OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE NICE 2022

SUJET DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

SUJET INDIVIDUEL

2022

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Voie générale

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Rappels pour les deux exercices du sujet

- Un **nombre premier** est un nombre entier naturel ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
- Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 50 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
- 1 n'est pas un nombre premier.

Exercice 1 : Nombres cousins

Dans cet exercice, on donne la définition suivante.

Deux nombres premiers $a < b$ sont **cousins** si leur différence $b - a$ est égale à 4. On dit alors qu'ils forment un **couple de nombres cousins** que l'on notera (a, b).

Partie A : ***Premières recherches***

1. Le nombre premier 2 admet-il un cousin ? Justifier.
2. Avec quels nombres premiers 7 est-il cousin ? Préciser les couples obtenus.
3. Déterminer tous les couples de nombres premiers cousins constitués d'entiers inférieurs à 50.

Partie B : ***Nature des couples***
On rappelle que :

- la division euclidienne d'un entier naturel a par 6 s'écrit : $a = 6 \times q + r$ où q et r sont les uniques entiers tels que $0 \leqslant r < 6$;
- q est le quotient et r est le reste de cette division euclidienne.

1. Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 5. Soit r le reste de la division euclidienne de a par 6.
   (a) Démontrer que si le reste r est égal à 0 ou 2 ou 3 ou 4, alors a n'est pas un nombre premier.
   (b) Démontrer que si le reste r est égal à 5, alors $a + 4$ n'est pas un nombre premier.
2. Démontrer alors que tous les couples d'entiers premiers cousins, excepté le couple $(3, 7)$, peuvent s'écrire sous la forme $(6q + 1, 6q + 5)$ où q désigne un entier naturel non nul.

Partie C : ***Étude des nombres compris entre deux cousins***
Pour répondre aux questions suivantes, on pourra utiliser le résultat de la question B.2 même s'il n'a pas été démontré.

1. Montrer que si (a, b) est un couple de nombres premiers cousins autre que $(3, 7)$ alors la moyenne m de ces deux nombres, donnée par $m = \dfrac{a + b}{2}$, est un nombre entier qui n'est pas premier.
2. On considère (a, b) un couple de nombres premiers cousins autre que $(3, 7)$. Démontrer que tous les entiers qui sont strictement compris entre a et b ne sont pas premiers.
3. Est-il possible d'obtenir trois entiers a, b et c tels que les couples (a, b) et (b, c) soient des couples de nombres premiers cousins et tels que $5 \leqslant a < b < c$? Justifier la réponse.

Partie D : *Langage Python*

En langage Python, on rappelle que, si `n` désigne un entier naturel non nul :

- l'instruction `range(1,n+1)` correspond à la liste des entiers naturels compris entre 1 et `n` inclus ;
- `n % k` est le reste dans la division euclidienne de l'entier `n` par un entier naturel non nul `k` ;
- `a == b` renvoie `True` si `a` et `b` sont égaux, `False` sinon.

On considère la fonction **`mystère`** écrite en langage Python prenant pour argument, en entrée, un entier naturel **`n`** non nul :

```
def mystère(n):
    compteur = 0
    for k in range(1, n + 1):
        if n % k == 0:
            compteur = compteur + 1
    return compteur == 2
```

Voici un exemple d'utilisation de cette fonction :

```
>>> mystère(7)
True
>>> mystère(155)
False
```

1. Préciser le rôle de la fonction `mystère`.
2. On souhaite programmer une fonction `cousins(n)`, où `n` désigne un entier naturel non nul, qui renvoie le nombre de couples d'entiers premiers cousins (a, b) tels que $b \leqslant$ `n`. Par exemple, un résultat attendu est :

   ```
   >>> cousins(2022)
   65
   ```

   Recopier et compléter la fonction `cousins(n)` ci-dessous. On pourra utiliser la fonction `mystère` introduite à la question précédente.

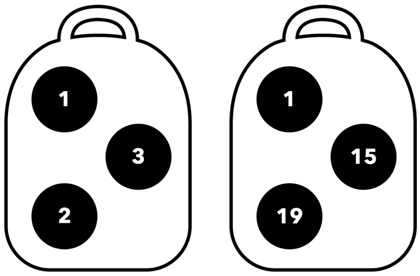
   ```
   def cousins(n):
       compteur = 0
       for a in range(...):
           if ... and ... :
               ...
       return compteur
   ```

À ce jour, il n'a pas été démontré qu'il existait une infinité de couples d'entiers premiers cousins malgré de fortes présomptions... Ce résultat a le statut actuel de conjecture.

Exercice 2 : Joli sac

Un sac contient plusieurs jetons, tous distincts. Sur chaque jeton est inscrit un nombre entier.
On convient de nommer « jeton n » le jeton sur lequel est écrit le nombre entier n.

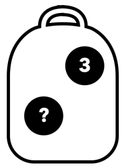
On dit que le sac est **joli** si, pour tous les couples de jetons du sac, la différence positive des nombres inscrits sur les jetons n'est pas un nombre premier.
On en déduit que le sac **n'est pas joli** s'il existe au moins un couple de jetons du sac dont la différence positive est un nombre premier.

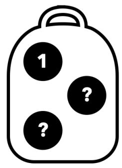


Le sac n'est pas joli. Le sac est joli.

