OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE PARIS
2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

SUJET INDIVIDUEL

2021

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La première partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Nombre de diviseurs, somme des diviseurs d'un entier

On rappelle qu'un nombre entier m est un multiple d'un nombre entier d s'il existe un nombre entier q tel que $m = dq$. Dans ce cas, on dit aussi que d est un diviseur de m. Ce vocabulaire ne s'utilise que pour les nombres entiers. Dans la suite, on ne considérera que les diviseurs positifs d'un entier n.

1. Quels sont les diviseurs de 6 ? Quels sont les diviseurs de 101 ? Quels sont les diviseurs de 361 ? Quels sont les diviseurs de 2 021?
2. Quelle est la somme des diviseurs de 6? Quelle est la somme des diviseurs de 101 ? Quelle est la somme des diviseurs de 361 ? Quelle est la somme des diviseurs de 2 021 ?

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note $N(n)$ le nombre des diviseurs de n, et $S(n)$ la somme des diviseurs de n.
3. Pour chacun des nombres $6, 101, 361$, 2 021 vérifier l'inégalité :

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

4. À tout diviseur d d'un entier n non nul on associe l'entier q tel que $n = dq$. Si les diviseurs de n sont $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{N(n)-1}, n$, on note respectivement $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N(n)-1}, 1$ les nombres qui leur sont associés au sens défini ci-dessus.
a. Évaluer la somme $T(n) = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{N(n)-1} + n + q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_{N(n)-1} + 1$
b. Si a et b sont des nombres supérieurs ou égaux à 1, montrer que :

$$a + b \leq ab + 1$$

c. En déduire, pour des nombres d et q tels que $dq = n$, l'inégalité

$$d + q \leq n + 1$$

d. En déduire finalement que l'inégalité

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

est réalisée pour tout entier naturel n non nul.

5. ***a.*** Avec les notations employées ci-dessus, montrer que l'égalité

$$2S(n) = (n+1)N(n) \quad (*)$$

n'est réalisée que si, pour chacun des diviseurs d de n, l'égalité

$$d + q = n + 1$$

est réalisée.

b. En déduire que seuls 1 et les nombres premiers peuvent satisfaire l'égalité (*)

c. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Entiers $N-$ décomposables

On donne un entier N supérieur ou égal à 1.
On dit qu'un entier naturel k est N —décomposable s'il existe des entiers naturels q et r tels que :

$$(S) \quad \begin{cases} k = q + r \\ k^2 = qN + r \end{cases}$$

Par exemple, le nombre 5 est 21 —décomposable, puisque $\begin{cases} 5 = 1 + 4 \\ 5^2 = 1 \times 21 + 4 \end{cases}$, le nombre 28 est 64 —décomposable, puisque $\begin{cases} 28 = 12 + 16 \\ 28^2 = 12 \times 64 + 16 \end{cases}$.

A. Quelques exemples

1. ***a.*** Le nombre 7 est-il 22 —décomposable ? Est-il 10 —décomposable ?
b. Le nombre 45 est-il 100 —décomposable ?

2. ***a.*** Justifier qu'il y a exactement deux nombres 1 —décomposables.
b. Justifier qu'il y a exactement trois nombres 2 —décomposables.

3. Soit N un entier supérieur ou égal à 1.
a. Le nombre N est-il N —décomposable ?
b. Prouver que $N - 1$ est N —décomposable.
c. Prouver que si $N \geq 4$, alors 2 n'est pas N —décomposable.

B. Une étude des nombres N —décomposables

Soit N un entier supérieur ou égal à 1.
1. ***a.*** Prouver que si k est N —décomposable, alors $0 \leq k \leq N$.
b. Quels sont les entiers 3 —décomposables ? Quels sont les entiers 4 —décomposables ?

2. Prouver que si $N \geq 2$ et si k est N —décomposable, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers vérifiant le système (S).
3. ***a.*** Soit k un nombre N —décomposable. Justifier qu'il existe un entier q compris entre 1 et k tel que k soit solution de l'équation $x^2 - x - q(N-1) = 0$.
b. Prouver que, réciproquement, si k est un entier naturel et qu'il existe un entier q compris entre 1 et k tel que k soit solution de l'équation $x^2 - x - q(N-1) = 0$, alors k est N —décomposable.
c. Soit p un entier supérieur ou égal à 1. Prouver que le nombre $2^{p-1}(2^p - 1)$ est 2^{2p} —décomposable.

4. Prouver que si k est N —décomposable, alors $N - k$ est N —décomposable.

5. Dans cette question, on suppose que N est pair et que $N \geq 4$. Prouver que $\frac{N}{2}$ n'est pas N —décomposable.

