : $N_4 = 9 \times \left(\underbrace{111..................110}_{(110 \textit{ fois le chiffre } 1)}\right) + 1$ et soit A_4 l'entier qui s'écrit $\underbrace{111..................110}_{(110 \textit{ fois le chiffre } 1)}$.

Considérons alors l'entier N_5 qui s'écrit $\underbrace{999..................991}_{(A_4 \textit{ fois le chiffre } 9)}$ (autrement dit, son chiffre des unités est le chiffre 1, et à partir du chiffre des dizaines, on répète A_4 fois le chiffre 9).

Par construction, cet entier N_5 a pour somme des chiffres $9 \times A_4 + 1$ c'est-à-dire l'entier N_4. Donc, la persistance additive de cet entier N_5 est égale à 5.

2. Remarquons que les entiers 91, 92, ..., 99 ont tous une terminaison additive égale à leur chiffre des unités. En effet, leurs sommes des chiffres sont égales, respectivement, à 10, 11, ...18 et la somme des chiffres de ces entiers sont égales, respectivement, à 1, 2, ..., 9 c'est-à-dire précisément le chiffre des unités du nombre initial.

L'entier 91 est le plus petit d'entre eux. Y en a-t-il un, ayant la même propriété, qui soit plus petit que 91 ?

S'il existe, cet entier *N*, au moins égal à 10, s'écrit en numération décimale avec deux chiffres : $\overline{du}$ et nous avons : $N = 10d + u$

Concernant la somme de ses chiffres, nous pouvons écrire la double inégalité : $0 \le u < d + u \le 18$ puisque *d* et *u* sont deux chiffres de la numération décimale et que $d \ge 1$.

Cet entier *N* ne peut être un entier de persistance additive 1, car sa somme des chiffres est $d + u > u$.

Nécessairement, si cet entier *N* existe, il a pour persistance additive 2 et : $10 \le d + u \le 18$
Posons : $d + u = 10 + v$ avec, compte tenu de la double inégalité précédente : $0 \le v \le 8$

L' entier $d + u$ s'écrit $\overline{1v}$ en numération décimale et sa somme des chiffres est $v + 1$.

Pour que la terminaison additive soit égale à *u*, il faut que soit vérifiée la relation : $v + 1 = u$.

Donc : $d + (v + 1) = 10 + v$ ce qui implique que, nécessairement : $d = 9$ et ensuite, la relation $v + 1 = u$ implique que le chiffre *u* est au moins le chiffre 1. Nous retrouvons comme nombres convenables et s'écrivant avec deux chiffres les entiers de 91 à 99, et ce sont les seuls.

Nous avons démontré qu'il n'existe pas d'entier plus petit que 91 dont la terminaison additive soit égale au chiffre de ses unités.

L'entier 91 est donc le plus petit de tous les entiers qui vérifient cette propriété.

Complément (hors énoncé) : le coin Python

Il est possible de rédiger des programmes Python qui permettent d'automatiser certaines actions vues au cours de ce problème. Nous en proposons deux :

Le premier algorithme **somchif** est fondé sur celui des divisions successives d'un entier n par 10. C'est la « fonction f » de l'énoncé.
 	
L'opération « **n//10** » calcule le quotient de la division euclidienne de n par 10, et l'opération « **n%10** » calcule le reste de cette même division.
 	
La fonction « **somchif** » renvoie la somme des chiffres de l'entier n auquel elle s'applique. Elle est testée pour quelques valeurs de n.
	`>>> def somchif(n):`
	`        r=n%10`
	`        while n>9:`
	`                n=n//10`
	`                r=n%10+r`
	`        return r`
	
	`>>> somchif(86)`
	`14`
	`>>> somchif(19)`
	`10`
	`>>> somchif(199)`
	`19`

Le programme **persister** a pour argument un entier n et renvoie, dans cet ordre, la persistance additive ainsi que la terminaison additive de cet entier.
 	
L'exécution de ce programme pour certaines valeurs de n permet de vérifier quelques uns des résultats que nous avons obtenus.
	`>>> def persister(n):`
	`        p=0`
	`        while n>9:`
	`                p=p+1`
	`                n=somchif(n)`
	`        return [p,n]`
	
	`>>> persister(86)`
	`[2, 5]`
	`>>> persister(199)`
	`[3, 1]`
	`>>> persister(991)`
	`[3, 1]`
	`>>> persister(10**111-9)`
	`[4, 1]`

Un deuxième exemple d'entier dont la persistance additive est égale à 4, plus petit que le premier exemple.
On vérifie que la somme des chiffres de cet entier est égale à 199 dont la persistance additive est 3.
	`>>> n4=2*10**22-1`
	`>>> persister(n4)`
	`[4, 1]`
	`>>> n4`
	`19999999999999999999999`
	`>>> somchif(n4)`
	`199`