Par exemple, le sac contenant les jetons 1, 2 et 3 « n'est pas joli » car $3 - 1 = 2$ et 2 est un nombre premier. En revanche, le sac contenant les jetons 1, 15 et 19 « est joli » car les différences positives sont $15 - 1 = 14$, $19 - 1 = 18$, $19 - 15 = 4$ et ni 14, ni 18, ni 4 ne sont des nombres premiers.

1. Dans cette question, on considère un sac contenant deux jetons : le jeton 3 et le jeton n.
   (a) Le sac est-il joli si $n = 2$?
   (b) Le sac est-il joli si $n = 5$?
   (c) Pour quelles valeurs de n, comprises entre 1 et 20 inclus, le sac est-il joli ?





2. Dans cette question, on considère un sac contenant trois jetons, dont le jeton 1. En choisissant deux autres jetons parmi les jetons 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, donner un exemple de sac « joli ».

3. En justifiant les réponses, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
   (a) Il est possible de faire un sac joli avec trois nombres premiers.
   (b) Si un sac de trois jetons est joli, alors il n'est plus joli si on lui retire un de ses jetons.
   (c) La somme des jetons d'un sac joli à trois jetons peut être un nombre premier.
   (d) Il existe un sac joli contenant exactement 5 nombres premiers.

4. On utilise uniquement les jetons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.
   (a) Quels sont tous les sacs jolis de deux jetons que l'on peut constituer ?
   (b) Prouver que si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.
   (c) Prouver que si un sac joli ne contient pas le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.
   (d) Est-il possible de constituer un sac joli avec trois jetons ?

5. (a) On dispose des seize jetons $1, 2, 3, \ldots, 16$. Combien peut-on en choisir au maximum pour que le sac soit joli ?
   (b) On dispose des deux-mille-vingt-deux jetons $1, 2, 3, \ldots, 2022$. Combien peut-on en choisir au maximum pour que le sac soit joli ?

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Voie technologique

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : Somme apparente

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième.

Des gobelets opaques contiennent des pièces de monnaie de 1€ et de 2€. On secoue les gobelets avant de les retourner sur une table. Pour chaque pièce, la probabilité d'obtenir *face* est égale à la probabilité d'obtenir *pile* et les tirages sont indépendants. Dans tout l'exercice, la *somme apparente* est égale à la somme des valeurs des pièces tombées sur *pile*.

Dans cet exemple, la *somme apparente* est $5 \times 1€ + 4 \times 2€ = 13€$.

Partie A : avec des pièces de 1€

1. On utilise deux gobelets contenant deux pièces de 1€ chacun. On secoue les gobelets et on les retourne sur la table.
   (a) La somme apparente peut-elle être égale à 5€ ?
   (b) Calculer la probabilité que la somme apparente soit égale à 4€.
   (c) Quelle est la probabilité que la somme apparente soit supérieure ou égale à 3€ ?
2. On utilise deux gobelets contenant deux pièces de 1€ chacun. On secoue les gobelets et on les retourne sur la table. On soulève un seul des deux gobelets : la somme apparente de ses pièces est égale à 1€. Quelle est la probabilité que la somme apparente des quatre pièces sur la table soit égale à 3€ ?

Dans toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser le tableau de probabilités ci-dessous. On rappelle que toutes les probabilités sont arrondies au millième.

	0 « pile »	1 « pile »	2 « pile »	3 « pile »	4 « pile »	5 « pile »	6 « pile »	7 « pile »	8 « pile »	9 « pile »
Avec 9 pièces	0,002	0,018	0,070	0,164	0,246	0,246	0,164	0,070	0,018	0,002
Avec 8 pièces	0,004	0,031	0,109	0,219	0,273	0,219	0,109	0,031	0,004	0
Avec 7 pièces	0,008	0,055	0,164	0,273	0,273	0,164	0,055	0,008	0	0
Avec 6 pièces	0,016	0,094	0,234	0,313	0,234	0,094	0,016	0	0	0
Avec 5 pièces	0,031	0,156	0,313	0,313	0,156	0,031	0	0	0	0
Avec 4 pièces	0,063	0,250	0,375	0,250	0,063	0	0	0	0	0

Exemple de lecture : en lançant 7 pièces de monnaie, la probabilité d'obtenir 5 faces est environ égale à 0,164.

3. Pour cette question, on utilise trois gobelets contenant trois pièces de 1€. On les secoue et on les retourne sur la table.

   (a) Calculer la probabilité que la somme apparente soit inférieure ou égale à 5€.

   (b) On recommence l'expérience et on soulève un seul des trois gobelets : sous celui-ci, on dénombre deux "pile" et une "face". Quelle est la probabilité que la somme apparente des neuf pièces sur la table soit inférieure ou égale à 5€ ?

Partie B : avec des pièces de 1€ et de 2€

1. On utilise deux gobelets : chacun a une pièce de 1€ et une pièce de 2€. On les secoue et on les retourne sur la table.

   (a) Quelle est la probabilité que la somme apparente soit égale à 5€ ?

   (b) Quelle est la probabilité que la somme apparente soit supérieure ou égale à 4€ ?

   (c) On recommence l'expérience puis on soulève l'un des deux gobelets : la somme apparente de ses pièces est égale à 2€. Quelle est la probabilité que la somme apparente des quatre pièces sur la table soit inférieure ou égale à 4€ ?

