OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE PARIS
2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

CORRECTION INDIVIDUEL

2021

Éléments de solution

Exercice 1 (pour tous)

1., 2. et 3.

n	6	101	361	2 021
Les diviseurs de n	$1;\ 2;\ 3;\ 6$	$1; 101$	$1; 19; 361$	$1, 43; 47; 2\,021$
$S(n)$	12	102	381	2 112
$2S(n)$	24	204	762	4 224
$(n+1)N(n)$	28	204	1 086	8 088

4. *a.* Chaque diviseur de n figure deux fois dans la somme $T(n)$, donc $T(n) = 2S(n)$.
b. $ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$ fait apparaître $ab - a - b + 1$ comme produit de nombres positifs, d'où le résultat.
c. Application au cas $dq = n$.
d. Dans l'écriture de $T(n)$, on regroupe les termes par deux, et on « somme » les inégalités obtenues pour obtenir l'inégalité générale.

5. *a.* La seule façon de faire qu'une somme de termes tous positifs tous majorés par le même nombre soit égale au produit de ce majorant par le nombre de termes est que chaque terme soit égal à ce majorant. On a donc, pour chaque diviseur de n : $(d-1)(q-1) = 0$.
b. Les seules valeurs admissibles pour d sont donc 1 ou n. n est donc un nombre premier.
c. Réciproquement, si n est premier, ses diviseurs sont 1 et n, leur somme est $n+1$ et leur effectif 2, donc l'égalité (*) est satisfaite.

Exercice 2 (spécialistes)

A. Quelques exemples
1. *a.* $7 = 2 + 5$ et $7^2 = 2 \times 22 + 5$, donc 7 est 22 $-$décomposable.
On peut essayer les décompositions possibles de 7 en sommes d'entiers inférieurs :
$0 \times 10 + 7 = 7, 1 \times 10 + 8 = 18, 2 \times 10 + 5 = 25, 3 \times 10 + 4 = 34, 4 \times 10 + 3 = 43, 5 \times 10, 6 \times 10$ et 7×10 sont supérieurs à 49. Donc 7 n'est pas 10 $-$décomposable.
b. $45 = 20 + 25$ et $2\,025 = 20 \times 100 + 25$ donc 45 est 100 $-$décomposable.
2. *a.* Dire que a est 1 $-$décomposable, c'est dire qu'il existe des entiers q et r tels que $a = q + r$
et $a^2 = q \times 1 + r$, ce qui nécessite $a = a^2$. 0 et 1 sont donc les seuls possibles, et ils possèdent effectivement la propriété, les couples associés étant $(0,0)$ et $(1,0)$ (et aussi $(0,1)$).
b. Dire que a est 2 $-$décomposable, c'est dire qu'il existe des entiers q et r tels que $a = q + r$ et $a^2 = 2q + r$, ce qui nécessite que $a(a-1) = q$. Comme $q \leq a$ et qu'on parle d'entiers positifs, il s'ensuit que $a - 1 \leq 1$. Les trois possibilités sont donc 2, 1 et 0. On vérifie comme précédemment que ces trois valeurs conviennent.
3. *a.* $N^2 = N \times N = 0$ donne la réponse, N est N $-$décomposable.
b. $(N-1)^2 = (N-2) \times N + 1$ donne la réponse : $(N-1)$ est N $-$décomposable.
c. Une égalité telle que $4 = a \times N + b$ ne saurait avoir lieu que pour $a = 0$, sinon le second membre est strictement supérieur au premier, et pour $a = 0$, on obtient $4 = 2$.

B. Une étude des nombres N $-$décomposables
1. *a.* Si k est N $-$décomposable, il existe des entiers q et r tels que $k = q + r$ et $k^2 = q \times N + r$. Comme q et r sont inférieurs ou égaux à k, on en déduit $k^2 \leq k(N+1)$, et $k \leq N + 1$.
Est-il possible que k soit égal à $N + 1$?