Problème 3 : de tubes en tubes

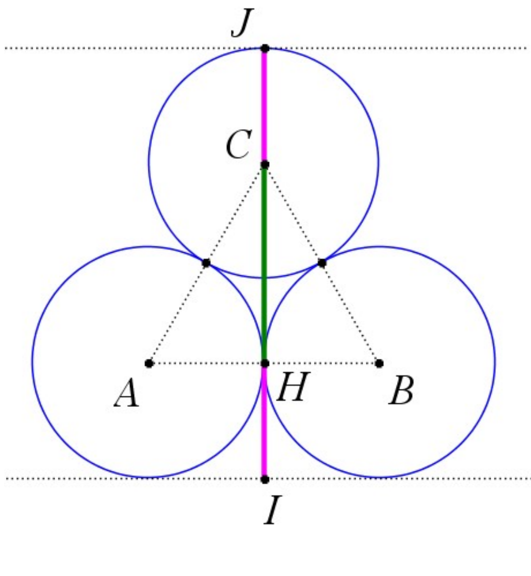
Désignons par r le rayon d'un tube.

Une « figure de référence »

Lorsqu'on considère trois tubes superposés (un étage), la hauteur de l'empilage est sur la figure ci-contre la distance IJ et l'on a : $IJ = JC + CH + HI$. Or, CH est la hauteur d'un triangle équilatéral de côté $2r$, c'est-à-dire que : $CH = (2r) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$.

D'autre part : $JC = HI = r$.

Par conséquent : $IJ = 2r + r\sqrt{3} = r\left(2+\sqrt{3}\right)$; il s'agit là de la hauteur d'une pyramide à un étage.

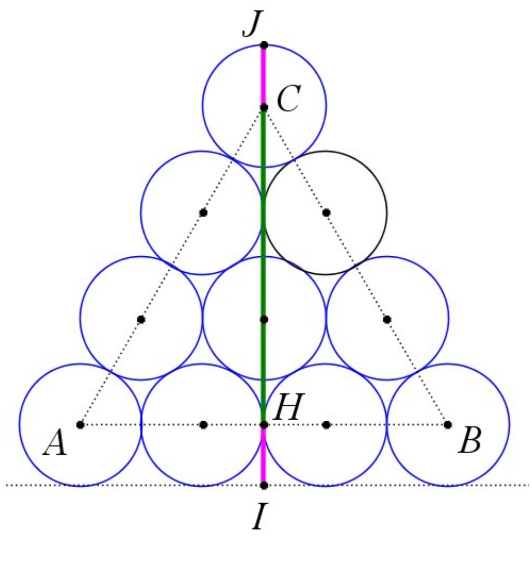


1. Considérons maintenant l'empilage à trois étages objet de la **question 1.** La hauteur de l'empilage est sur la figure ci-contre la distance IJ et l'on a : $IJ = JC + CH + HI$.

Or, CH est maintenant la hauteur d'un triangle équilatéral de côté $6r$, c'est-à-dire que : $CH = (6r) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3r\sqrt{3}$.

D'autre part : $JC = HI = r$.

Par conséquent : $IJ = 2r + 3r\sqrt{3} = r\left(2+3\sqrt{3}\right)$



Sachant que les tubes ont pour diamètre 3 cm, le rayon de chaque tube est : $r = \frac{3}{2}$

La valeur exacte de la hauteur de la pyramide de tubes, exprimée en centimètres, est donc égale à $\frac{3}{2} \times \left(2+3\sqrt{3}\right)$ soit : $3 + \frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm.

Le millimètre nous paraît cependant plus intéressant comme choix d'unité : La valeur exacte de la hauteur de la pyramide de tubes, exprimée en millimètres, est égale à $30 + 45\sqrt{3}$ millimètres. Une calculatrice nous indique que : $107{,}9 < 30 + 45\sqrt{3} < 108$. Par conséquent l'arrondi à 10^{-1} près de la hauteur de l'empilage, exprimée en millimètres, est 108.

Une valeur approchée au millimètre près de la hauteur de la pyramide de tubes est 108 millimètres.

2. De façon plus générale, si la pyramide est constituée de n étages de tubes, le triangle ABC semblable à ceux que l'on a utilisés ci-dessus est un triangle équilatéral de côté $n\times(2r)$. La longueur CH est alors la hauteur d'un triangle équilatéral de côté $2nr$, c'est-à-dire que désormais : $CH=(2nr)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=nr\sqrt{3}$.

La hauteur de la pyramide s'exprime en fonction de r et de n par : $IJ=2r+nr\sqrt{3}=r\left(2+n\sqrt{3}\right)$.

Compte tenu que dans ce contexte le rayon des tubes est égal à 15 millimètres, la hauteur de la pyramide, exprimée en millimètres, est : $15\times\left(2+n\sqrt{3}\right)$ soit : $30+n\times15\sqrt{3}$.