6. Justifier que, pour tout $N \geq 3$, il y a un nombre pair d'entiers N —décomposables.

7. Dans cette question, on suppose que $N - 1$ est un nombre premier. Déterminer tous les entiers N —décomposables.

8. On donne un entier k supérieur ou égal à 2. Prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers N tels que k soit N —décomposable.

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Fractions et pyramides égyptiennes

Pour représenter des nombres rationnels, dans l'Egypte antique, les lettrés utilisaient des inverses de nombres entiers naturels, qu'on appelle *fractions égyptiennes* (par exemple $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{42}$ sont des fractions égyptiennes).

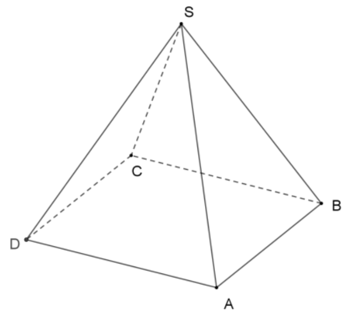
1. Déterminer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.
a. La somme de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.
b. Le produit de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.
c. Le quotient de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.

2. On souhaite écrire un nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1 comme somme de fractions égyptiennes de dénominateurs tous différents. On dit alors qu'on a effectué une *décomposition égyptienne* du nombre rationnel.
Par exemple,

- $x = \frac{9}{20}$ a pour décomposition égyptienne $x = \frac{9}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.
- $x = \frac{1}{8}$ est déjà une décomposition égyptienne.

On admet que tout nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1 admet une telle décomposition.
a. Donner deux décompositions égyptiennes de $\frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire sur l'unicité de la décomposition égyptienne d'un nombre rationnel x tel que $0 < x < 1$?
b. Donner une décomposition égyptienne de $\frac{2}{5}$ puis de $\frac{9}{10}$.

3. On appelle *pyramide égyptienne* une pyramide régulière à base carrée dont les faces sont des triangles isocèles, non équilatéraux, telle que :
- les longueurs des arêtes sont des fractions égyptiennes ;
- la somme des longueurs des arêtes de la pyramide est une fraction égyptienne.
a. Montrer que la pyramide régulière $SABCD$ à base carrée ci-contre, telle que $\mathrm{AB} = \frac{1}{30}$ et $\mathrm{SA} = \frac{1}{20}$, est une pyramide égyptienne



Dans la suite de cette question, on considère une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée de sommet S dont les faces latérales sont des triangles isocèles non équilatéraux et dont les longueurs AB et SA sont des *fractions égyptiennes*.
Il existe donc deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\mathrm{AB} = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{SA} = \frac{1}{q}$ et on suppose que $p > q$.
b. Justifier que si cette pyramide est une pyramide égyptienne alors $p \geq 4$ et $q \geq 4$.

c. Montrer que cette pyramide est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$.

d. En déduire que si p et q sont des nombres impairs, alors cette pyramide SABCD ne peut pas être une pyramide égyptienne.

SUJET PAR ÉQUIPES

2021

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

ACADÉMIE DE PARIS
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Exercices académiques - Académie de Paris

La partie académique se déroule en deux heures.

Les candidats traitent par équipe les deux exercices.

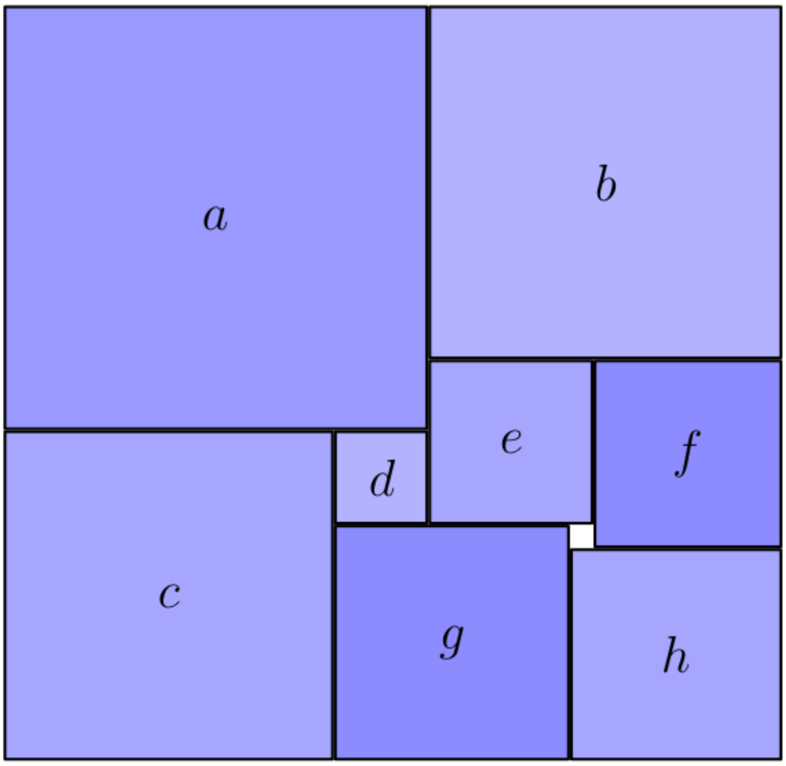
Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Chaque équipe éventuellement constituée rend une seule copie.

Exercice 1

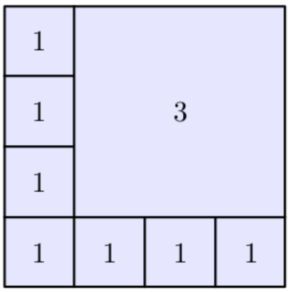
Quadrature du carré

1. On a découpé un rectangle en petits carrés. Le plus petit carré (blanc) a pour côté 1. Montrer que le rectangle ci-dessous, découpé en carrés, n'est pas un carré.

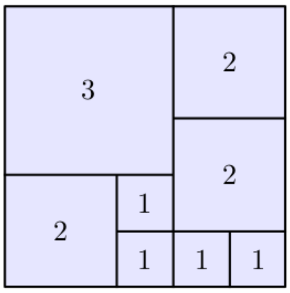


2. Le problème de **la quadrature du carré** consiste à découper un carré avec des carrés plus petits (mais pas forcément de la même taille). On souhaite de plus que **tous les côtés des carrés du découpage soient des nombres entiers** (les plus petits possibles). La **dimension de la quadrature** sera la taille du carré découpé.

   Par exemple : Voici deux découpages différents d'un carré en 8 carrés :



Quadrature de dimension 4.



Quadrature de dimension 5.

Est-il possible de découper un carré en 7 carrés plus petits (mais pas forcément de la même taille) ? en 6 carrés ? en 5 carrés ?

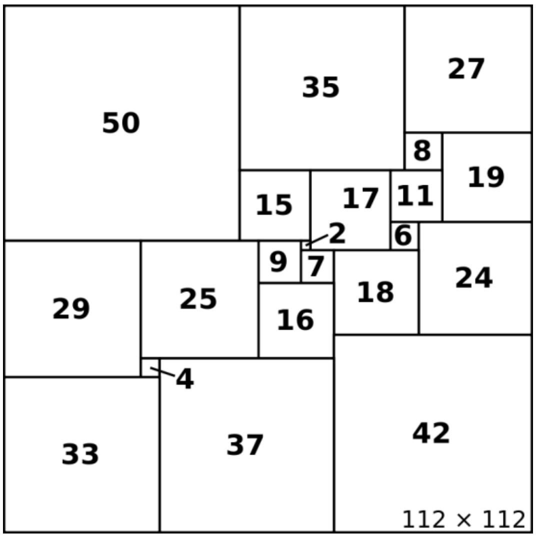
3. Montrer que si l'on peut découper un carré en ***n*** carrés alors il est possible de découper un carré en ***n+3*** carrés. La réciproque est-elle vraie ?

4. Représenter **quatre** partages différents d'un carré en 9 carrés et donner la dimension de chaque quadrature (deux partages constitués des mêmes carrés, mais placés différemment, sont considérés comme identiques).

5. **a)** Prouver qu'il est possible de découper un carré en 2021 carrés.

   b) En explicitant un partage en 2021 carrés, donner la dimension de cette quadrature.

6. On dit que le découpage est **parfait** quand les carrés sont tous de dimensions différentes.
   En 1939, R. Sprague (1894-1967) trouve un découpage parfait d'un carré en **55 carrés**. De plus, la dimension de cette quadrature est 4205.
   En 1978, A. Duijvestijn (1927-1998) a découvert un découpage parfait d'un carré en **21 carrés** (voir figure ci-dessous). De plus, la dimension de cette quadrature est 112.



   Il a été démontré depuis que l'on ne peut pas faire moins que 21.

   a) On suppose qu'il existe un découpage parfait d'un carré en ***n*** carrés et un découpage parfait d'un carré en ***m*** carrés. Démontrer que l'on peut construire un découpage parfait en ***n+m-1*** carrés.

   b) Prouver qu'il existe un découpage parfait d'un carré en 2021 carrés.

Exercice 2

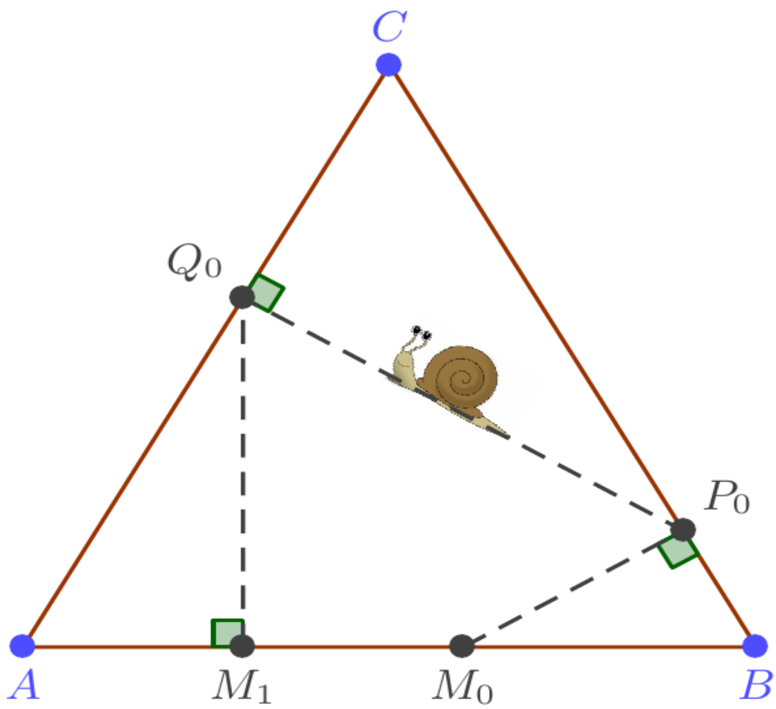
Les balades de Stan l'escargot

Stan l'escargot se déplace en ligne droite à l'intérieur d'une place qui a la forme d'un triangle équilatéral *ABC* de côté 10 mètres.

1. Le **lundi,** Stan part d'un point quelconque M_0 sur *[AB],* il se déplace parallèlement à *(AC)* pour atteindre *[BC]* en P_0, il repart parallèlement à *(AB)* pour atteindre *[AC]* en Q_0, puis il continue parallèlement à *(BC)* pour atteindre *[AB]* en M_1. En poursuivant ainsi, on construit ainsi une suite de points M_0 , M_1 , M_2 , …
a) Dans cette question, $AM_0 = 2$ mètres. Sur une figure (échelle 2 m $\leftrightarrow$ 1 cm), représenter les points M_0, M_1 et M_2 .
b) Si $AM_0 = x$ avec x dans [0;10], déterminer la longueur AM_{2021} .

2. Le **mardi**, Stan part du point M_0 sur *[AB]* tel que $AM_0 = 2$ mètres.
Il va atteindre *[BC]* en P_0 puis *[AC]* en Q_0 pour revenir en M_0 .
Un peu fatigué de son trajet de la veille, Stan souhaite faire un trajet **le plus court possible**.
Sans calcul, représenter le chemin de Stan (échelle 2 m $\leftrightarrow$ 1 cm).

3. Le **mercredi**, trouvant son trajet un peu monotone, Stan décide de modifier ses déplacements.
Il part d'un point M_0 sur *[AB]*. Il se dirige en ligne droite en suivant le plus court chemin vers *[BC]* pour atteindre P_0, puis vers *[AC]* pour atteindre Q_0 et revient sur *[AB]* en M_1.
En poursuivant ainsi, on construit ainsi une suite de points M_0 , M_1 , M_2 , …



a) Le trajet idéal de Stan serait de revenir à son point de départ après un tour, c'est-à-dire que le trajet idéal serait d'avoir $M_1 = M_0$.
Où doit-on placer le point M_0 (on notera *I* ce point M_0) pour que le trajet soit idéal ?
Que peut-on dire de ce trajet ?

b) Stan désire revenir à son point de départ après deux tours. Est-ce possible ?

c) Stan part d'un point quelconque M_0 sur *[AB],* au n-ième tour, il se retrouve au point M_n .
Démontrer que les points M_n sont de plus en plus proches du point *I.*

4. Le **jeudi**, Stan se place à l'intérieur de la place au point *D*, il se déplace toujours en ligne droite en suivant le plus court chemin.

   Il va d'abord vers *[AB]* et revient en *D*, puis vers *[BC]* et revient en *D* et enfin, il va vers *[AC]* et revient en *D* (il fait donc trois aller-retours).

   Y a-t-il un emplacement pour *D* qui minimise ce trajet ?