OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE D'ORLÉANS-TOURS
2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

ACADÉMIE D'ORLÉANS-TOURS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Enoncés académiques

Durée : 2h00

à la suite de l'épreuve nationale et de 10 minutes de pause

L'usage des calculatrices est autorisé.

Les candidats traitent ***deux exercices*** *par groupes de 2 ou 3* ***:***

- *Les candidats suivant l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série générale traitent les exercices numéros 1 et 2.*
- *Les candidats ne suivant l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série générale traitent les exercices numéros 1 et 3.*

Tous les élèves d'un même groupe doivent noter leur numéro d'anonymat sur la copie commune.

Exercice académique 1 (à traiter par groupe de 2 ou 3 élèves par tous les candidats)

Triplets de Pythagore

On dira que trois entiers naturels non nuls (a, b, c) forment un triplet de Pythagore si : $a^2 + b^2 = c^2$.
Dans ce cas, naturellement, le triangle de côtés a, b, c sera un triangle rectangle d'après le célèbre théorème de Pythagore.
Dans cet exercice, nous allons étudier les triplets de Pythagore et les relations entre eux.

A. Généralités sur les triplets de Pythagore

1. Parmi les triplets de nombres suivants, lesquels sont des triplets de Pythagore ?
   a. (5,12,13)
   b. (6,8,10)
   c. (8,12,15)
2. Un triplet de Pythagore très célèbre est le fameux $(3,4,5)$
   a. Démontrer que si l'on multiple ces trois nombres par un entier naturel k alors le triplet obtenu est aussi un triplet de Pythagore.
   b. Que peut-on en déduire pour le nombre de triplets de Pythagore ?
3. Démontrer que si (a, b, c) est un triplet de Pythagore alors $c > a$ et $c > b$.

B. Génération de triplets de Pythagore.

Une autre méthode pour générer des triplets de Pythagore nous vient du mathématicien grec Diophante :

Choisissez deux entiers naturels (u, v) différents et non nuls et calculez :

- *leur produit multiplié par 2*
- *la différence entre leurs carrés*
- *la somme de leurs carrés*

1. Démontrer que l'on retrouve le triplet $(3,4,5)$ avec $u=2$ et $v=1$.
2. Quel triplet obtient-on avec $u=42$ et $v=23$? Démontrez que c'est bien un triplet de Pythagore.
3. Démontrez que pour toutes valeurs de u et v que le triplet obtenu est bien un triplet de Pythagore.
4. Recopier et complétez le tableau suivant :

u\v	1	2	3	4	5	6
2	$(3,4,5)$					
3						
4						
5						
6						
7						

C. Triplets de Pythagore primitifs

Un triplet (a,b,c) est dit **primitif** si a et b sont premiers entre eux.
On rappelle que deux entiers a et b sont **premiers entre eux**, si leur seul diviseur commun est 1.

1. Entourer les triplets primitifs dans le tableau précédent.
2. Démontrer que si un triplet de Pythagore (a,b,c) est primitif, alors ces trois nombres n'ont pas de diviseurs communs autre que 1.

D. Produits de triplets de Pythagore.

Considérons deux triplets de Pythagore (a,b,c) et (A,B,C).
À partir de ces deux triplets, nous allons construire un nouveau triplet appelé « triplet produit » :

$$(aA-bB\,;aB+bA\,;cC)$$

1.
   a. Quel est le « triplet produit » obtenu avec $(4;3;5)$ et $(12;5;13)$?
   b. Est-ce un triplet de Pythagore ?
2. Démontrez que si $(a;b;c)$ et $(A;B;C)$ sont des triplets de Pythagore avec $a>b$ et $A>B$, alors le triplet produit $(aA-bB\,;aB+bA\,;cC)$ est aussi un triplet de Pythagore.
3. On dit qu'un triplet de Pythagore est **premier** lorsqu'il ne peut pas être obtenu par produit de deux autres triplets de Pythagore.
   Démontrer que le triplet $(3,4,5)$ est premier
4. Déterminer tous les triplets (a,b,c) tels que :
   a. $c=5$
   b. $c=17$
5. Le triplet $(36;77;85)$ est-il premier ? Est-il primitif ?
6. Le triplet $(13;84;85)$ est-il premier ? Est-il primitif ?
7.
   a. Déterminer tous les triplets de Pythagore $(a;b;65)$.
   b. Préciser s'ils sont primitifs et premiers.