Si cela était, il existerait un entier a tel que $(N+1)^2 = aN + (N+1-a)$, ou encore $N(N+1) = a(N-1)$, qui conduit à $a > N+1$, impossible dans notre hypothèse. Donc $k \leq N$.
b. Les entiers $3-$décomposables sont inférieurs ou égaux à 3 d'après ce qui précède, et les résultats de la partie A permettent de conclure positivement pour 3 et 2. 1 et 0 sont, quel que soit $N, N-$décomposables (avec les couples $(0,0)$ et $(0,1)$).
La partie A a aussi résolu le cas de 2 comme non $4-$décomposable. Il ne reste donc que 4, 3, 1 et 0 qui le soient.

2. Supposons que pour un couple (k, N), il existe deux entiers p et q tels que :

$$\begin{cases} k^2 = pN + k - p \\ k^2 = qN + k - q \end{cases}$$

Nécessairement, $(N-1)(p-q) = 0$ et comme $N \geq 2$ l'unicité est démontrée.

3. *a.* On peut écrire $k^2 = qN + k - q$ (en utilisant directement $k = q + r$), ou encore $k^2 - k - q(N-1) = 0$. L'existence du couple (q, r) induit le fait que k est solution de cette équation.
b. Réciproquement, s'il existe un entier q compris entre 0 et k tel que k soit solution de cette équation, alors en posant $r = k - q$, on revient bien au système (S).
c. Essayons d'écrire différemment k et $N-1$ pour faire apparaître l'équation précédente :

$$k^2 - k = 2^{2p-2}(2^p-1)^2 - 2^{p-1}(2^p-1) = 2^{p-1}(2^p-1)(2^{2p-1} - 2^{p-1} - 1)$$

$$k^2 - k = 2^{p-1}(2^p-1)(2^{2p-1} - 2^p + 2^{p-1} - 1) = 2^{p-1}(2^p-1)(2^p+1)(2^{p-1}-1)$$

$$k^2 - k = 2^{p-1}(2^{p-1}-1)(2^{2p}-1)$$

Dans cette dernière égalité, on reconnaît le facteur $N-1$, précédé de $2^{p-1}(2^{p-1}-1)$, entier inférieur à k.

4. Calculons $(N-k)^2 - (N-k) = N(N-1) + k^2 - k - 2Nk + 2k = (N-1)(N-2k+q)$
(la lettre q qui apparaît dans cette dernière expression est liée précédemment à k). Le dernier facteur est bien inférieur à $N-k$ (c'est $N-k-(k-q)$).
5. Posons $N = 2k$ et écrivons la condition nécessaire et suffisante établie plus haut : il existe un entier q compris entre 0 et k tel que $k^2 - k - q(2k-1) = 0$. On a donc $k(k-1) = q(2k-1)$, qui assure que $k(k-1)$ est un multiple de $2k-1$. D'où on tire que $4k(k-1)$, qui est égal à $(2k-1)^2 - 1$ est lui aussi un multiple de $(2k-1)$ et donc 1 en est un aussi. Impossible.

6. On a montré que les entiers $N-$décomposables sont inférieurs à N. D'après la question précédente, $\frac{N}{2}$ – un entier dans le cas où N est pair – ne l'est pas. Par ailleurs, si k est $N-$décomposable, $N-k$ l'est aussi. On peut donc regrouper les entiers $N-$décomposables par paire $\{k, N-k\}$. Il y en a donc un nombre pair.

7. Posons $N-1 = p$. La condition nécessaire et suffisante : il existe une entier q inférieur ou égal à k tel que $k(k-1) - qp = 0$ indique que p divise $k(k-1)$, et comme p est un nombre premier, il divise un des deux facteurs. Les possibilités sont $k = 0, k = 1, k = N-1, k = N$.

8. La condition $k(k-1) = qN$. Montre que les nombres N tels que k soit $N-$décomposable sont des diviseurs de $k(k-1)$. Il y en a donc un nombre fini.