2. On utilise quatre gobelets contenant chacun une pièce de 1€ et une pièce de 2€. On les secoue et on les retourne sur la table.

   (a) Quelle est la probabilité que la somme apparente soit égale à 8€ ?

   (b) On recommence l'expérience puis on soulève l'un des quatre gobelets : la somme apparente de ses pièces est égale à 3€. Quelle est la probabilité que la somme apparente des huit pièces sur la table soit égale à 8€ ?

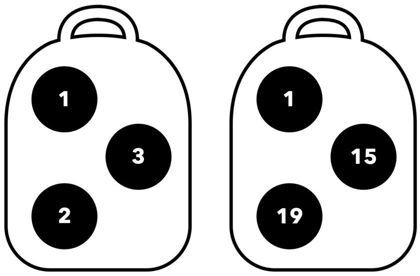
Exercice 2 : Des jetons et des sacs

On rappelle qu'un nombre premier est un nombre entier naturel ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 50 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. On rappelle que 1 n'est pas un nombre premier.

Un sac contient plusieurs jetons, tous distincts. Sur chaque jeton est inscrit un nombre entier.
On convient de nommer « jeton n » le jeton sur lequel est écrit le nombre entier n.

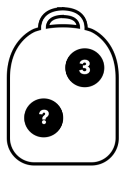
On dit que le sac est **joli** si, pour tous les couples de jetons du sac, la différence positive des nombres inscrits sur les jetons n'est pas un nombre premier. On en déduit que le sac **n'est pas joli** s'il existe au moins un couple de jetons du sac dont la différence positive est un nombre premier.



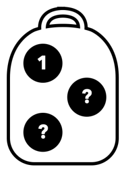
Le sac n'est pas joli. Le sac est joli.

Par exemple, le sac contenant les jetons 1, 2 et 3 « n'est pas joli » car $3 - 1 = 2$ et 2 est un nombre premier. En revanche, le sac contenant les jetons 1, 15 et 19 « est joli » car les différences positives sont $15 - 1 = 14$, $19 - 1 = 18$, $19 - 15 = 4$ et ni 14, ni 18, ni 4 ne sont des nombres premiers.

1. Dans cette question, on considère un sac contenant deux jetons : le jeton 3 et le jeton n.
   (a) Le sac est-il joli si $n = 2$?
   (b) Le sac est-il joli si $n = 5$?
   (c) Pour quelles valeurs de n, comprises entre 1 et 20 inclus, le sac est-il joli ?



2. Dans cette question, on considère un sac contenant trois jetons, dont le jeton 1. En choisissant deux autres jetons parmi les jetons 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, donner un exemple de sac « joli ».



3. En justifiant les réponses, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
   (a) Il est possible de faire un sac joli avec trois nombres premiers.
   (b) Si un sac de trois jetons est joli, alors il n'est plus joli si on lui retire un de ses jetons.
   (c) La somme des jetons d'un sac joli à trois jetons peut être un nombre premier.
   (d) Il existe un sac joli contenant exactement 5 nombres premiers.
4. On utilise uniquement les jetons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.
   (a) Quels sont tous les sacs jolis de deux jetons que l'on peut constituer ?
   (b) Prouver que si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.
   (c) Prouver que si un sac joli ne contient pas le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.
   (d) Est-il possible de constituer un sac joli avec trois jetons ?

SUJET PAR ÉQUIPES

2022

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Voie générale

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : Nombres cousinades

On rappelle que :

- Un **nombre premier** est un nombre entier naturel ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
- Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 50 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
- 1 n'est pas un nombre premier.
- Un nombre entier naturel non nul peut s'écrire sous la forme d'un **produit de nombres premiers** (éventuellement égaux). De plus, cette écriture est unique à l'ordre près des facteurs.
- Par exemple, $5 \times 5 \times 7$ est l'unique manière d'écrire 175 sous la forme d'un produit de nombres premiers à l'ordre près des facteurs.

Dans cet exercice, on donne la définition suivante :

- On appelle **nombre cousinade** un nombre entier naturel n qui s'écrit sous la forme $n = a \times (a+4)$ où a et $a+4$ sont deux nombres premiers.

Partie A : *Premières recherches*

1. Démontrer que 77 est un nombre cousinade.
2. Démontrer que 141 n'est pas un nombre cousinade.
3. Existe-t-il un nombre cousinade qui soit un nombre pair ? Justifier.
4. En utilisant la liste des nombres premiers, donner les quatre plus petits nombres cousinades.

Partie B : *Test*

1. Soit n un nombre cousinade tel que $n = a \times (a+4)$ où a et $a+4$ sont des nombres premiers.
   (a) Démontrer que l'on a : $n + 4 = (a+2)^2$.
   (b) En déduire que l'on a : $a = \sqrt{n+4} - 2$.
2. En s'aidant de la question B.1 et en explicitant la démarche, dire pour chacun des nombres suivants s'il est un nombre cousinade :

2021, 2022, 2112

Partie C : *Implémentation du test*

En langage Python, on rappelle que si `a` désigne un entier naturel non nul :

- l'instruction `range(1,a+1)` correspond à la liste des entiers naturels compris entre 1 et `a` inclus ;
- `a % d` est le reste dans la division euclidienne de l'entier `a` par un entier naturel non nul `d` ;
- `a == b` renvoie `True` si `a` et `b` sont égaux, `False` sinon.