Exercice académique 2 (à traiter par groupe de 2 ou 3 par les candidats ayant suivi la spécialité de mathématiques de la voie générale)

<u>Carré des moyennes de Dirichlet</u>

Le but de ce problème est d'étudier les carrés des moyennes de Dirichlet.
On appelle carré des moyennes de Dirichlet (ou carré de Dirichlet) des tableaux comme les suivants :

	2	18	
20	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	8
10	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	8
	6	6	

Carré 2x2

	2	18	5	
20	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	5
10	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	10
10	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	10
	0	4	4	

Carré 3x3

où les $a_{i,j}$ sont *les variables inconnues* et doivent être la moyenne de leurs voisins horizontaux et verticaux.
Pour le coefficient $a_{i,j}$, l'entier *i* représente la ligne du tableau dans lequel il apparait, et l'indice *j* la colonne. Les coefficients extérieurs au carré sont donnés.
Par exemple, une solution possible aux carrés précédents est :

	2	18	
20	9	6	8
10	8	7	8
	6	6	

	2	18	5	
20	9	6	8	5
10	8	7	8	10
10	6	6	7	10
	0	4	4	

On a bien : $a_{1,1}=\dfrac{20+6+8+2}{4}=\dfrac{36}{4}=9$, par exemple.

1. Parmi les carrés suivants, lesquels sont des carrés de Dirichlet ?

	1	1	
1	1	1	1
1	1	1	1
	1	1	

Carré n° 1

	4	-8	
0	1	-1	0
0	1	3	0
	0	12	

Carré n° 2

	2	3	
0	2	7	4
0	1	5	3
	1	2	

Carré n° 3

2. Pourquoi les deux carrés suivants ont les mêmes solutions ?

	1	1	
4	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	5
0	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	2
	1	3	

	2	1	
3	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	5
0	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	2
	1	3	

3. En déduire 3 autres carrés de Dirichlet qui ont les mêmes solutions que les deux précédents.
   On pourra modifier à chaque fois 3 couples de coefficients extérieurs donnés différents.
4. On admet que les deux carrés ci-desous sont des carrés de Dirichlet :

	b_1	b_2	
b_8	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	b_3
b_7	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	b_4
	b_6	b_5	

	b_1'	b_2'	
b_8'	$a'_{1,1}$	$a'_{1,2}$	b_3'
b_7'	$a'_{2,1}$	$a'_{2,2}$	b_4'
	b_6'	b_5'	

   les b_i étant les coefficients extérieurs donnés.
   Sachant que r est un réel quelconque, démontrer que les deux carrés suivants sont également des carrés de Dirichlet (Indication : on pourra s'intéresser à un coefficient pour chacun des carrés ci-dessus, puis, généraliser) :

	$r\times b_1$	$r\times b_2$	
$r\times b_8$	$r\times a_{1,1}$	$r\times a_{1,2}$	$r\times b_3$
$r\times b_7$	$r\times a_{2,1}$	$r\times a_{2,2}$	$r\times b_4$
	$r\times b_6$	$r\times b_5$	

	b_1+b_1'	b_2+b_2'	
b_8+b_8'	$a_{1,1}+a_{1,1}'$	$a_{1,2}+a_{1,2}'$	b_3+b_3'
b_7+b_7'	$a_{2,1}+a_{2,1}'$	$a_{2,2}+a_{2,2}'$	b_4+b_4'
	b_6+b_6'	b_5+b_5'	

5. Notons M le maximum des 12 coefficients apparaissant dans un carré 2x2 de Dirichlet.
   Montrer que si le carré est du type :

	b_1	b_2	
b_8	M	$a_{1,2}$	b_3
b_7	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	b_4
	b_6	b_5	

alors c'est nécessairement le carré :

$$\begin{array}{c|c|c|c} & M & M & \\ \hline M & M & M & M \\ \hline M & M & M & M \\ \hline & M & M & \end{array}$$

6. En déduire que le maximum de tous les coefficients (intérieurs et extérieurs) est l'un des 8 coefficients extérieurs donnés. Que peut-on dire pour le minimum ?
7. En déduire qu'il existe une unique solution à ce carré de Dirichlet et la donner :

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 0 & 0 & \\ \hline 0 & & & 0 \\ \hline 0 & & & 0 \\ \hline & 0 & 0 & \end{array}$$

8. En déduire également que, pour chaque carré de Dirichlet où les coefficients extérieurs sont donnés, il existe une unique solution, c'est-à-dire, un unique choix pour les coefficients intérieurs. On pourra utiliser les questions 7 et 4.

9. On donne les 4 carrés suivants :

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 1 & 0 & \\ \hline 0 & \frac{7}{24} & \frac{2}{24} & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ \hline & 0 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c|c} & 0 & 1 & \\ \hline 0 & \frac{2}{24} & \frac{7}{24} & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{24} & \frac{2}{24} & 0 \\ \hline & 0 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c|c} & 0 & 0 & \\ \hline 0 & \frac{2}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ \hline 1 & \frac{7}{24} & \frac{2}{24} & 0 \\ \hline & 0 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c|c} & 0 & 0 & \\ \hline 0 & \frac{1}{24} & \frac{2}{24} & 0 \\ \hline 0 & \frac{2}{24} & \frac{7}{24} & 1 \\ \hline & 0 & 0 & \end{array}$$

En déduire les deux solutions aux carrés suivants :

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 4 & 2 & \\ \hline 1 & & & 2 \\ \hline 1 & & & 1 \\ \hline & 1 & 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c|c} & 3 & 2 & \\ \hline 7 & & & 2 \\ \hline 3 & & & 0 \\ \hline & 1 & 2 & \end{array}$$

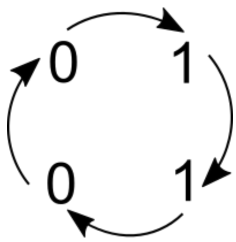
Exercice académique 3 (à traiter par groupe de 2 ou 3 par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de la voie générale)

<u>Anneaux ouroboriques</u>

L'ouroboros est un dessin ou un objet représentant un serpent ou un dragon qui se mord la queue.

<u>Exemple avec les doublets</u>

On considère tous les doublets constitués des chiffres 0 et 1. Il y a en a quatre : 00, 01, 10 et 11.
Un anneau ouroborique est une série de 4 chiffres dans laquelle chaque doublet apparaît une et une seule fois en le parcourant en se déplaçant d'un rang vers la droite.



On peut placer les anneaux côte à côte pour obtenir une suite infinie de chiffres. Dans cette suite, on trouvera une répétition de tous les doublets possibles.
Par exemple : 0110 est un anneau ouroborique

	0	**1**	**1**	**0**	*0*	*1*	*1*
On commence par le 1^{er} chiffre.	**0**	**1**					
Ensuite on se décale d'un rang vers la droite.		**1**	**1**				
Puis encore un rang vers la droite.			**1**	**0**			
Et enfin, pour le dernier chiffre, on colle l'anneau à droite pour continuer le parcours.				**0**	**0**		
					0	...	

On trouve les 4 doublets par le parcours de l'anneau.

A. Anneaux ouroboriques

I. Doublets

a. Les suites de chiffres suivantes sont-elles des anneaux ouroboriques ?
   a. 0010   b. 0101   c. 1001
b. Donner un autre anneau ouroborique.
c. Combien d'anneaux ouroboriques existe-t-il ? Donnez-en la liste.

II. Triplets

On considère maintenant les triplets constitués de 3 chiffres parmi 0 et 1. Par exemple 011 est un triplet.

1. Combien de triplets existe-t-il ? Donnez-en la liste.

Nous allons considérer les anneaux ouroboriques sur les triplets. Ce sont des séries de 8 chiffres dans laquelle chaque triplet apparaît une et une seule fois en le parcourant en se déplaçant d'un rang vers la droite.

2. Démontrer que 01110010 et 11001011 ne sont pas des anneaux ouroboriques.
3. Donner un anneau ouroborique.

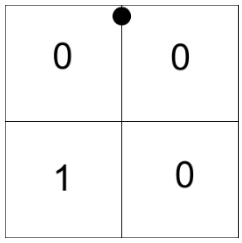
4. Montrer qu'une série de chiffres constituée de trois « 0 » et cinq « 1 » ne peut pas être un anneau ouroboriques.
5. De combien de « 0 » et de « 1 » est constitué un anneau ouroborique ?
6. Combien existe-t-il d'anneau ouroboriques (sur les triplets) différents ?
   Pour cette question, on considèrera que deux anneaux ouroboriques sont identiques si l'on peut retrouver un anneau dans l'autre anneau. Par exemple pour les doublets : 1011 et 1110 sont considérés comme identiques pour cette question.

III. Avec d'autres bases

On considère maintenant les doublets constitués de 2 chiffres parmi 0, 1 et 2. Par exemple 02 est un doublet valable.
Nous allons considérer les anneaux ouroboriques sur ces doublets. Ce sont des séries de chiffres dans laquelle chaque doublet apparaît une et une seule fois en le parcourant en se déplaçant d'un rang vers la droite.

a) Combien de doublets existe-t-il ? Donnez-en la liste.
b) Si un anneau ouroborique existe, quelle sera sa longueur ?
c) Donner un anneau ouroborique.
d) Combien de fois chacun des chiffres 0, 1 et 2 apparait-il ?

b. Ourotore



Passons à la dimension supérieure. Considérons des carrés de 2x2 cases marquées 0 ou 1. Un petit disque noir permettra de situer les deux carrés du haut comme sur la fiure ci-contre.

1. Combien de carrés différents existe-t-il ? Donnez-en la liste.
2. À partir de tous ces carrés, disposez-les sur une grille de façon à ce que :
1. L'ensemble constitue un grand carré
2. Chaque carré ait ses bordures avec les mêmes chiffres que ses voisins
3. La règle précédente doit aussi fonctionner avec les carrés au bord. De cette façon, si l'on enroule la grille sur elle-même, les carrés du haut toucheront ceux du bas (et auront les même chiffres) et les carrés de gauche toucheront ceux de droite (et auront aussi les même chiffres).

Cela constituera un ourotore, contraction de Ourobos et d'un Tore