OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE D'ORLÉANS-TOURS
2022

SUJET DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

ACADÉMIE
D'ORLÉANS-TOURS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Énoncés académiques

Durée : 2h00

à la suite de l'épreuve nationale et de 10 minutes de pause

L'usage des calculatrices est autorisé.

Ce sujet comporte trois exercices et huit pages.

Les candidats traitent ***deux exercices*** *par groupes de deux ou de trois* ***:***

- *Les candidats* ***suivant*** *l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série générale traitent les exercices numéros* ***1*** *et* ***2****.*
- *Les candidats* ***ne suivant pas*** *l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série générale traitent les exercices numéros* ***1*** *et* ***3****.*

Tous les élèves d'un même groupe doivent noter leur numéro d'anonymat sur la copie commune.

Exercice académique n°1
à traiter par groupe de 2 ou 3 élèves par tous les candidats

FRACTRAN

FRACTRAN est un langage de programmation exotique s'appliquant à des entiers naturels. Il a été inventé par le mathématicien John Conway.
Ce langage est très simple : il consiste en une liste de fractions et un algorithme appliqué à des entiers.
Pour le découvrir commençons par une liste réduite à une fraction. Voici comment il fonctionne :

- Etape 1 : Choisir un entier n.
- Etape 2 : Multiplier l'entier n par la fraction.
  - Si le résultat est un entier, recommencer l'étape 2 avec l'entier obtenu ;
  - sinon, on arrête le programme et on renvoie cet entier.
- Le résultat obtenu sera appelé l'image de n par le programme Fractran.

Exemples : On considère le programme Fractran défini par la fraction $\frac{3}{10}$

- Si on choisit 20 comme nombre de départ, le programme Fractran renverra 6 car $6 \times \frac{3}{10}$ n'est pas entier.

$$20 \underset{\times \frac{3}{10}}{\longmapsto} 6$$

- Si on choisit 5 000 comme nombre de départ, le programme Fractran renverra 135 :

$$5\,000 \underset{\times \frac{3}{10}}{\longmapsto} 1\,500 \underset{\times \frac{3}{10}}{\longmapsto} 450 \underset{\times \frac{3}{10}}{\longmapsto} 135$$

- Si on choisit 42 comme nombre de départ, le programme Fractran renverra 42 car $42 \times \frac{3}{10}$ n'est pas un nombre entier.

Partie A : Quelques exemples.

Dans cette partie, on considère le programme Fractran correspondant à la fraction $\frac{7}{3}$

1. Démontrer que l'image de 9 par ce programme Fractran est 49.
2. Qu'elle est l'image de 135 par ce programme ?
3. Pour quels nombres le programme Fractran renvoie le même nombre que le nombre choisir au départ ?

Partie B : Recréer la somme avec Fractran !

Dans cette partie, on considère le programme Fractran correspondant à la fraction $\left(\frac{3}{2}\right)$.
Nous allons faire naître l'addition d'entier avec ce programme.

1. Déterminer l'image de $2^4 \times 3^5$, on donnera ce résultat sous la forme d'une puissance de 3
2. **Définition** : p étant un nombre premier, on appelle p-valuation d'un nombre entier A l'exposant de p dans la décomposition de A en produit de nombres premiers. On la note $v_p(A)$.
   Par exemple :
   $v_3(45) = 2$ car la décomposition en produit de facteurs premiers de 45 est $3^2 \times 5$
   $v_2(112) = 4$ car la décomposition en produit de facteurs premiers de 112 est $2^4 \times 7$

a) Déterminer $v_2(3888)$ et $v_3(3888)$
b) Déterminer la 3-valuation de l'image de 3888 par le programme Fractran.
c) Expliquez pourquoi la somme $v_2(3888) + v_3(3888)$ peut être calculée avec ce programme Fractran.