Nous devons déterminer quel est le plus petit entier n vérifiant : $30+n\times15\sqrt{3}\geq2021$, c'est-à-dire vérifiant : $n\geq\frac{1991}{15\sqrt{3}}$

Une calculatrice nous indique que : $76{,}6<\frac{1991}{15\sqrt{3}}<76{,}7$, c'est-à-dire que le plus petit entier supérieur à $\frac{1991}{15\sqrt{3}}$ est l'entier 77.

Il faut une pyramide de 77 étages pour dépasser une hauteur de 2021 millimètres.

Pour construire cette pyramide, chaque couche de tubes possède un tube de moins que la couche sur laquelle elle repose. Pour que l'étage numéro 77 possède un seul tube, il faut que la couche posée sur le sol (le « rez-de-chaussée », numéro 0), en possède 78.

Le nombre de tubes nécessaires, au minimum, est : $1+2+...+78=\frac{78\times79}{2}=3081$

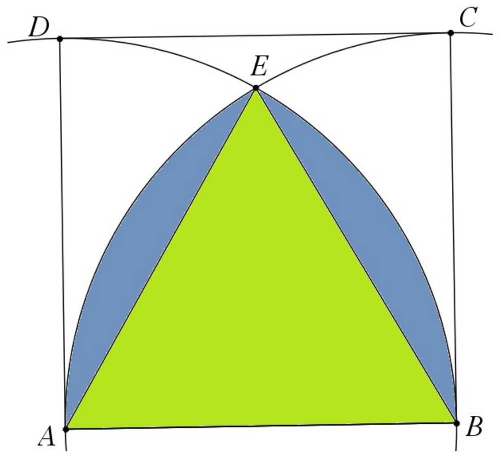
Exercice 2 : La fête annuelle des mathématiques

<table>
<tr>
<td>

1. Désignons par a le côté du carré.

Codons la figure comme il est indiqué ci-contre. L'écusson se présente comme la réunion d'un triangle équilatéral ABE de côté a (en vert sur la figure) et de deux régions du plan qui s'assimilent à des secteurs circulaires de rayon a et d'angle au centre $\frac{\pi}{3}$ (exprimé en radians) privés du triangle équilatéral délimité par leurs rayons et leur corde (régions en bleu sur la figure).

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Le triangle ABE étant équilatéral de côté a, sa hauteur est égale à $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ et son aire est :

$$S_{ABE} = \frac{1}{2} \times a \times \left(a\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

On sait d'autre part que l'aire d'un secteur circulaire de rayon a et d'angle au centre α (exprimé en radians) est égale à $a^2 \times \frac{\alpha}{2}$. En particulier, lorsque $\alpha = \frac{\pi}{3}$, l'aire du secteur circulaire est égale à : $a^2 \times \frac{\pi}{6}$

L'aire de chaque région coloriée en bleu sur la figure est donc égale à : $a^2 \times \frac{\pi}{6} - S_{ABE}$

On en déduit l'aire de toute la partie coloriée : $S_{ABE} + 2 \times \left(a^2 \times \frac{\pi}{6} - S_{ABE} \right) = a^2 \times \frac{\pi}{3} - S_{ABE} = a^2 \times \frac{\pi}{3} - a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

En conclusion, cette aire est égale à $a^2 \times \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

La plaque de bois ayant pour côté 50 cm, l'aire du blason est $2500 \times \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$. Une calculatrice nous indique que $1535,4 < 2500 \times \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) < 1535,5$. L'arrondi à l'unité est donc 1535.

Le blason a pour aire $2500 \times \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$ cm², soit 1535 cm² au cm² près.

2. Dans cette question, nous tiendrons compte d'une hypothèse qui n'est pas explicitement apparente dans l'énoncé mais qui y semble admise : nous supposerons que les deux poteaux sont parfaitement verticaux, ce qui est la moindre des qualités pour tout poteau qui se respecte.

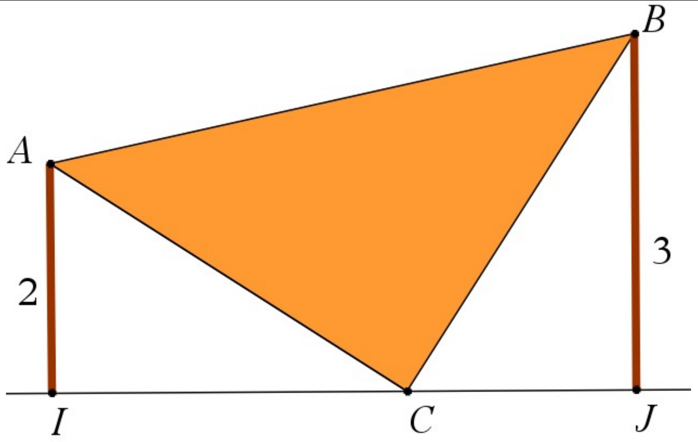
En conséquence, si nous désignons dans les deux cas de figure par I et par J les pieds des poteaux, la droite (IJ) étant marquée au sol, nous supposerons que les triangles ACI et BCJ sont rectangles en I et en J respectivement.

