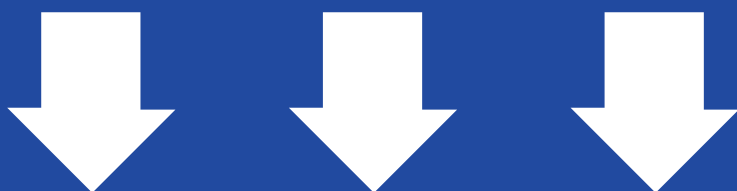


[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE PARIS  
2023



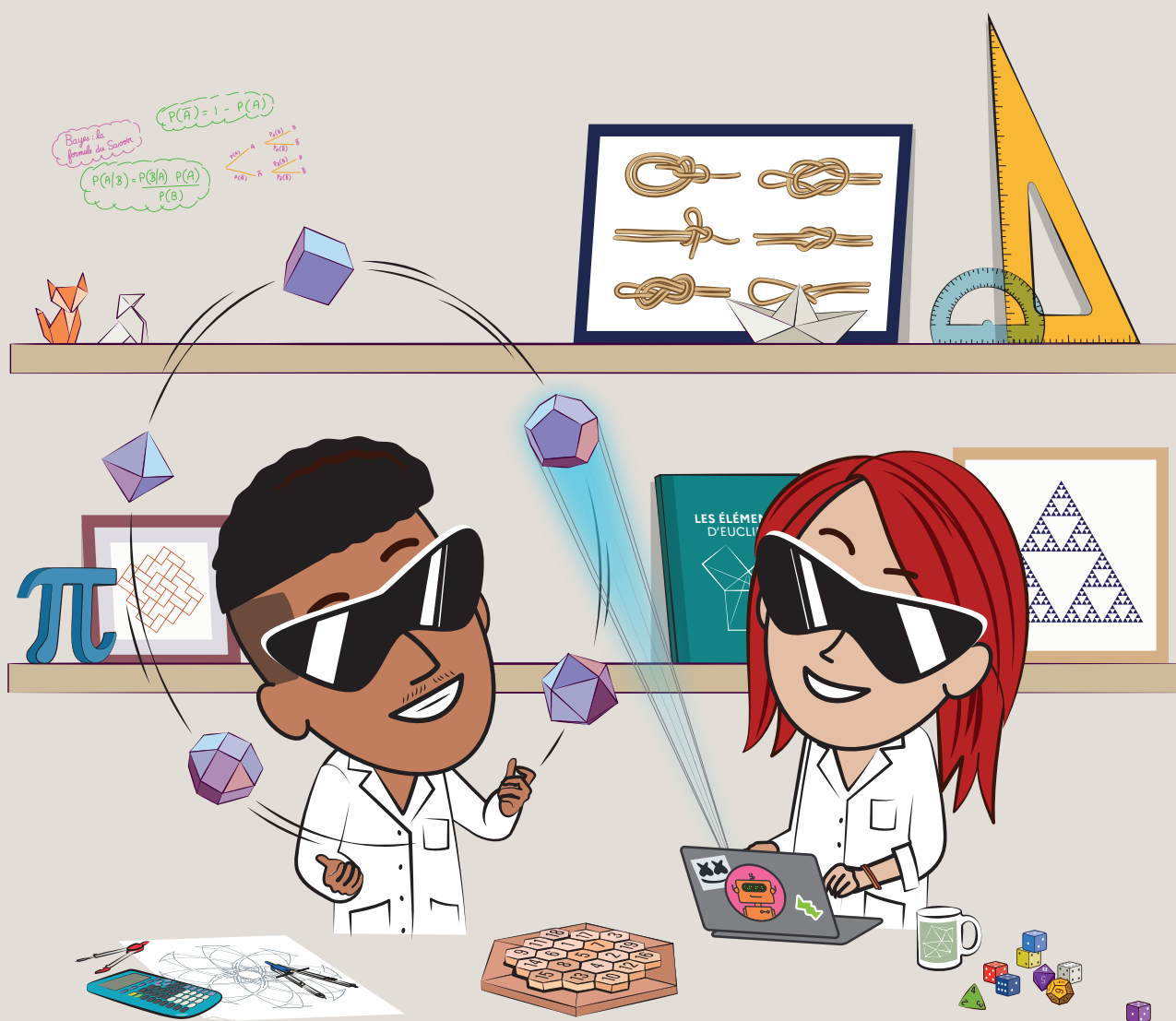
**SUJET** DE L'ÉPREUVE



MINISTÈRE  
DE L'ÉDUCATION  
NATIONALE  
ET DE LA JEUNESSE

Liberté  
Égalité  
Fraternité

# OLYMPIADES NATIONALES 2023 DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.  
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4),  
selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).  
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