3. Déterminer $v_2(432)$ et $v_3(432)$ et calculez l'image de 432 par le programme Fractran.
4. Soit p et q deux entiers naturels strictement positifs.
   a) Déterminez l'image de $2^p \times 3^q$ par ce programme Fractran. Argumentez votre réponse.
   b) Comment obtenir la somme de p et q à l'aide de ce programme Fractran ?
5. Sans faire de calculs (compliqués), déterminer l'image de $2^7 \times 3^{11} \times 5^9$. Expliquez votre raisonnement.
6. Donner une fraction permettant de réaliser l'addition avec les valuations 5 et 7.
7. Ecrire un algorithme en Python (ou en langage naturel) qui :
   - Prend en entrée un nombre entier naturel strictement positif ;
   - Renvoie en sortie sa 2-valuation.

Aide-mémoire Python

a%b	*reste de la division de a par b*
a//b	*quotient de la division de a par b*
a/b	*division décimale de a par b*

Partie C : un autre programme simple

Dans cette partie, on considère le programme Fractran correspondant à la fraction $\left(\frac{1}{6}\right)$

1. Déterminer l'image de $2^1 \times 3^5$, puis de $2^4 \times 3^2$ et enfin de $2^4 \times 3^4$.
2. Que réalise ce programme sur les 2-valuations et 3-valuations d'un nombre de départ A pour lequel il existe des entiers naturels non-nuls a et b tels que $A = 2^a \times 3^b$?
3. Donner la fraction permettant de réaliser la même opération avec les valuations 5 et 7.

Partie D : Fractran avec une liste de fractions.

Pour chercher l'image d'un entier A, on regarde dans la liste **<u>la première</u>** des fractions qui multipliée par A donne un entier B, puis on applique de nouveau la procédure sur l'entier B. Si aucune des fractions de la liste multipliée par le résultat précédent ne donne un entier, la procédure s'arrête et le dernier entier obtenu est renvoyé comme image du programme Fractran.
Dans cette partie, on considère le programme Fractran correspondant à la liste de fractions $\left(\frac{3}{10};\frac{4}{3}\right)$

1. Montrer que l'image de 14 est 14.
2. Montrer que l'image de 20 est 8.
3. Déterminer l'image de 45 et compléter le diagramme suivant :

$$45 \underset{\times\frac{4}{3}}{\longmapsto} 60 \underset{\dots}{\longmapsto} \dots \underset{\dots}{\longmapsto} \dots \underset{\dots}{\longmapsto} \dots$$

Partie E : un dernier programme plus complexe

Dans cette partie, on considère le programme Fractran correspondant à la liste de fractions :

$$\left(\frac{455}{33};\frac{11}{13};\frac{1}{11};\frac{3}{7};\frac{11}{2};\frac{1}{3}\right)$$

1. Calculer l'image de 2^3. Vous donnerez le résultat sous la forme d'une puissance de 5 et présenterez vos calculs à l'aide d'un diagramme comme dans la question 3 de la partie D.
2. Faites de même avec 3^2 et $3^2 \times 2$ et $2^3 \times 3^2$.
3. Que réalise ce programme sur les 2-valuations et 3-valuations du nombre de départ ?

Exercice académique n°2

à traiter par groupe de 2 ou 3 élèves par les candidats **ayant suivi** la spécialité de mathématiques de la voie générale

Binômes d'élèves

Un professeur de Physique a un même groupe de n élèves en T.P. chaque semaine où n est un nombre entier naturel non nul et pair. Il voudrait, aussi longtemps que possible, organiser son groupe en binômes et que chaque semaine, tous les binômes soient différents de ceux des semaines précédentes.

Partie A : Un groupe de 4 élèves.

On suppose que le groupe comporte 4 élèves auxquels on attribue les numéros 0,1,2 et 3. On note chaque binôme entre accolades : par exemple le binôme formé des élèves 1 et 3 est noté {1,3}.

1. En remarquant que chaque semaine, l'élève 0 doit être dans un binôme différent, déterminer quel est le nombre maximum de semaines lors desquelles le groupe sera divisé en binômes tous différents.
2. Proposer une solution à ce problème pour ce groupe de 4 élèves. On pourra présenter la solution de la manière suivante :
   Semaine 1 : {0,1}, ... Semaine 2 : {?,?}, ... , Semaine...

Partie B : Un groupe de 6 élèves.

Le professeur possède désormais un groupe de 6 élèves numérotés de 0 à 5 et veut mettre en place le même système de binômes différents sur le maximum de semaines.

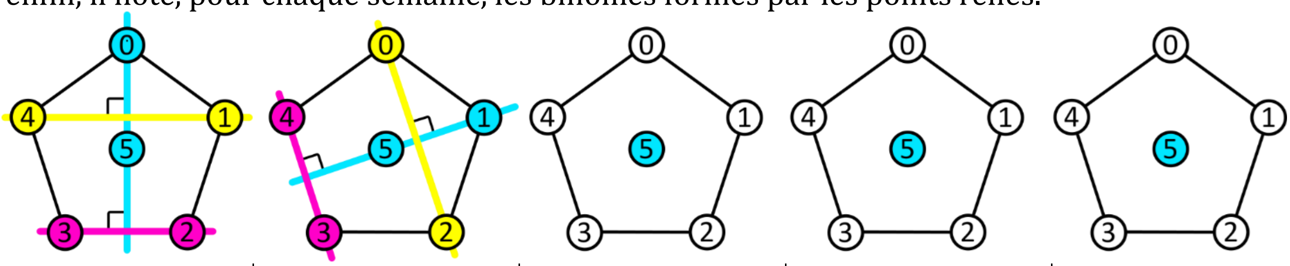
1. Voici un début de regroupement en binômes proposé par le professeur. Déterminer des groupements en binômes pour 3 semaines de plus.

Semaine 1 : {0,1}, {2,3}, {4,5} || Semaine 3 : { ?, ?}, { ?, ?}, { ?, ?} || Semaine 5 : { ?, ?}, { ?, ?}, { ?, ?}
Semaine 2 : {0,2}, {1,4}, {3,5} || Semaine 4 : { ?, ?}, { ?, ?}, { ?, ?}

2. Voici de nouveau un début de regroupement proposé par le professeur. Montrer qu'on ne peut pas trouver de groupement en binômes pour une 4-ième semaine étant donné ces trois semaines :

Semaine 1 : {0,1}, {2,5}, {3,4} || Semaine 3 : {0,5}, {1,3}, {2,4}
Semaine 2 : {0,4}, {1,2}, {3,5} || Semaine 4 :

Le professeur cherche une manière efficace de trouver une solution à son problème. Il met alors en place un algorithme visuel basé sur l'idée suivante :
- il représente l'élève 5 comme le centre d'un pentagone régulier dont chaque sommet représente un élève du groupe.
- pour chaque semaine, il relie par une droite l'élève 5 à un élève différent puis il trace les deux droites qui coupent perpendiculairement la première droite tracée et qui passent par deux sommets du pentagone.
- enfin, il note, pour chaque semaine, les binômes formés par les points reliés.



Semaine 1	Semaine 2	Semaine 3	Semaine 4	Semaine 5
{0,5}, {1,4}, {2,3}	{1,5}, {2,0}, {3,4}			

3. Compléter la suite de l'algorithme puis donner une solution au problème du groupe de 6 élèves.

Partie C : Un groupe de 8 élèves.

On suppose que le groupe est constitué de 8 élèves numérotés de 0 à 7.

1. En adaptant les trois étapes proposées dans la partie B, écrire un algorithme permettant de trouver une solution pour le problème à 8 élèves.

Remarque : on rappelle le nom des premiers polygones réguliers convexes à n côtés :
3 côtés : triangle équilatéral; 4 côtés : carré; 5 côtés : pentagone; 6 côtés : hexagone; 7 côtés : heptagone; 8 côtés : octogone; 9 côtés : ennéagone.

2. Donner une solution au problème du groupe de 8 élèves.

Partie D : Un groupe de n élèves.

On suppose désormais que le groupe est composé de n élèves numérotés de 0 à n-1 où n est un nombre entier naturel non nul et **pair**.

1. a) En fonction de n, combien de binômes y aura-t-il chaque semaine ?
   b) En fonction de n, quel est le nombre maximum de semaines lors desquelles le groupe sera divisé en binômes tous différents ?
2. Montrer que le nombre total de binômes tous différents que l'on peut former avec ce groupe de n élèves est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

Remarque : il n'y a pas d'ordre au sein d'un même binôme : par exemple, le binôme {0,1} et le binôme {1,0} sont identiques.

3. En adaptant l'algorithme à ce groupe de n élèves, le professeur détermine une solution à son problème dans ce cas. Déduire des questions D.1 et D.2 que cette solution rassemble tous les binômes possibles d'élèves.

Partie E : Programmation de l'algorithme.

On cherche à programmer l'algorithme précédent en Python pour le groupe de n élèves. On modélise les binômes par des tuple – par exemple : {0, 1} est représenté par (0,1) - et les semaines par des listes.

1. On donne la fonction suivante où l'argument n est un entier naturel pair non nul :

```
def semaine1(n) :
      S = []
      for k in range(n//2) :
            S.append((k,...))
      return S
```

Compléter la fonction précédente afin qu'elle renvoie la liste des binômes de la première semaine de l'algorithme pour un groupe de n élèves. Par exemple :
— L'instruction `semaine1(4)` devra renvoyer `[(0,3),(1,2)]` - ce qui représente le regroupement en binômes {0, 3}, {1, 2} dans le cas du groupe de 4 élèves.
— L'instruction `semaine1(6)` devra renvoyer `[(0,5),(1,4),(2,3)]` - ce qui représente le regroupement en binômes {0, 5}, {1, 4}, {2, 3} dans le cas du groupe de 6 élèves.

2. On remarque que dans l'algorithme, étant donné la semaine k, pour passer à la semaine k+1, on peut procéder de la façon suivante :

Pour chaque binôme de la semaine k, on crée un binôme de la semaine k + 1 en ajoutant 1 aux numéros de chaque élève du binôme sauf si son numéro est n – 1 (celui au centre du polygone) ; si le nombre obtenu est strictement inférieur à n – 1, on garde ce numéro pour le nouveau binôme, s'il est égal à n – 1, on le remplace par le numéro 0.
Le numéro n – 1 n'est pas concerné et reste inchangé lors de la création du nouveau binôme.

En s'appuyant sur la description précédente, écrire en Python une fonction `semaine_suivante(S,n)` qui prend en argument une liste S représentant l'ensemble des binômes d'une semaine donnée et n le nombre d'élèves et qui renvoie la liste de l'ensemble des binômes de la semaine suivante.

3. En utilisant la question D.1.b. et les fonctions des deux questions précédentes, écrire pour répondre au problème une fonction `solution(n)` qui prend en argument un entier n pair non nul et qui renvoie la liste des regroupements en binômes pour chaque semaine.

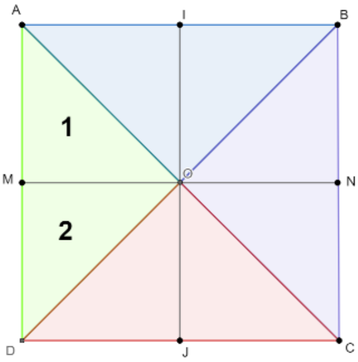
Exercice académique 3
à traiter par groupe de 2 ou 3 élèves par les candidats **n'ayant pas** suivi la spécialité de mathématiques de la voie générale

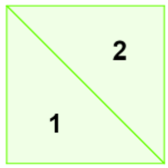
Des carrés en tangrams

Un menuisier désire découper dans un carré de côté 1 des polygones (que l'on appellera « pièces »). Ce découpage doit répondre aux contraintes suivantes :
Les pièces obtenues peuvent être déplacées voire retournées puis assemblées de manière astucieuse permettant ainsi de construire uniquement *n* petits carrés d'aire égale.

Partie A. n = 4

Le menuisier veut découper le carré ABCD de manière à reconstituer avec les pièces découpées uniquement 4 carrés de même aire.





1. Le menuisier coupe le carré ABCD selon les segments [AB], [BD], [MN] et [IJ] où M, N, I et J sont les milieux respectifs de [AD], [BC], [AB] et [DC]. Il assemble ensuite les triangles AMO et MOD, AIO et IOB, BON et ONC et DJO et OJC.