Il s'agit de déterminer quelle est la distance IJ.

Premier cas, *ABC* triangle rectangle-isocèle de sommet *C*

<table>
<tr>
<td>Les angles $\widehat{ACI}$ et $\widehat{CAI}$ sont complémentaires dans le triangle rectangle ACI.

Les angles $\widehat{BCJ}$ et $\widehat{CBJ}$ sont complémentaires dans le triangle rectangle BCJ.

L'angle $\widehat{ACB}$ étant un angle droit, les angles $\widehat{ACI}$ et $\widehat{BCJ}$ sont des angles complémentaires.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

On en déduit que $\widehat{ACI} = \widehat{CBJ}$ et $\widehat{CAI} = \widehat{BCJ}$. Les triangles rectangles ACI et CBJ ont des angles homologues deux à deux égaux, ce sont au moins des triangles semblables.

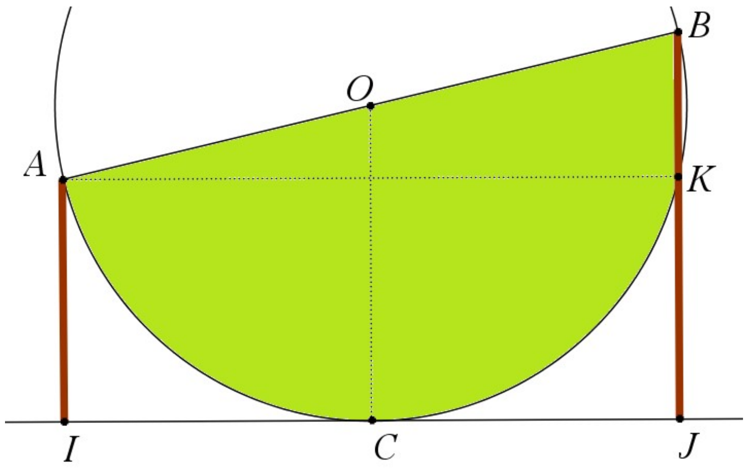
De plus, puisque ABC est isocèle en C : $AC = BC$. Les triangles ACI et BCJ ont des hypoténuses égales.
Ils sont donc isométriques.
En conséquence : $CI = BJ = 3$, $CJ = AI = 2$ et $IJ = IC + CJ = 5$.

Dans ce premier cas, l'écartement des poteaux est égal exactement à 5 mètres.

Deuxième cas, la banderole est un demi-disque de diamètre [AB].

Le point O est le centre du cercle de diamètre [AB]. On désigne par K la projection orthogonale de A sur la droite (BJ).

L'hypothèse « la banderole touche le sol en un unique point C » se traduit mathématiquement par le fait que la droite (IJ) est la tangente en C au cercle de diamètre [AB]. Ainsi, les droites (OC) et (IJ) sont des droites perpendiculaires.



La droite (OC) est donc parallèle aux bases (AI) et (BJ) du trapèze $AIJB$, et puisqu'elle passe par le milieu O du côté [AB], il s'agit exactement de la droite qui passe par les milieux des deux côtés non parallèles de ce trapèze : C est le milieu de [IJ].

Or on sait que, dans un trapèze, le segment qui joint les milieux des côtés non parallèles a pour longueur la demi-somme des longueurs des bases : $OC = \dfrac{AI + BJ}{2} = \dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

On en déduit que $AB = 2OC = 5$, le diamètre de la banderole est égal à 5.

Le quadrilatère $AIJK$ ayant trois angles droits, en I, J et K, c'est un rectangle. Donc : $AK = IJ$ et $AI = KJ = 2$.

Le triangle ABK est un triangle rectangle en K, on en connaît l'hypoténuse $AB = 5$, ainsi qu'un côté de l'angle droit, $BK = BJ - KJ = 1$. On peut appliquer dans ce triangle le théorème de Pythagore : $AB^2 = AK^2 + BK^2$ soit : $25 = AK^2 - 1$ et $AK^2 = 24$.

On obtient : $IJ = AK = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Une calculatrice indique que : $4{,}898 < 2\sqrt{6} < 4{,}899$; par conséquent l'arrondi de $2\sqrt{6}$ à 0,01 près est 4,90.

Dans ce deuxième cas, l'écartement des poteaux est égal à $2\sqrt{6}$ mètres exactement, soit 4,90 mètres au centimètre prés.