Exercice 3 (non spécialistes)

1. *a.* proposition fausse car, par exemple, $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$ et ce n'est pas une fraction égyptienne.
b. proposition vraie car pour tous les entiers n et p non nuls, $\frac{1}{n} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{np}$ et np est un entier non nul.
c. proposition fausse car, par exemple, $\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1}$ et ce n'est pas une fraction égyptienne.
2. *a.* On peut proposer les deux décompositions $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. On en déduit qu'il peut ne pas y avoir unicité de la décomposition égyptienne d'un nombre rationnel.
b. $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ et $\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

3. ***a.*** Comme la base de la pyramide SABCD est un carré et ses faces sont des triangles isocèles en S, la somme des longueurs des arêtes de cette pyramide SABCD est $4\text{AB} + 4\text{SA}$.
Donc $4\text{AB} + 4\text{SA} = \frac{4}{30} + \frac{4}{20} = \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ qui est une fraction égyptienne. On en déduit que SABCD est une pyramide égyptienne.
b. Pour les mêmes raisons que dans le cas particulier de la question **a.**, $4\text{AB} + 4\text{SA} = \frac{4}{p} + \frac{4}{q}$.
Si $p < 4$ ou $q < 4$, alors, puisque les nombres considérés sont strictement positifs, on a $\frac{4}{p} > 1$ ou $\frac{4}{q} > 1$ et, dans les deux cas, $4\text{AB} + 4\text{SA} > 1$. Donc $4\text{AB} + 4\text{SA}$ ne peut pas être une fraction égyptienne (qui est nécessairement strictement inférieure à 1) donc SABCD n'est pas une pyramide égyptienne.
On en déduit que si SABCD est une pyramide égyptienne alors $p \geq 4$ et $q \geq 4$.
c. SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $4\text{AB} + 4\text{SA} = \frac{1}{n}$.
Or, en réduisant au même dénominateur, $4\text{AB} + 4\text{SA} = \frac{4}{p} + \frac{4}{q} = \frac{4p+4q}{pq}$
Donc SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$.
d. Par ce qui précède, SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$ qui s'écrit $4n(p+q) = pq$.
Pour tous entiers naturels p et q non nuls, $4n(p+q)$ est un nombre pair.
Si p et q sont des nombres impairs alors pq est aussi un nombre impair.
L'égalité $4n(p+q) = pq$ est impossible si p et q sont impairs.

CORRECTION PAR ÉQUIPES

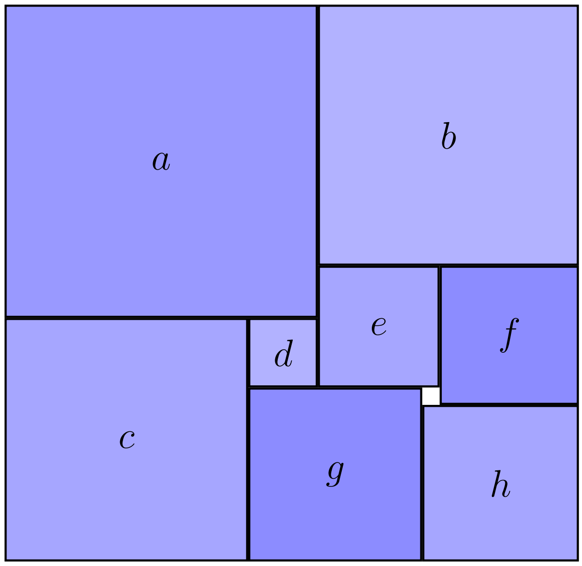
2021

Olympiades 2021,

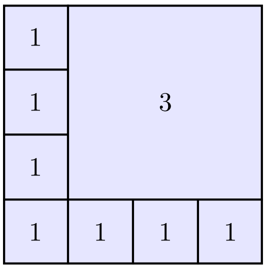
proposition L Lemaire

0.1 Exercice 1 : Quadrature du carré

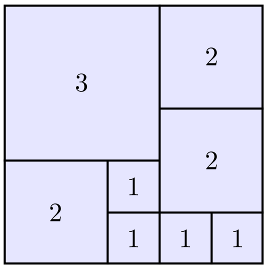
1. On a découpé un rectangle en petits carrés. Le plus petit carré (blanc) a pour côté 1.
   Montrer que le rectangle ci-dessous, découpé en carrés, n'est pas un carré.