   Montrer qu'en assemblant les triangles AMO et MOD on obtient un carré.
2. Proposer une autre façon de découper ABCD pour former 4 carrés de même aire sur la figure 1.

Partie B. n = 2

Le menuisier veut découper le carré ABCD de manière à reconstituer avec les pièces découpées uniquement 2 carrés de même aire.
Proposer deux découpages permettant d'obtenir 2 carrés de même aire sur les figures 2.1 et 2.2

Partie C. n = 5

Le menuisier veut découper le carré ABCD de manière à reconstituer avec les pièces découpées uniquement 5 carrés de même aire.
Le menuisier coupe le carré ABCD selon les segments [AJ], [DN], [CI] et BM] où M, N, I et J sont les milieux respectifs de [AD], [BC], [AB] et [DC]. (Voir figure 3)

1. Montrer qu'un petit carré doit avoir pour côté $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
2. Calculer AJ.
3. Montrer que la pièce numérotée 1 est bien un carré de côté $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
4. Sans aucune justification déterminer comment assembler les autres pièces pour former les 4 autres carrés.

Partie D. n = 3

Le menuisier veut découper le carré ABCD de manière à reconstituer avec les pièces découpées uniquement 3 carrés de même aire.

1. Quelle doit être la longueur d'un côté d'un des carrés ?

Dans la figure 4.1 donnée en annexe :

- ABCD est un carré C_1
- E est le point de [AB] tel que l'angle $\widehat{ADE}$ mesure 30 .
- L est le milieu de [ED]
- La perpendiculaire à (ED) passant par L coupe [AD] en K en [BC] en G.
- M est le point de [LG] tel que LM = LE
- La perpendiculaire à (KG) passant par M coupe [BG] en J et [DC] en I .
- La perpendiculaire à (ED) passant par E coupe [BG] en N.
- F' est le point de [JM] tel que JN = JF' et le triangle JFF' est rectangle en F (F appartient à [JG])
- On admet que M est milieu de [IF'].

Le carré ABCD est donc découpé en 8 pièces numérotées de 1 à 8

2. Démontrer que AE = EL = LD = LM = $\frac{\sqrt{3}}{3}$
3. Calculer KL, DK et AK.
4. Construire le point J' tel que EJ'ML soit un carré. Démontrer que ENJML et JF'F (pièces n°3 et n°4) permettent de reconstituer un carré.
5. a) Démontrer que LMID et KLD (pièces n°7 et n°8) permettent de reconstituer un deuxième carré.
   b) Calculer IC, IM.
   c) Montrer que les triangles KLD et ICJ sont isométriques. En déduire MJ et JC.
6. a) Calculer EB, EN, BN et F'F. Que remarque-t-on ?
   b) Montrer que les triangles EBN et JMG sont isométriques.
   c) En déduire MG, JG, MF', CG et GF.
7. Dans la figure 4.2. donnée en annexe, AELK est la pièce 1 et EB'N' est un triangle superposable à EBN (pièce n°2) avec B' appartenant à [EL']
   a) Démontrer que AEN' = 90°
   b) Compléter la figure pour obtenir le carré AEPQ avec K appartenant à [AQ].
   c) Faire apparaître les deux pièces manquantes pour reconstituer AEPQ. *Aucune justification n'est demandée.*

ANNEXE

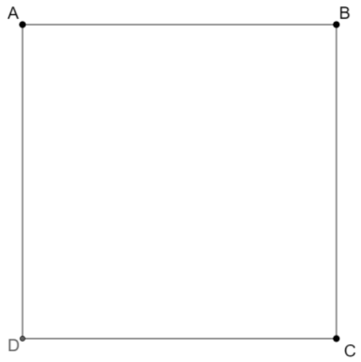


Figure 1.