On considère la fonction **mystère** écrite en langage Python prenant pour argument, en entrée, un entier naturel **a** non nul :

```
def mystère(a):
    compteur = 0
    for d in range(1, a + 1):
        if a % d == 0:
            compteur = compteur + 1
    return compteur == 2
```

Voici un exemple d'utilisation de cette fonction :

```
>>> mystère(7)
True
>>> mystère(155)
False
```

1. Préciser le rôle de la fonction `mystère`.

On dispose des deux instructions suivantes :

- l'instruction `est_entier(x)` retourne `True` si le nombre `x` est un nombre entier naturel et `False` dans le cas contraire ;
- l'instruction `racine_carree(x)` calcule une valeur approchée de $\sqrt{x}$ où `x` est un nombre réel positif.

2. Soit `n` un entier naturel non nul. Recopier et proposer la suite de la fonction `est_cousinade(n)` qui renvoie `True` si `n` est un nombre cousinade et `False` sinon. On pourra utiliser la fonction `mystère` et les deux instructions précédentes.

```
def est_cousinade(n):
    ...
```

Partie D : *Tentative de recherche d'une expression*

On rappelle que :

- la division euclidienne d'un entier naturel a par 6 s'écrit : $a = 6 \times q + r$ où q et r sont les uniques entiers tels que $0 \leqslant r < 6$;
- q est le quotient et r est le reste de cette division euclidienne.

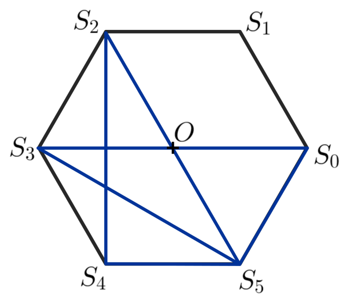
1. Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 5. Soit r le reste de la division euclidienne de a par 6.
   (a) Démontrer que si le reste r est égal à 0 ou 2 ou 3 ou 4, alors a n'est pas un nombre premier.
   (b) Démontrer que si le reste r est égal à 5, alors $a + 4$ n'est pas un nombre premier.
2. Soit n un nombre cousinade dont les facteurs premiers sont a et $a + 4$ tels que $a \geqslant 5$.
   Démontrer alors que l'on a $n = 36q^2 + 36q + 5$ où $q > 0$.
3. Est-il vrai que pour tout entier naturel q non nul, le nombre $36q^2 + 36q + 5$ est un nombre cousinade ? Justifier.

Exercice 2 : Triplangles

Dans tout l'exercice :

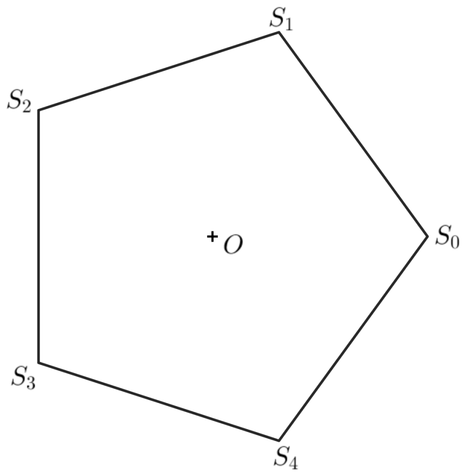
- N est un nombre entier supérieur ou égal à 3.
- a, b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leqslant a < b < c \leqslant N-1$.
- P_N est un polygone régulier à N côtés dont les sommets sont successivement nommés S_0, S_1, ..., S_{N-1} et O son centre.
- $S_aS_bS_c$ est un triangle dont les sommets sont des sommets de P_N.
- Deux triangles sont « de la même famille » s'ils sont superposables.

Par exemple, dans le polygone régulier P_6 ci-contre, sont représentés les triangles $S_2S_4S_5$ et $S_0S_3S_5$. Les triangles $S_2S_4S_5$ et $S_0S_3S_5$ sont superposables : ils sont « de la même famille ».



Partie A : Étude géométrique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$. Pour chaque question, **aucune justification n'est attendue**.



1. Les triangles $S_1S_3S_4$ et $S_0S_2S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
2. Les triangles $S_1S_2S_3$ et $S_0S_2S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
3. Citer les triangles « de la même famille » que $S_1S_3S_4$.
4. (a) Combien de triangles peut-on tracer en reliant des sommets de P_5 ?

   (b) On souhaite tracer ces triangles en respectant les règles suivantes :

   - si deux triangles sont « de la même famille » alors ils sont tracés avec la même couleur ;
   - si deux triangles ne sont pas « de la même famille » alors ils sont tracés avec des couleurs différentes.

   Combien de couleurs faut-il utiliser pour tracer tous les triangles dont les sommets sont les sommets de P_5 ?

On rappelle que a, b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leqslant a < b < c \leqslant N-1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la définition suivante.

Le nombre entier $T_{a,b,c}$, appelé N-triplangle, est défini par :

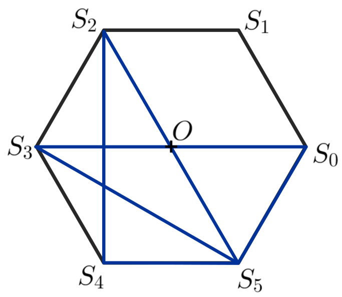
$$T_{a,b,c} = aN^2 + bN + c$$

On admet que :

- à tout triangle $S_aS_bS_c$ on associe l'unique N-triplangle $T_{a,b,c}$;
- réciproquement, tout N-triplangle $T_{a,b,c}$ est associé à un unique triangle $S_aS_bS_c$.

Par exemple, pour $N = 6$:

- le 6-triplangle associé au triangle $S_2S_4S_5$ est $T_{2,4,5} = 2 \times 6^2 + 4 \times 6 + 5 = 101$.
- le 6-triplangle associé au triangle $S_0S_3S_5$ est $T_{0,3,5} = 0 \times 6^2 + 3 \times 6 + 5 = 23$.



Partie B : Étude numérique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$.

1. Calculer le 5-triplangle $T_{1,2,3}$.
2. Quel 5-triplangle est associé au triangle de l'annexe 1 ?
3. (a) Quel triangle est associé au 5-triplangle 44 ?
   (b) Tracer ce triangle sur l'annexe 1 à rendre avec la copie.
   (c) Quelle est la nature de ce triangle ?
4. Le nombre 73 est-il un 5-triplangle ? Justifier.
5. Déterminer tous les 5-triplangles.

Partie C : Étude de P_{10}

Dans cette partie, on considère $N = 10$.

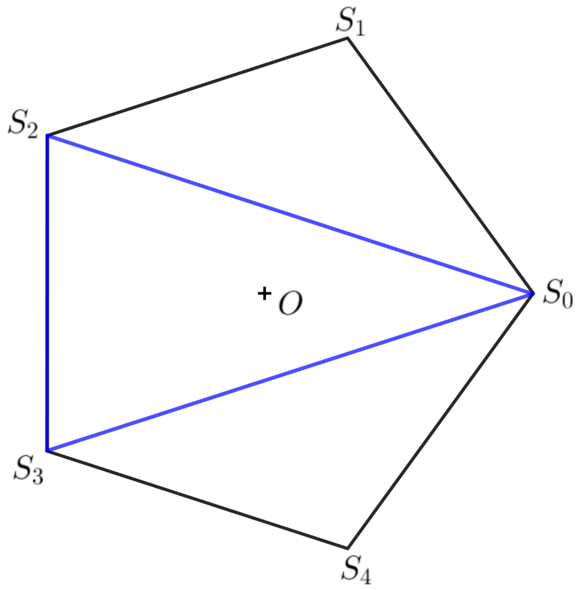
P_{10} est un polygone régulier à 10 côtés dont les sommets sont successivement nommés S_0, S_1, ..., S_9 : ce polygone est représenté dans les annexes 2 et 3 **à rendre avec la copie**. Pour les recherches, une planche de 6 polygones P_{10} est fournie en page 7 : elle **n'est pas à rendre avec la copie**.

1. (a) Quel est le triangle associé au 10-triplangle 19 ?
   (b) Sur l'annexe 2, tracer ce triangle ainsi que tous ceux « de la même famille » que celui-ci.
2. (a) Quel est le triangle associé au 10-triplangle 256 ?
   (b) Sur l'annexe 3, tracer ce triangle ainsi que tous ceux « de la même famille » que celui-ci.
3. Montrer que l'on peut tracer 120 triangles en reliant des sommets de P_{10}.
4. En respectant les mêmes règles qu'à la question A. 4. (b), combien de couleurs faut-il utiliser pour tracer tous les triangles dont les sommets sont les sommets de P_{10} ?

Annexes de l'exercice 2
À remettre avec la copie

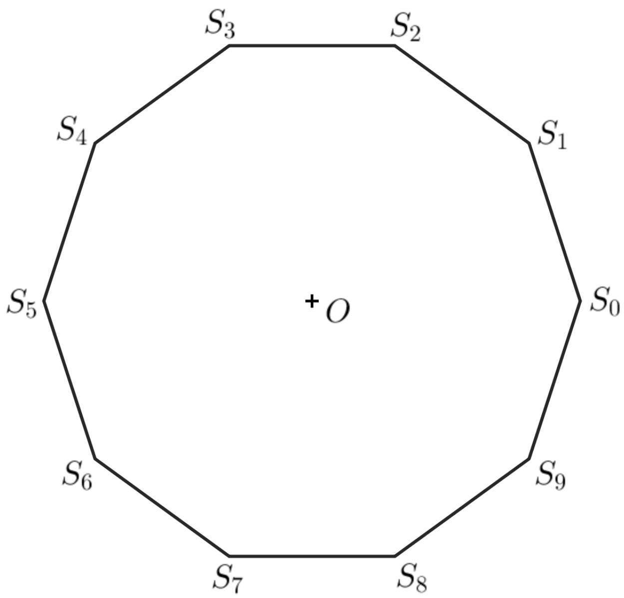
Annexe 1

Exercice 2, questions B.2 et B.3.(b)



Annexe 2

Exercice 2, question C.1.(b)



Annexe 3

Exercice 2, question C.2.(b)

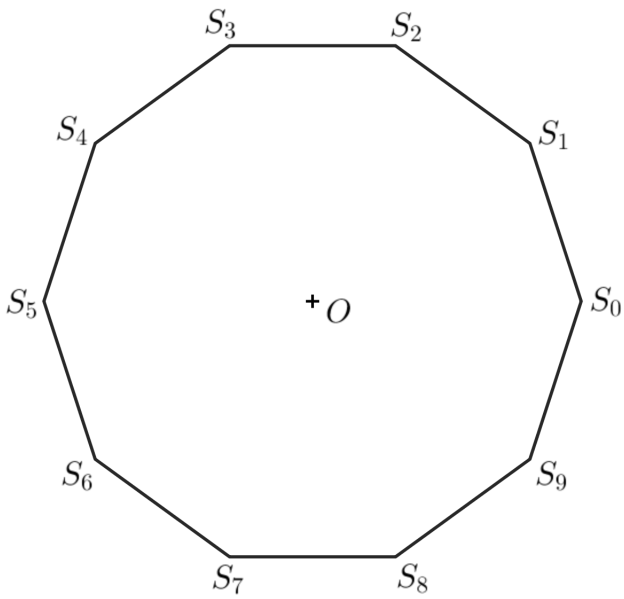
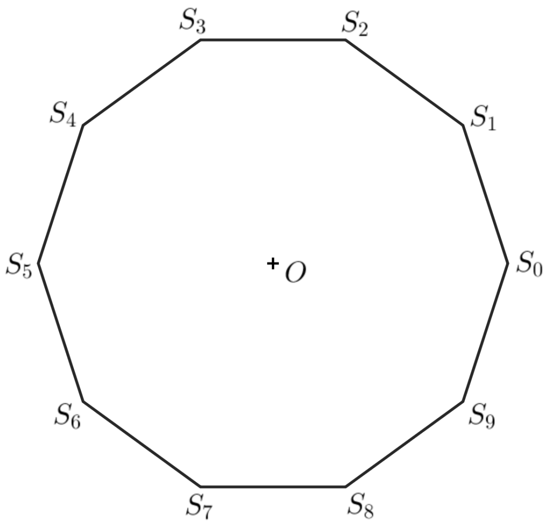
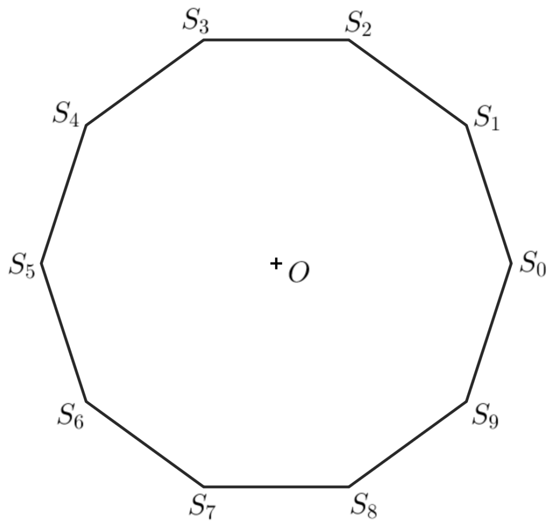
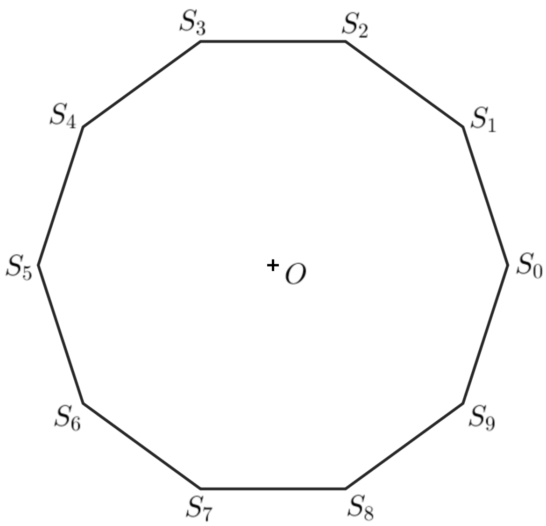
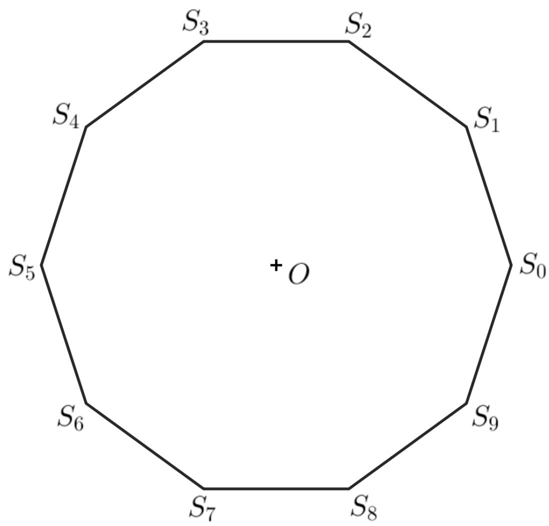


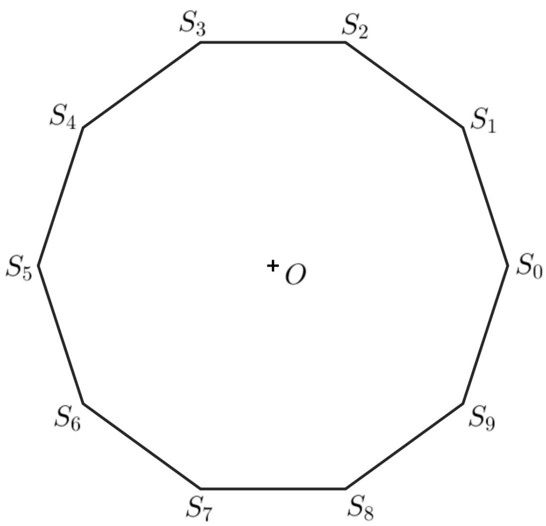
Planche de polygones pour l'exercice 2 - Partie C
À ne pas remettre avec la copie

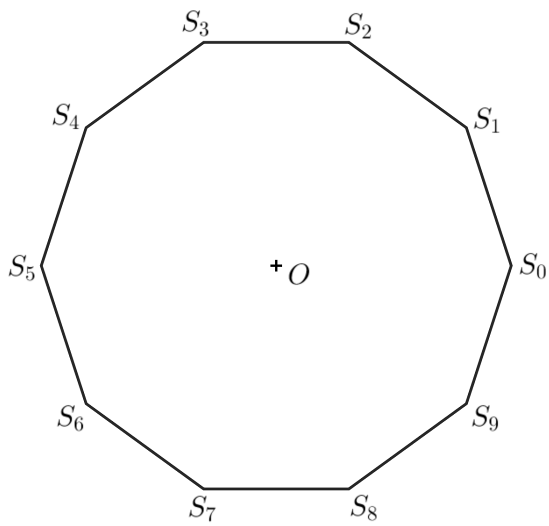












Olympiades nationales de mathématiques 2022

Voie technologique

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : Bataille d'intelligences artificielles

Un informaticien programme deux intelligences artificielles que l'on désignera par IA1 et IA2.

Dans tout l'exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Dans un tableau à 2 lignes et N colonnes, IA1 coche au hasard des cases sur la première ligne horizontale et IA2 coche, sans connaître le choix de IA1, des cases encore au hasard sur la deuxième ligne.

Si deux cases de la même colonne sont cochées alors IA2 a gagné et IA1 a perdu. Dans le cas contraire, IA1 a gagné et IA2 a perdu.

Les résultats pourront être justifiés en utilisant un tableau de deux lignes sur le modèle ci-contre. Dans cet exemple, $N = 4$, IA2 a gagné et IA1 a perdu.

IA1 $\rightarrow$	$\times$	$\times$		
IA2 $\rightarrow$	$\times$			

Partie A - Les choix de IA1

1. Sur sa ligne horizontale de N cases, IA1 coche **deux cases adjacentes** c'est-à-dire **l'une à côté de l'autre**.
   (a) Dans cette question, $N = 4$. Combien y a-t-il de possibilités pour cocher ces deux cases ?
   (b) Dans cette question, $N = 6$. Combien y a-t-il de possibilités pour cocher ces deux cases ?

2. On note $D_1(N)$ le nombre de possibilités de cocher deux cases adjacentes.
   (a) Que vaut $D_1(2)$?
   (b) Exprimer $D_1(N)$ en fonction de N. On acceptera la réponse sans démonstration.

3. Dans cette question, N est un entier naturel supérieur ou égal à 4. Sur sa ligne horizontale de N cases, IA1 coche **deux cases adjacentes** puis, parmi les cases restantes, il coche de nouveau **deux cases adjacentes**. On note $D_2(N)$ le nombre de possibilités de cocher ainsi ces quatre cases.
   (a) Que vaut $D_2(4)$?
   (b) Justifier que $D_2(5) = 3$.
   (c) Que vaut $D_2(7)$?

Partie B - Au tour de IA2

Désormais, on s'intéresse aux parties différentes possibles entre IA1 et IA2.

Situation 1 : IA1 coche au hasard **deux cases adjacentes** sur sa ligne et IA2 coche au hasard **une seule case** sur sa ligne.

1. (a) Dans cette question, $N = 3$. Justifier que 6 parties différentes sont possibles.
   En déduire la probabilité que IA2 gagne dans ce cas.
   (b) Dans cette question, $N = 4$. Sur l'annexe à rendre avec la copie, représenter toutes les parties différentes possibles. En déduire la probabilité que IA2 gagne.

2. Désormais, N est un entier naturel supérieur ou égal à 4.

   (a) Justifier que $(N-1) \times N$ parties différentes sont possibles.

   (b) Quelle est la probabilité que IA2 gagne la partie si la case cochée par IA2 est dans la première colonne ?

   (c) Quelle est la probabilité que IA2 gagne la partie ?

Situation 2 : sur sa ligne, IA1 coche **deux cases adjacentes** puis, parmi les cases restantes, il coche de nouveau **deux cases adjacentes**. IA2 coche au hasard **une seule case** sur sa ligne.

3. Dans cette question, $N = 5$.

   (a) Justifier que 15 parties sont possibles.

   (b) Montrer que la probabilité que IA2 gagne est $\dfrac{4}{5}$.

4. Dans cette question, $N = 6$.

   (a) Combien y a-t-il de parties possibles ?