Au terme de l'article L. 114-5 du Code du sport, le terme Olympiade, marque d'usage notoire, ne peut être reproduit sans l'autorisation du Comité national olympique et sportif français, titulaire des droits afférents.





**MINISTÈRE  
DE L'ÉDUCATION  
NATIONALE,  
DE LA JEUNESSE  
ET DES SPORTS**

*Liberté  
Égalité  
Fraternité*



**ACADÉMIE  
DE PARIS**

*Liberté  
Égalité  
Fraternité*

## Olympiades nationales de mathématiques 2023

### *Exercices académiques - Académie de Paris*

La partie académique se déroule en deux heures.

Les candidats traitent par équipe les deux exercices. Chaque équipe éventuellement constituée rend une seule copie.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.



**WOLFRAM**  
COMPUTATION MEETS KNOWLEDGE

**Exercice 1****DEUX NOUVELLES OPERATIONS**

On définit deux nouvelles opérations d'addition et de multiplication dans l'ensemble  $\mathbf{R}$  des nombres réels, de la manière suivante : on pose pour tous réels  $x$  et  $y$ ,

$$x \oplus y = x + y - 1$$

et

$$x \otimes y = xy - x - y + 2.$$

**Partie 1 : quelques calculs avec les nouvelles opérations**

- Vérifier que  $3 \otimes 4 = 7$ , puis calculer  $5 \otimes 6$ .
- Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'équation  $x \oplus 7 = 11$ .
- Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'équation  $x \otimes 8 = 13$ .
- Vérifier que pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $x \otimes y = (x - 1)(y - 1) + 1$ .
- Trouver deux réels  $x$  et  $y$  vérifiant le système de deux équations :

$$\begin{cases} x \oplus y = 5 \\ x \otimes y = 1 \end{cases}$$

**Partie 2 : des propriétés algébriques des nouvelles opérations**

- Vérifier que pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $x \oplus y = y \oplus x$  et  $x \otimes y = y \otimes x$ .
- Vérifier, en justifiant avec soin, que pour tous les réels  $x$ ,  $y$  et  $z$ ,  $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$  et  $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$ .  
Par la suite, on pourra donc noter que pour tous réels  $x$ ,  $y$  et  $z$ ,  
 $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus y \oplus z$   
 $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes y \otimes z$
- Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $x \oplus 1 = 1 \oplus x = x$  et  $x \otimes 2 = 2 \otimes x = x$ .
- Vérifier que pour tout réel  $x$ , il existe un unique réel  $y$  tel que  $x \oplus y = y \oplus x = 1$ .
- Vérifier que pour tout réel  $x$  tel que  $x \neq 1$ , il existe un unique réel  $y$  tel que  $x \otimes y = y \otimes x = 2$ .

**Partie 3 : un peu d'algorithmique en langage Python**

On propose la fonction Python ci-dessous.

```
def suite(x,n):
    z=n*x-n-x+2
    t=2
    for i in range(n):
        t=t*x-t-x+2
    return(z,t)
```

Que renvoie *suite(7,3)* ? Exprimer ces valeurs à l'aide des nouvelles opérations le plus simplement possible.

**Partie 4 : nouvelles opérations et relation d'ordre**

- Vérifier que pour tous réels  $x$ ,  $y$  et  $z$ ,  $x \geq y$  si et seulement si  $x \oplus z \geq y \oplus z$ .
- Vérifier que pour tous réels  $x$ ,  $y$  et  $z$ , si  $x \geq y$  et  $z \geq 1$ , alors  $x \otimes z \geq y \otimes z$ .
- Vérifier que pour tous réels  $x$  et  $a$  tels que  $a > 1$ , il existe un entier naturel  $n$  tel que  $n \otimes a \geq x$ .