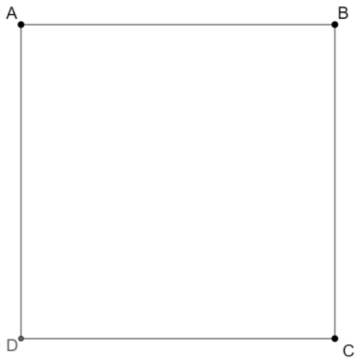


Figure 2.1

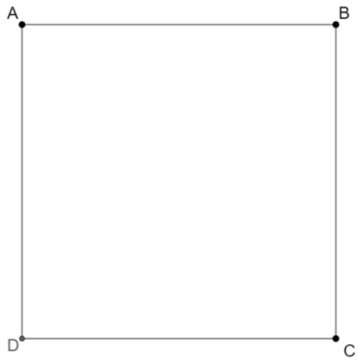


Figure 2.2

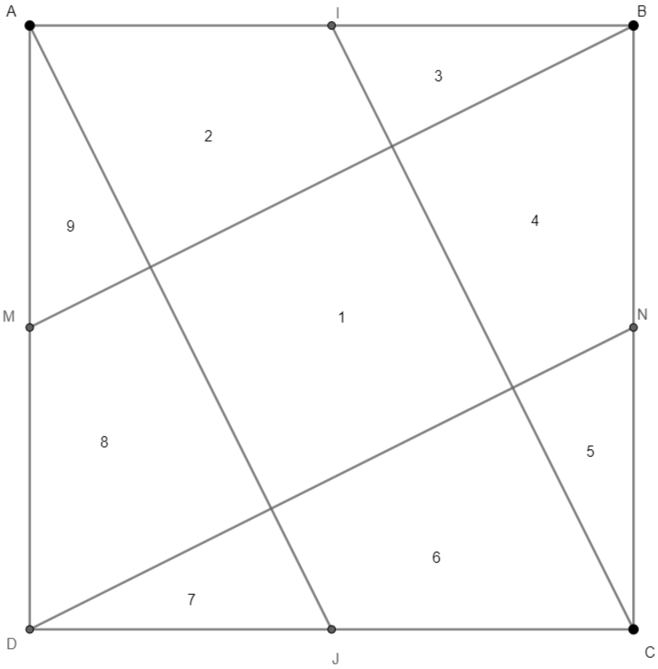


Figure 3.

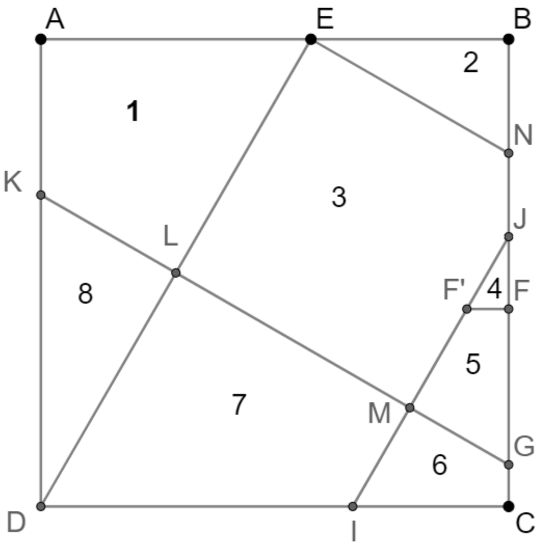


Figure 4.1

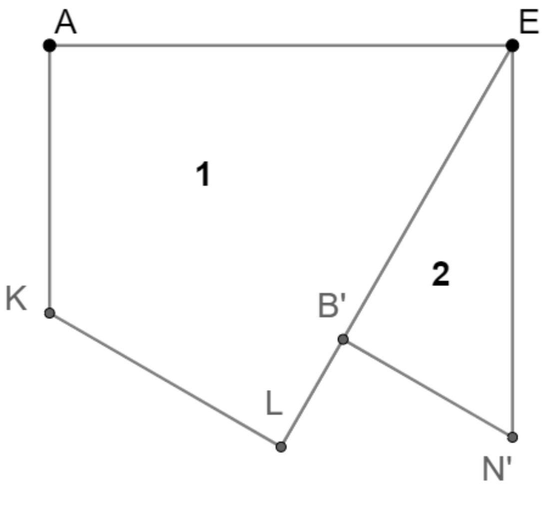


Figure 4.2