2. Le problème de **la quadrature du carré** consiste à découper un carré avec des carrés plus petits (mais pas forcément de la même taille). On souhaite de plus que tous les côtés des carrés du découpage soient des nombres entiers (les plus petits possibles). La dimension de la quadrature sera la taille du carré découpé.
   Par exemple : Voici deux découpages différents d'un carré en 8 carrés :



Quadrature de dimension 4.



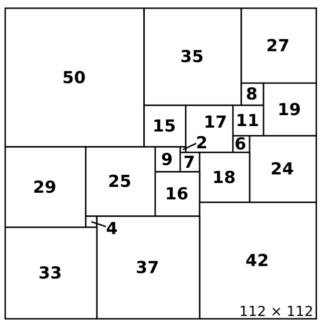
Quadrature de dimension 5.

   Est-il possible de découper un carré en 7 carrés plus petits (mais pas forcément de la même taille) ? en 6 carrés ? en 5 carrés ?

3. Montrer que si l'on peut découper un carré en n carrés alors il est possible de découper un carré en $n+3$ carrés. La réciproque est-elle vraie ?
4. Représenter **quatre** partages différents d'un carré en 9 carrés et donner la dimension de chaque quadrature, (deux partages constitués des mêmes carrés, mais placés différemment, sont considérés comme identiques).
5. (a) Prouver qu'il est possible de découper un carré en 2021 carrés.
   (b) En explicitant un partage en 2021 carrés, donner la dimension de cette quadrature.
6. On dit que le découpage est **parfait** quand les carrés sont tous de dimensions différentes.

   En 1939, R. Sprague (1894-1967) trouve un découpage parfait d'un carré en **55 carrés**. De plus, la dimension de cette quadrature est 4205.

   En 1978, A. Duijvestijn (1927-1998) a découvert un découpage parfait d'un carré en **21 carrés** (voir figure contre).
   De plus, la dimension de cette quadrature est 112.
   Il a été démontré depuis que l'on ne peut pas faire moins que 21.



(a) On suppose qu'il existe un découpage parfait d'un carré en n carrés et un découpage parfait d'un carré en m carrés.

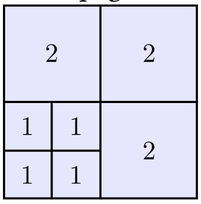
Démontrer que l'on peut construire un découpage parfait en $n + m - 1$ carrés.

(b) Prouver qu'il existe un découpage parfait d'un carré en 2021 carrés.

0.2 Exercice 1 : élément de correction : Quadrature du carré

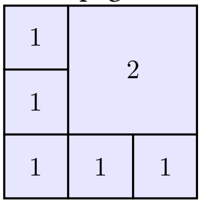
1. Avec les notations du dessin :
   $\boxed{f = e + 1}$ $\quad h = f + 1 = e + 2$ soit $\boxed{h = e + 2}$ $\quad g = h + 1 = e + 3$ soit $\boxed{g = e + 3}$.
   $d + e = g + 1$ donc $d + e = e + 4$ d'où $\boxed{d = 4}$.
   $c = d + g = e + 7$ soit $\boxed{c = e + 7}$ $\quad a = c + 4 = e + 11$ soit $\boxed{a = e + 11}$.
   $b + e = a + 4 \iff 3e + 1 = e + 15 \iff 2e = 14 \iff \boxed{\text{e=7}}$
   On en déduit que $a = 18$, $b = 15$ et $c = 14$ donc le rectangle a pour dimension 32×33 et ce n'est pas un carré.
2. Petits découpages.