   (b) Justifier que, si la case cochée par IA2 est dans la première colonne, il y a 3 parties perdantes pour IA2.

   (c) Montrer que, si la case cochée par IA2 n'est pas dans la première colonne, il y a encore 9 parties perdantes pour IA2.

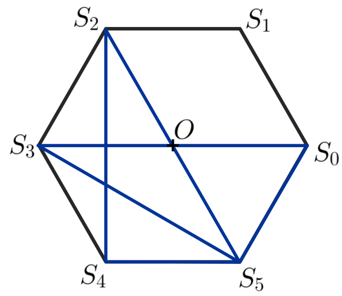
   (d) Qui de IA1 ou IA2 a le plus de chance de gagner ?

Exercice 2 : Triangles en couleurs

Dans tout l'exercice :

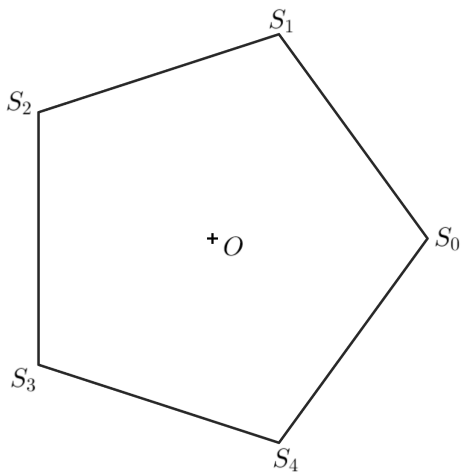
- N est un nombre entier supérieur ou égal à 3.
- a, b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leqslant a < b < c \leqslant N-1$.
- P_N est un polygone régulier à N côtés dont les sommets sont successivement nommés S_0, S_1, ..., S_{N-1} et O son centre.
- $S_aS_bS_c$ est un triangle dont les sommets sont des sommets de P_N.
- Deux triangles sont « de la même famille » s'ils sont superposables.

Par exemple, dans le polygone régulier P_6 ci-contre, sont représentés les triangles $S_2S_4S_5$ et $S_0S_3S_5$. Les triangles $S_2S_4S_5$ et $S_0S_3S_5$ sont superposables : ils sont « de la même famille ».



Partie A : Étude géométrique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$. Pour chaque question, **aucune justification n'est attendue**.



1. Les triangles $S_1S_3S_4$ et $S_0S_2S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
2. Les triangles $S_1S_2S_3$ et $S_0S_2S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
3. Citer les triangles « de la même famille » que $S_1S_3S_4$.
4. (a) Combien de triangles peut-on tracer en reliant des sommets de P_5 ?

   (b) On souhaite tracer ces triangles en respectant les règles suivantes :

   - si deux triangles sont « de la même famille » alors ils sont tracés avec la même couleur ;
   - si deux triangles ne sont pas « de la même famille » alors ils sont tracés avec des couleurs différentes.

   Combien de couleurs faut-il utiliser pour tracer tous les triangles dont les sommets sont les sommets de P_5 ?

On rappelle que a, b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leqslant a < b < c \leqslant N-1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la définition suivante.

Le nombre entier $T_{a,b,c}$, appelé N-triplangle, est défini par :

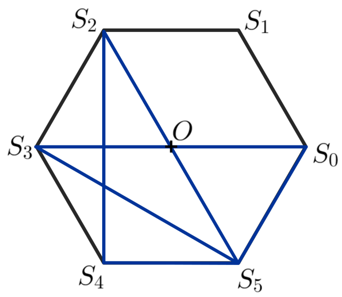
$$T_{a,b,c} = aN^2 + bN + c$$

On admet que :

- à tout triangle $S_aS_bS_c$ on associe l'unique N-triplangle $T_{a,b,c}$;
- réciproquement, tout N-triplangle $T_{a,b,c}$ est associé à un unique triangle $S_aS_bS_c$.

Par exemple, pour $N = 6$:

- le 6-triplangle associé au triangle $S_2S_4S_5$ est $T_{2,4,5} = 2 \times 6^2 + 4 \times 6 + 5 = 101$.
- le 6-triplangle associé au triangle $S_0S_3S_5$ est $T_{0,3,5} = 0 \times 6^2 + 3 \times 6 + 5 = 23$.



Partie B : Étude numérique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$.

1. Calculer le 5-triplangle $T_{1,2,3}$.
2. Quel 5-triplangle est associé au triangle de l'annexe 1 ?
3. (a) Quel triangle est associé au 5-triplangle 44 ?
   (b) Tracer ce triangle sur l'annexe 1 à rendre avec la copie.
   (c) Quelle est la nature de ce triangle ?
4. Le nombre 73 est-il un 5-triplangle ? Justifier.
5. Déterminer tous les 5-triplangles.

Annexes - À rendre avec la copie

Annexe - Exercice 1 - Partie B, question 1.(b)

IA1 →					IA1 →					IA1 →				
IA2 →					IA2 →					IA2 →				

IA1 →					IA1 →					IA1 →				
IA2 →					IA2 →					IA2 →				

IA1 →					IA1 →					IA1 →				
IA2 →					IA2 →					IA2 →				

IA1 →					IA1 →					IA1 →				
IA2 →					IA2 →					IA2 →				

Annexe - Exercice 2 - Partie B, question 2 et question 3. (b)