**Partie 5 : divisibilité et nombres premiers avec la nouvelle multiplication**

On définit une relation de divisibilité au sens de la multiplication  $\otimes$  sur l'ensemble des nombres entiers supérieurs ou égaux à 1 ainsi : un nombre entier  $y$  est divisible par un nombre entier  $x$  supérieur ou égal à 1 au sens de la multiplication  $\otimes$  si et seulement s'il existe un nombre entier  $d$  supérieur ou égal à 1 tel que  $y = x \otimes d$ .

Un nombre entier supérieur ou égal à 1 est un nombre premier au sens de la multiplication  $\otimes$  si et seulement s'il admet exactement deux diviseurs distincts au sens de la multiplication  $\otimes$ , 2 et lui-même.

1. Vérifier que 76 est divisible par 26 au sens de la multiplication  $\otimes$ .
2. Déterminer tous les nombres premiers au sens de la multiplication  $\otimes$  inférieurs ou égaux à 10.
3. Déterminer, au sens de la multiplication  $\otimes$ , une décomposition de 46 et de 71 en produit de nombres premiers.

## Exercice 2

## LES BOUGIES DE LEONHARD

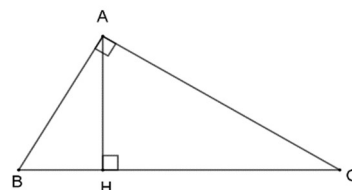
## Partie 1 : quelques résultats de géométrie

Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$  et  $H$  le projeté orthogonal du point  $A$  sur la droite  $(BC)$ .

1. En exprimant de deux façons différentes l'aire du triangle  $ABC$ , démontrer que :  $AB \times AC = AH \times BC$ .

2. En déduire que  $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$ .

Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser sans démonstration les résultats suivants :

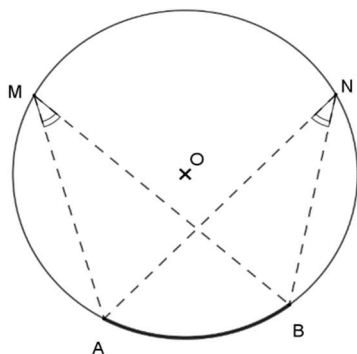


## Théorèmes de l'angle inscrit et de l'angle au centre

Deux angles inscrits qui interceptent le même arc de cercle ont la même mesure.

De plus, leur mesure est égale à la moitié de celle de l'angle au centre interceptant le même arc.

Exemple : sur la figure ci-dessous, les angles inscrits  $\widehat{AMB}$  et  $\widehat{ANB}$  interceptent le même arc de cercle d'extrémités  $A$  et  $B$  donc ils ont la même mesure et  $2\widehat{AMB} = \widehat{AOB}$ .



**Théorème** : Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan.

Si un point  $M$ , distinct des points  $A$  et  $B$ , appartient au cercle de diamètre  $[AB]$  alors le triangle  $AMB$  est rectangle en  $M$ .

## Partie 2

Leonhard est sur une plage à la tombée de la nuit. Il dispose de plusieurs bougies produisant toutes une lumière identique. Il dispose aussi d'un capteur électronique multidirectionnel permettant de mesurer l'intensité lumineuse. Il le règle de telle sorte que si une bougie se trouve à une distance de 1 mètre, alors le capteur affiche la valeur 1. Après plusieurs essais, il se rend compte que la valeur affichée par le capteur est inversement proportionnelle au carré de la distance séparant la bougie du capteur. Enfin, il constate que les intensités lumineuses s'additionnent. Par exemple, s'il place deux bougies à 1 mètre de distance du capteur, celui-ci affiche la valeur 2.

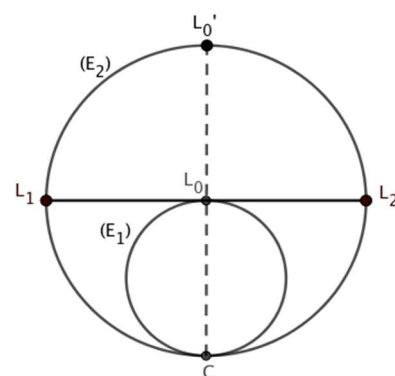
1. Leonhard place une bougie à une distance  $d$  du capteur. Démontrer que celui-ci affiche la valeur  $\frac{1}{d^2}$ .