   Découpage en 7 carrés :

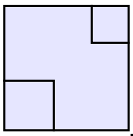
   Quadrature de dimension 4.

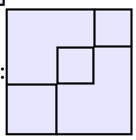
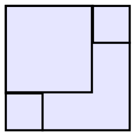
   Découpage en 6 carrés :

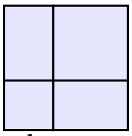
   

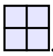
   Quadrature de dimension 3.

   Prouvons que le découpage en 5 carrés est impossible. Deux sommets opposés sont les sommets de 2 carrés de découpe, il y a 3 cas :

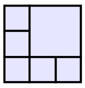
   — Ces deux carrés n'ont pas de sommet commun : 

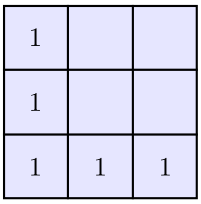
   Dans la partie restante, il est impossible de placer 3 carrés :  ou 

   — Ces deux carrés ont un sommet commun : 

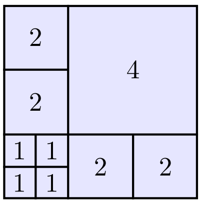
   La partie restante est constituée de 2 rectangles ou 2 carrés (avec impossibilité de faire 3 carrés).
3. Si un carré est découpé en n carrés, on peut choisir un de ces carrés (il en reste $n - 1$) que l'on découpe en 4 . On obtient alors $n - 1 + 4 = n + 3$ carrés.

   La réciproque est fausse car on peut découper en 8 carrés mais pas en 5 carrés.
4. Partages différents d'un carré en 9 carrés :

   On peut partir d'une découpe en 6 carrés : 
   Puis l'on partage un carré en 4. On obtient deux possibilités

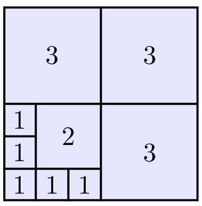
   

   Quadrature de dimension 3.

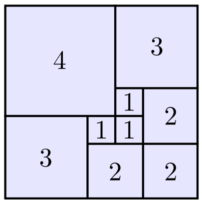
   Quadrature de dimension 6.

   On peut aussi partir d'une découpe de 4 et l'on découpe un des carrés en 6. On obtient :

   Quadrature de dimension 6.

Enfin avec un peu d'imagination, on a le partage :



Quadrature de dimension 7.

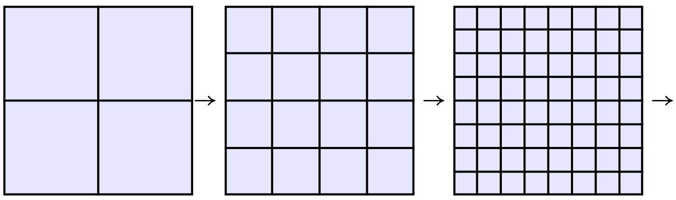
5. (a) D'après la question 3, si l'on peut découper un carré en n carrés, il est possible de découper ce carré en $n+3$ carrés. De proche en proche, il sera possible de découper le carré en $n+3k$ carrés avec $k \in \mathbb{N}$.

   Or $2021 = 8 + 671 \times 3$, comme il est possible de découper un carré en 8 carrés, on en déduit qu'il est possible de découper un carré en 2021 carrés.

   (b) Bien évidemment, la dimension de la quadrature dépend du découpage.

   Nous allons expliciter un découpage permettant de calculer simplement la dimension :

   On part d'un carré que l'on divise en 4, puis chaque carré en 4 et ainsi de suite . . .

   $\to \cdots$ On recommence 5 fois.

   On obtient un carré découpé avec $4^5 = 1024$ carrés égaux (quadrature de dimension 32).

   On prend 330 carrés que l'on divise en 4, on a donc $1024 + 330 \times 3 = 2014$ carrés (quadrature de dimension 64).

   On prend enfin un « grand » carré que l'on divise en 8, on a donc $2014 + 7 = 2021$ carrés (quadrature de dimension 128).

   On aurait pu faire une autre quadrature : on divise 3 fois en 9, on a $9^3 = 729$ *carrés (quadrature de dimension* 27*). On prend 160 carrés que l'on divise en 9, on a donc* $729 + 160 \times 8 = 2007$ *carrés (quadrature de dimension* 81*). On prend enfin deux « grands » carrés que l'on divise en 7, on a donc* $2009 + 2 \times 6 = 2021$ *carrés (quadrature de dimension* $27 \times 12 = 324$*).*

6. (a) On suppose qu'il existe un découpage parfait d'un carré en n carrés et un découpage parfait d'un carré en m carrés.

   On prend le plus petit carré du découpage parfait en n carrés et l'on découpe ce petit carré en m carrés (découpage parfait).

   On obtient ainsi un découpage parfait en $n + m - 1$ carrés.

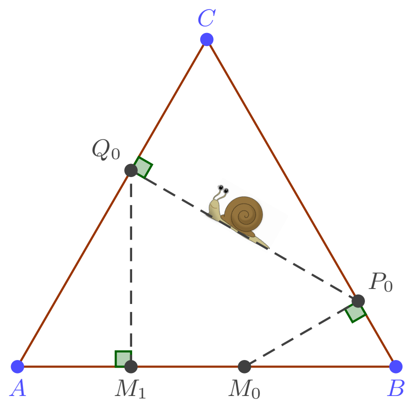
   (b) Pour trouver un découpage parfait en 2021 carrés on n'utilise que celui de Duijvestijn.

   On réitère 100 fois l'opération précédente : à partir du découpage parfait en 21 carrés, on construit un découpage parfait en $21+20 = 41$ carrés, puis en $41+20 = 61$ carrés, . . . , puis en $21+100\times 20 = 2021$ carrés.

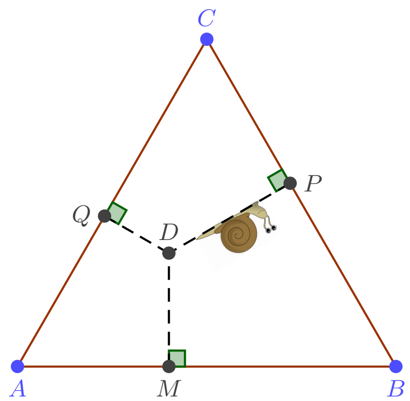
0.1 Exercice 2 : Les balades de Stan l'escargot

Stan l'escargot se déplace en ligne droite à l'intérieur d'une place qui a la forme d'un triangle équilatéral ABC de côté 10 mètres.

1. Le **lundi**, Stan part d'un point quelconque M_0 sur $[AB]$, il se déplace parallèlement à (AC) pour atteindre $[BC]$ en P_0, il repart parallèlement à (AB) pour atteindre $[AC]$ en Q_0, puis il continue parallèlement à (BC) pour atteindre $[AB]$ en M_1. En poursuivant ainsi, on construit ainsi une suite de points M_0, M_1, M_2, …
   (a) Dans cette question, $AM_0 = 2$ mètres. Sur une figure (échelle 2 m $\longleftrightarrow$ 1 cm), représenter les points de M_0 jusqu'à M_6.
   (b) Si $AM_0 = x$ avec $x \in [0; 10]$, déterminer la longueur AM_{2021}.
2. Le **mardi**, Stan part du point M_0 sur $[AB]$ tel que $AM_0 = 2$ mètres. Il va atteindre $[BC]$ en P_0 puis $[AC]$ en Q_0 pour revenir en M_0.
   Un peu fatigué de son trajet de la veille, Stan souhaite faire un trajet le plus court possible.
   Sans calcul, représenter le chemin de Stan (échelle 2 m $\longleftrightarrow$ 1 cm).
3. Le **mercredi**, trouvant son trajet un peu monotone, Stan décide de modifier ses déplacements.
   Il part du segment $[AB]$. Il se dirige en ligne droite en suivant le plus court chemin vers $[BC]$ pour atteindre P_0, puis vers $[AC]$ pour atteindre Q_0 et revient sur $[AB]$ en M_1. En poursuivant ainsi, on construit ainsi une suite de points M_0, M_1, M_2, …



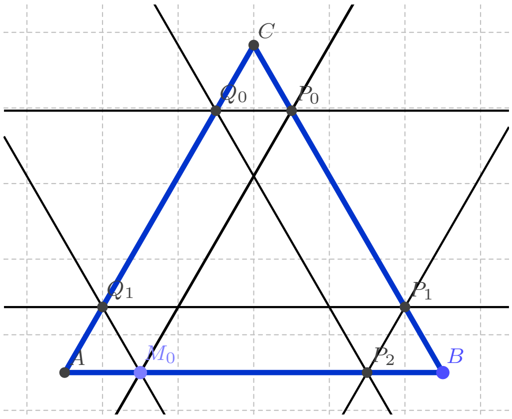
   (a) Le trajet idéal de Stan serait de revenir à son point de départ après un tour, c'est-à-dire que le trajet idéal serait d'avoir $M_1 = M_0$.
   Où doit-on placer le point M_0 (on notera I ce point M_0) pour que le trajet soit idéal ?
   Que peut-on dire de ce trajet ?
   (b) Stan désire revenir à son point de départ après deux tours. Est-ce possible ?
   (c) Stan part d'un point quelconque M_0 sur $[AB]$, au $n^{\text{ème}}$ tour, il se retrouve au point M_n.
   Démontrer que les points M_n sont de plus en plus proches du point I.
4. Le **jeudi**, Stan se place à l'intérieur de la place au point D, il se déplace toujours en ligne droite en suivant le plus court chemin.



   Il va d'abord vers $[AB]$ et revient en D, puis vers $[BC]$ et revient en D et enfin, il va vers $[AC]$ et revient en D (il fait donc trois aller-retours).
   Il y a t-il un emplacement pour D qui minimise ce trajet ?

0.2 Exercice 2 éléments de correction : Les balades de Stan

1. (a) Dans cette question, $AM_0 = 2$ mètres. Sur une figure (échelle 2 m $\longleftrightarrow$ 1 cm), représenter les points de M_0 jusqu'à M_6.

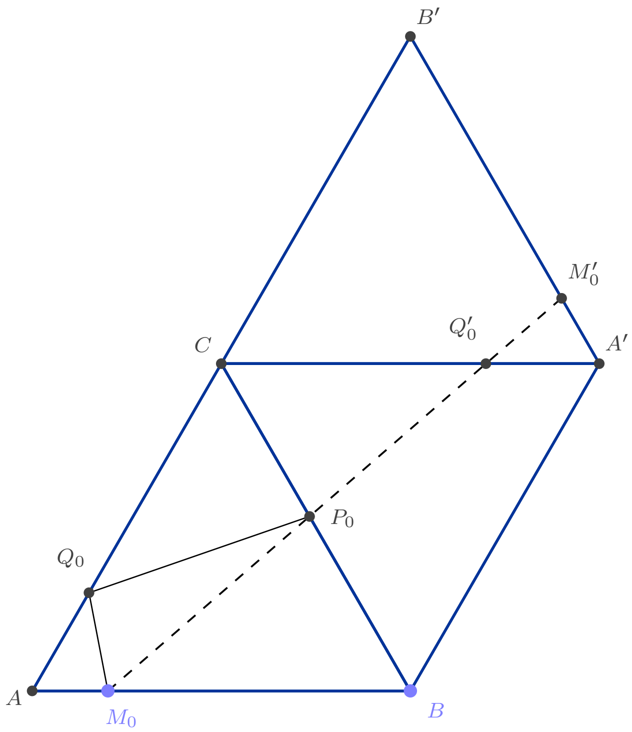


Les points $M_0, M_2, M_4, M6$ sont confondus et les points M_1, M_3, M_5 sont confondus

(b) Si $AM_0 = x$ avec $x \in [0; 10]$.
Le triangle M_0BP_0 est équilatéral donc $BM_0 = 10 - x = MP_0$.
Le triangle P_0CQ_0 est équilatéral donc $CP_0 = x = CQ_0$.
Le triangle Q_0AM_1 est équilatéral donc $AQ_0 = 10 - x = AM_1$.

Donc si $AM_0 = x$ alors $AM_1 = 10 - x$.
On déduit que $AM_2 = 10 - (10 - x) = x = AM_0$ et $AM_3 = 10 - x$.
Les suites $(AM_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(AM_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ sont constantes.
Par conséquent $AM_{2021} = 10 - x$.

2. On trace le symétrique du triangle ABC par rapport à (BC) puis le symétrique de ce triangle par rapport à (CA'). On place Q'_0 le point de $[A'B']$ tel que $A'M'_0 = 2$.
Le trajet $M_0M'_0$ est le chemin le plus court, il coupe $[BC]$ en P_0 et $[CA']$ en Q'_0. Le symétrique de Q'_0 par rapport à (BC) donne Q_0.



3. (a) M_0BP_0 est un triangle rectangle en P_0 et $\widehat{B} = 60°$ donc $BP_0 = \dfrac{1}{2}BM_0 = \dfrac{10 - x}{2}$

De même $CQ_0 = \dfrac{1}{2}CP_0 = \dfrac{10+x}{4}$ et $AM_1 = \dfrac{1}{2}AQ_0 = \dfrac{30-x}{8}$

Le trajet idéal de Stan serait de revenir à son point de départ après un tour, c'est-à-dire que le trajet idéal serait d'avoir $M_1 = M_0$. Donc $\dfrac{30-x}{8} = x$ c'est à dire $x = \dfrac{10}{3}$

Ce trajet est un triangle équilatéral.

(b) Stan désire revenir à son point de départ après deux tours.

Donc $M_2 = M_0$ ce qui correspond à : $\dfrac{30 - \dfrac{30-x}{8}}{8} = x$ on obtient aussi $x = \dfrac{10}{3}$ ce qui n'est vrai que si $M_0 = I$.

(c) Stan part d'un point quelconque M_0 sur $[AB]$, au $n^{\text{ème}}$ tour, il se retrouve au point M_n.

On note $x_n = AM_n$ on a alors $x_{n+1} = \dfrac{30-x_n}{8}$

On pose $u_n = x_n - \dfrac{10}{3}$

$$u_{n+1} = x_{n+1} - \frac{10}{3} = \frac{30-x_n}{8} - \frac{10}{3} = \frac{30 - u_n - \dfrac{10}{3}}{8} - \frac{10}{3} = \frac{\dfrac{80}{3} - u_n}{8} - \frac{10}{3} = -\frac{u_n}{8}$$

$IM_n = |u_n|$ et $(IM_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{8}$ donc elle est décroissante et tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Ce qui prouve que les points M_n sont de plus en plus proches du point I.

4. L'aire du triangle DAB est $\mathcal{A}(DAB) = DM \times 5$. De même $\mathcal{A}(DCB) = DP \times 5$ et $\mathcal{A}(DAC) = DQ \times 5$.
   Donc $5 \times (DM + DP + DQ) = \mathcal{A}(DAB) + \mathcal{A}(DCB) + \mathcal{A}(DAC) = \mathcal{A}(ABC)$.

   Par conséquent la longueur du trajet est $2 \times (DM + DP + DQ) = \dfrac{2\mathcal{A}(ABC)}{5}$ donc ne dépend pas de la position de D.