2. Leonhard dispose sur la plage trois bougies  $L_1, L_2, L_3$  et son capteur  $C$  afin d'obtenir un carré  $CL_1L_2L_3$  de côté 1 mètre. Il note  $V$  la valeur indiquée par le capteur. Il souhaite remplacer ces trois bougies par une seule afin que le capteur indique la même valeur  $V$ . À quelle distance du capteur  $C$  Leonhard doit-il disposer sa nouvelle bougie ?

3. Leonhard procède alors à une autre expérience : il trace sur le sable un cercle  $(E_1)$  de circonférence 2 mètres, il y dispose son capteur  $C$  ainsi qu'une bougie  $L_0$  diamétralement opposée au capteur  $C$ .

a. Calculer la valeur affichée par le capteur dans ce cas. Donner la valeur exacte.

**b.** Il trace ensuite le cercle  $(E_2)$ , de centre  $L_0$  et de rayon  $[CL_0]$ . Il place sur ce nouveau cercle deux bougies  $L_1$  et  $L_2$  diamétralement opposées telles que  $(L_1L_2)$  soit perpendiculaire à  $(CL_0)$ . Il allume les bougies  $L_1$  et  $L_2$  puis, il éteint la bougie  $L_0$ . Quelle est la valeur affichée par le capteur  $C$  ?



**4.** On note  $L_{0'}$  le symétrique du point  $C$  par rapport au point  $L_0$ . Leonhard construit ensuite un nouveau cercle  $(E_3)$ , de centre  $L_{0'}$ , deux fois plus grand que le cercle  $(E_2)$ . La droite perpendiculaire à la droite  $(CL_1)$  et passant par  $L_1$  coupe le cercle  $(E_3)$  en deux points  $L_3$  et  $L_5$  et la droite perpendiculaire à la droite  $(CL_2)$  et passant par  $L_2$  coupe le cercle  $(E_3)$  en deux points  $L_4$  et  $L_6$ . Il détermine ainsi l'emplacement de quatre nouvelles bougies qui forment le quadrilatère non croisé  $L_3L_4L_5L_6$ .

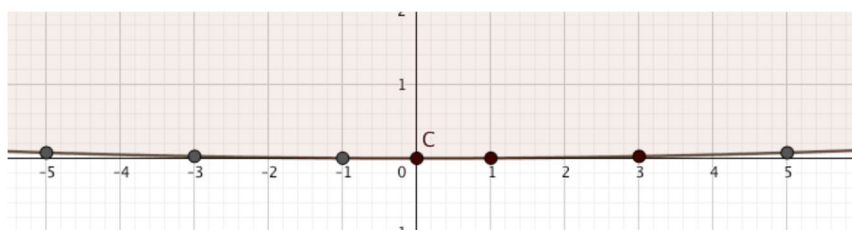
**a.** Montrer que le quadrilatère  $L_3L_4L_5L_6$  est un carré.

**b.** Leonhard allume les bougies  $L_3, L_4, L_5$  et  $L_6$  et éteint les bougies  $L_1$  et  $L_2$ . Montrer que le capteur affiche la même valeur que lorsque la bougie  $L_0$  était seule allumée.

**c.** Construire une réduction du carré  $L_3L_4L_5L_6$  en choisissant  $L_4L_6 = 4$  cm et construire le point  $C$  en expliquant la démarche.

**d.** En utilisant la méthode de Leonhard, compléter cette figure afin d'obtenir l'emplacement de huit nouvelles bougies donnant la même valeur sur le capteur que  $L_0$ . Démontrer que ces huit bougies forment un octogone régulier. Préciser la longueur de l'arc de cercle sur la plage joignant deux sommets consécutifs de cet octogone.

**5.** Il continue alors ce processus mais il doit cesser car la plage devient trop petite ! De retour chez lui, Leonhard écrit un programme lui permettant de visualiser les étapes qu'il n'a pas pu réaliser. Voici ce qu'il obtient lorsque le nombre de bougies devient très grand (le point  $C$  correspond à l'emplacement du capteur et les autres points  $\bullet$  représentent les bougies) :



Conjecturer, en expliquant la démarche et en utilisant ce qui précède, la valeur exacte de la limite de la somme  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .