OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE NICE 2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

SUJET INDIVIDUEL

2021

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Voie générale

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : b.a.-ba

Dans cet exercice, on définit la suite de mots (M_n) constitués uniquement des lettres a et b par :

- Un premier terme M_0.
- Et pour tout entier naturel n, le mot M_{n+1} se construit à partir du mot M_n en remplaçant tous les a par ab et tous les b par bab.

Par exemple, si $M_0 = a$, on obtient alors $M_1 = ab$, $M_2 = abbab$, $M_3 = abbabbababbab$ et ainsi de suite.
L'objectif de cet exercice est d'étudier le nombre de lettres a et b qui constituent le mot M_n.

1. Dans cette question, on suppose $M_0 = b$. Déterminer les mots M_1, M_2 et M_3.
2. (a) On se donne $M_1 = bababbabab$. Déterminer alors M_0.
   (b) Est-il possible d'avoir $M_1 = bbaa$? Justifier la réponse.
3. Pour tout entier naturel n, on note :
   - a_n le nombre de a dans le mot M_n ;
   - b_n le nombre de b dans le mot M_n ;
   - ℓ_n le nombre de lettres dans le mot M_n.

   Par exemple, si $M_0 = a$, on obtient alors : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \\ \ell_0 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \\ \ell_1 = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} a_2 = 2 \\ b_2 = 3 \\ \ell_2 = 5 \end{cases}$, $\begin{cases} a_3 = 5 \\ b_3 = 8 \\ \ell_3 = 13 \end{cases}$ etc.

   (a) Dans le cas où $M_0 = b$, déterminer toutes les valeurs de a_n, b_n et ℓ_n pour n entier naturel allant de 0 à 3.
   (b) On remarque que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = a_n + b_n$. Justifier cette relation.
   (c) Pour tout entier naturel n, exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

4. On souhaite écrire une fonction « `calcul` », écrite en langage Python, prenant comme arguments les nombres entiers naturels a_0, b_0 et n, et devant retourner les valeurs de a_n et b_n.
   Maxime propose la fonction ci-contre.
   On rappelle que l'instruction `range(n)`, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1, correspond à la liste des entiers naturels compris entre 0 et `n-1` inclus.

```
def calcul(a0, b0, n):
    a = a0
    b = b0
    for k in range(n):
        a = a + b
        b = a + 2 * b
    return a, b
```

   Voici un exemple d'utilisation de la fonction proposée par Maxime :

```
>>> calcul(1, 0, 3)
(6, 14)
```

   (a) Est-ce que la fonction proposée par Maxime renvoie les valeurs attendues dans le cas où $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $n = 3$? Justifier la réponse.
   (b) Proposer une version corrigée de cette fonction afin qu'elle retourne les valeurs attendues de a_n et b_n.
5. Sachant que le mot M_9 est composé de 10 946 lettres et que le mot M_{10} est composé de 28 657 lettres, déterminer pour chacun des mots M_9 et M_{10}, le nombre de lettres a et le nombre de lettres b dont ils sont constitués.
6. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a la relation :

$$\ell_{n+2} = 3\ell_{n+1} - \ell_n$$

7. (a) Soient λ et μ des nombres réels.
Soient x_1 et x_2 des nombres réels distincts tels que ${x_1}^2 = 3x_1 - 1$ et ${x_2}^2 = 3x_2 - 1$.
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \lambda {x_1}^n + \mu {x_2}^n$.
Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) vérifie l'égalité :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n \qquad (*)$$

On admet réciproquement que si une suite (u_n) vérifie la relation (*) alors elle pourra s'écrire sous la forme $u_n = \lambda {x_1}^n + \mu {x_2}^n$.

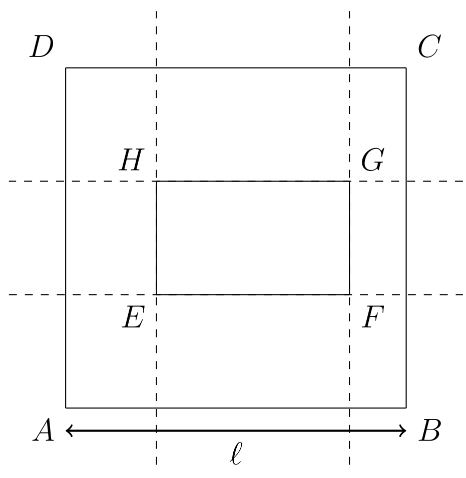
(b) On suppose dans cette question que $M_0 = baba$. Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de ℓ_n en fonction de n.

Exercice 2 : Teneur en or d'un carré

Préambule :

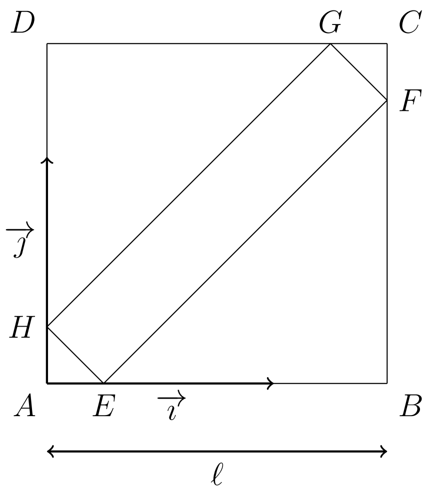
- On appelle **nombre d'or**, noté Φ, la solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$.
- On appelle **rectangle d'or** tout rectangle dont la largeur vaut a et la longueur $a \times \Phi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.
- On admet le résultat suivant :
On se place dans un carré $ABCD$ de côté de longueur $\ell > 0$. Parmi tous les rectangles d'or inclus dans le carré $ABCD$, il en existe un dont l'aire est plus grande que celle de tous les autres. Ce rectangle est noté $\mathcal{R}$ et on définit la **teneur en or** T du carré $ABCD$ par le rapport suivant :
$$T = \frac{\text{Aire}(\mathcal{R})}{\text{Aire}(ABCD)}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = x + 1$ et montrer que $\Phi > 1$.
2. On s'intéresse tout d'abord aux rectangles dont un côté est le côté $[AB]$.
   (a) Montrer qu'il n'existe qu'un seul rectangle d'or $\mathcal{R}_1$ de ce type.
   (b) Calculer alors le rapport $\dfrac{\text{Aire}(\mathcal{R}_1)}{\text{Aire}(ABCD)}$. Le comparer à T.
3. Dans cette question, on s'intéresse aux rectangles $EFGH$ inclus dans le carré $ABCD$ dont les côtés sont parallèles aux côtés du carré (voir la figure ci-contre). On admet qu'il suffit de s'intéresser aux rectangles tels que $EF \geqslant EH$.



   (a) Montrer que $0 \leqslant EH \leqslant \dfrac{\ell}{\Phi}$.
   (b) Déterminer les dimensions du rectangle d'or $\mathcal{R}_2$ d'aire maximale de ce type.
   (c) En déduire que $\text{Aire}(\mathcal{R}_2) = \dfrac{\ell^2}{\Phi}$.
   (d) Calculer le rapport $\dfrac{\text{Aire}(\mathcal{R}_2)}{\text{Aire}(ABCD)}$.
   (e) Que peut-on en conclure sur la teneur en or T du carré $ABCD$?

4. Dans cette question, on s'intéresse aux rectangles $EFGH$ inclus dans le carré $ABCD$ tels que $E \in [AB]$, $F \in [BC]$, $G \in [CD]$ et $H \in [AD]$.
On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ ci-dessous.
On note x l'abscisse du point E et y l'ordonnée du point H.



On admet que les coordonnées du point G sont $G\,(\ell - x; \ell)$.

(a) On souhaite calculer EG^2 de deux manières différentes.

i. En utilisant l'expression de la distance entre les points E et G dans un repère orthonormé, montrer que $EG^2 = (\ell - 2x)^2 + \ell^2$.

ii. En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que $EG^2 = (\ell - x)^2 + (\ell - y)^2 + x^2 + y^2$.

(b) En déduire que $(y - x)(x + y - \ell) = 0$.

(c) Dans cette question, on suppose que le rectangle $EFGH$ est un rectangle d'or, noté $\mathcal{R}_3$. Montrer que :

$$\frac{\text{Aire}(\mathcal{R}_3)}{\text{Aire}(ABCD)} = \frac{2\Phi}{(\Phi + 1)^2} = \frac{2}{\Phi^3}$$

(d) Comparer $\dfrac{1}{\Phi}$ et $\dfrac{2}{\Phi^3}$. Conclure.

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Voie technologique

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : Les nombres multi-puissances

Soient a et n des entiers naturels non nuls.
On dit que la puissance a^n est « **non triviale** » lorsque $n \geqslant 2$.
Par exemple, 3^2 est une puissance non triviale mais 3^1 ne l'est pas.
On appelle **nombre multi-puissances** un nombre entier naturel supérieur ou égal à deux qui peut s'écrire au moins de deux manières différentes sous la forme de puissances non triviales.
Par exemple, 1296 est un nombre multi-puissances car $1296 = 6^4 = 36^2$, et les puissances 6^4 et 36^2 sont non triviales.
L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques nombres multi-puissances.

A. Premiers exemples

1. Démontrer que 64 est un nombre multi-puissances.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel a tel que $a \geqslant 2$, le nombre a^4 est un nombre multi-puissances.
3. Déduire de la question précédente deux autres nombres multi-puissances autres que 1296 et 64.

B. Une condition nécessaire

On admet que si x est un nombre multi-puissances alors il possède au moins deux diviseurs positifs autres que 1 et lui-même.
On notera $D(x)$ l'ensemble des diviseurs positifs de x. Par exemple, $D(64) = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$.

1. Quels sont les diviseurs positifs de 9 ? En déduire que 9 n'est pas un nombre multi-puissances.
2. Démontrer que 7 n'est pas un nombre multi-puissances.
3. On rappelle qu'un nombre premier est un nombre qui admet exactement deux diviseurs positifs différents : 1 et lui-même.
   Un nombre premier peut-il être un nombre multi-puissances ?
4. Trouver un nombre entier naturel $x \geqslant 2$ qui admet au moins deux diviseurs positifs autres que 1 et x et qui ne soit pas un nombre multi-puissances.

C. Puissance irréductible

On appelle **puissance irréductible** d'un nombre multi-puissances l'écriture a^n de ce nombre où a ne peut pas s'écrire sous la forme d'une puissance non triviale.

Par exemple, 36^2 n'est pas une puissance irréductible de 1296 car $36 = 6^2$ tandis que 6^2 est une puissance irréductible de 36 car 6 ne peut pas s'écrire sous la forme d'une puissance non triviale.

On admet qu'un nombre multi-puissances possède une unique écriture sous forme d'une puissance irréductible.

1. On considère le nombre multi-puissances 64.
   (a) Écrire les trois puissances non triviales égales à 64.
   (b) Préciser la puissance irréductible de 64.

Dans la suite du sujet, on admet le résultat suivant : « *Si x est un nombre multi-puissances tel que la puissance irréductible est a^n, alors n n'est pas un nombre premier.* »

2. Démontrer que si a^n est la puissance irréductible d'un nombre multi-puissances x, alors on a $n \geqslant 4$.
3. Démontrer que le plus petit nombre multi-puissances est 16.

Exercice 2 : Deux roues et une boîte

Dans cet exercice, toutes les longueurs sont exprimées en centimètres.
Le but de l'exercice est de remplir une boîte en y plaçant deux roues de rayons respectifs r et R et de centres respectifs A et B. On suppose dans tout l'exercice que $r \leqslant R$.
Il faut que ces roues remplissent entièrement la boîte afin d'éviter les mouvements lors du transport. On ne tient pas compte de l'épaisseur des roues.
On note L la largeur de la boîte.
On note C le point d'intersection de la roue de rayon R avec le fond de la boîte et O le point de la demi-droite $[BC)$ tel que le triangle ABO soit rectangle en O.

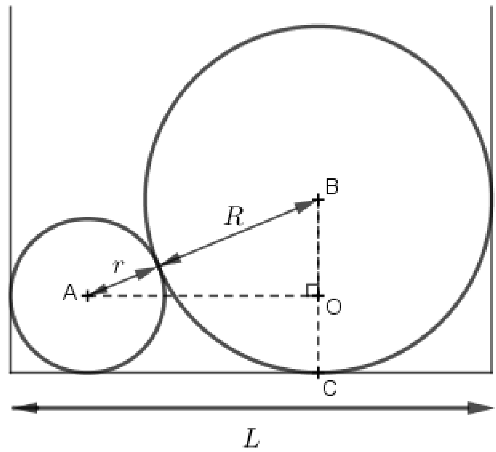


Schéma illustrant la situation

1. Dans cette question, les deux roues ont pour rayons respectifs $r = 4$ cm et $R = 9$ cm.
   (a) Justifier que OB = 5 cm.
   (b) Calculer la longueur AO.
   (c) En déduire la largeur L de la boîte.
2. Deux roues de rayons respectifs 3 cm et 10 cm remplissent-elles entièrement une boîte de largeur 25 cm ? Justifier.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le cas général où les deux roues ont pour rayons respectifs r et R.

3. Démontrer que $L = r + 2\sqrt{rR} + R$.
4. Dans cette question, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $r = a^2$ et $R = b^2$.
   (a) Démontrer que $L = (a + b)^2$.
   (b) Dans cette question, on suppose que $L = 25$ cm.
      i. Déterminer tous les couples $(a; b)$ vérifiant $L = (a + b)^2$.
      ii. En déduire tous les rayons possibles des roues qui remplissent entièrement la boîte.
   (c) Déterminer tous les rayons possibles des roues qui remplissent entièrement une boîte de largeur $L = 64$ cm.

SUJET PAR ÉQUIPES

2021

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Voie générale

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : Les nombres de Delannoy

Dans cet exercice, on se place dans un repère orthonormé d'origine O.

m et n désignent deux entiers naturels non simultanément nuls.

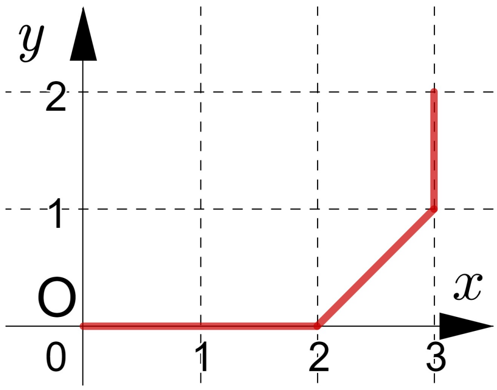
On appelle **chemin de Delannoy** la succession de segments horizontaux, verticaux ou diagonaux, respectivement associés aux vecteurs de translation de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui relient l'origine O du repère au point de coordonnées $(m;n)$.

On appelle le point de coordonnées $(m;n)$ le **point d'arrivée** du chemin de Delannoy.

Un chemin de Delannoy constitué de p segments, avec $p \geq 1$, est représenté par une liste ordonnée de p nombres $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ où $a_i \in \{0, 1, 2\}$ correspond à la i-ème translation effectuée :

- 0 correspond à une translation de vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- 1 correspond à une translation de vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 2 correspond à une translation de vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par exemple, dans le repère orthonormé ci-dessous, est tracé le chemin de Delannoy représenté par la liste $(0, 0, 1, 2)$. Le point d'arrivée est le point de coordonnées $(3; 2)$.



1. Quelles sont les coordonnées du point d'arrivée du chemin de Delannoy représenté par la liste $(1, 0, 2, 1)$?
2. Tracer sur la copie tous les chemins de Delannoy admettant le point de coordonnées $(2; 1)$ comme point d'arrivée. On fera autant de graphiques que de chemins.

On note $D\,(m, n)$ le nombre de chemins de Delannoy admettant le point de coordonnées $(m; n)$ comme point d'arrivée. Par convention, $D(0, 0) = 1$.

3. (a) Justifier que $D\,(m, 0) = 1$.
   (b) Est-il vrai que l'on a $D\,(m, n) = D\,(n, m)$? Justifier la réponse.
   (c) Calculer $D\,(1010, 1)$.

4. Algorithme de calcul
   (a) Justifier que $D(1,1) = 3$.
   (b) Soient m et n des entiers naturels non nuls. Justifier que l'on a la relation :
$$D(m,n) = D(m-1,n) + D(m-1,n-1) + D(m,n-1)$$
   (c) Recopier et compléter le tableau de valeurs de $D(m,n)$ suivant les valeurs de m et n ci-dessous :

$m \backslash n$	0	1	2	3	4
0	1	1			
1	1	3			
2					
3					
4					

Soit p un entier naturel non nul. À un chemin de Delannoy $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, on associe le nombre entier naturel N donné par :
$$N = a_1 + a_2 \times 3 + a_3 \times 3^2 + ... + a_p \times 3^{p-1}$$

5. Dans cette question, on suppose $p \geqslant 2$. On exprimera les réponses demandées en fonction de a_1, a_2, ..., a_p.
   (a) Quel est le reste dans la division euclidienne de N par 3 ?
   (b) On note q le quotient dans la division euclidienne de N par 3. Quel est le reste dans la division euclidienne de q par 3 ?
6. On donne le chemin de Delannoy représenté par la liste $(2,0,2,1)$. Calculer le nombre associé N.
7. On admet qu'il existe un unique chemin de Delannoy auquel on associe le nombre $N = 2021$. Dans cette question, on s'intéresse à ce chemin.
   (a) Donner la liste qui représente ce chemin.
   (b) Quelles sont les coordonnées du point d'arrivée A de ce chemin ?
   (c) Combien de chemins de Delannoy ont pour point d'arrivée le point A ?

Exercice 2 : 2021 en équations

1. Déterminer les deux nombres entiers naturels u et v autres que 1 et 2021 tels que $u \times v = 2021$ et $u < v$.

2. Déterminer tous les nombres entiers positifs a tels que $a^2 + 2021$ soit le carré d'un entier positif.

3. Le but de cette question est de chercher, s'ils existent, des entiers naturels a tels que $a^3 + 2021$ soit le cube d'un entier positif. Cela revient à déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a; b)$ tels que $a^3 + 2021 = b^3$.

   (a) Pour tous nombres entiers naturels a et b, démontrer que $b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$.

   (b) On pose $b - a = u$ et $b^2 + ab + a^2 = v$ où u et v sont les entiers trouvés à la question 1. Montrer que $3a^2 + 129a + 1802 = 0$.

   (c) On pose $b - a = 1$ et $b^2 + ab + a^2 = 2021$. Montrer que a vérifie une équation du second degré que l'on précisera.

   (d) Grâce aux relations obtenues aux questions 3(b) et 3(c), existe-t-il des entiers naturels a tels que $a^3 + 2021$ soit le cube d'un entier positif ?

4. Le but de cette question est de chercher les entiers naturels a tels que $a^4 + 2021$ soit la puissance quatrième d'un entier positif. En utilisant le résultat de la question 2, déterminer, s'ils existent, les entiers naturels a qui vérifient cette condition.

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Voie technologique

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : Ne pas déranger

Dans cet exercice, on appelle mot une succession de lettres n'ayant pas nécessairement de signification.

Une *anagramme* est un mot obtenu en modifiant l'ordre des lettres d'un autre mot.

Par exemple, les mots HALTES et SETLHA sont deux anagrammes du mot THALES.

Un *dérangement* est une anagramme d'un mot telle qu'aucune de ses lettres ne soit à la même position que dans le mot initial.

Par exemple, HALTES n'est pas un dérangement du mot THALES mais HTLASE est un dérangement du mot THALES.

Le but de l'exercice est de dénombrer des anagrammes et des dérangements à partir d'un mot donné.

Par exemple, à partir du mot LIE, on compte 6 anagrammes (LIE, LEI, ELI, EIL, IEL, ILE) et 2 dérangements (IEL et ELI).

Toute trace de recherche sera valorisée.

Partie 1

Dans cette partie, on forme des mots en utilisant les lettres du mot ABEL.

1. Combien de mots de 3 lettres, avec éventuellement des répétitions, peut-on former ?
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ABEL ?
3. Quel est le nombre de dérangements du mot ABEL ?

Partie 2

Dans cette partie, on forme des mots en utilisant les lettres du mot GAUSS.

1. Combien de mots de 4 lettres, avec éventuellement des répétitions, peut-on former ?
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot GAUSS ?
3. Quel est le nombre de dérangements du mot GAUSS ?

Partie 3

1. Quel est le nombre de dérangements du mot PAPPUS ?
2. Quel est le nombre de dérangements du mot THALES ?

Exercice 2 : La rumeur

Soit n un entier naturel non nul. Une rumeur circule entre n propagateurs de cette rumeur. Chaque propagateur ne connaît au départ qu'une partie de cette rumeur et aucun d'entre eux ne connaît la même partie qu'un autre propagateur. En rassemblant les n parties de la rumeur, on reconstitue la rumeur en entier.

Ces propagateurs s'appellent au téléphone entre eux et se disent, à cette occasion, **tout ce qu'ils savent**. Un appel n'est possible qu'entre **deux** propagateurs.

Afin de justifier les résultats, on pourra noter P_1, P_2, $\ldots$, P_n les propagateurs et, par exemple, $P_1 \leftrightarrow P_2$ un appel entre les propagateurs P_1 et P_2. À l'issue de cet appel, P_2 reçoit toute l'information connue de P_1 qui s'ajoute à sa propre information, et réciproquement pour P_1.

On prendra soin de préciser l'ordre dans lequel sont effectués les appels successifs entre deux propagateurs.

1. Déterminer le nombre minimum d'appels nécessaires afin que les n propagateurs connaissent entièrement la rumeur lorsque :
   (a) $n = 2$
   (b) $n = 3$
2. Justifier que 4 appels suffisent entre 4 propagateurs pour que chacun connaisse entièrement la rumeur.
3. Trouver une répartition des appels permettant de prouver que 8 appels suffisent entre 6 propagateurs pour que chacun connaisse entièrement la rumeur.
4. Soit $n > 4$. En imaginant qu'un des propagateurs appelle $n - 4$ autres propagateurs, démontrer que $2n - 4$ appels suffisent pour que les n propagateurs connaissent toute la rumeur. On pourra se servir du résultat de la question 2.
5. (a) Soit i un entier naturel non nul tel que $i \leqslant n$. Combien faut-il d'appels au minimum pour qu'un propagateur connaisse i nouvelles parties de la rumeur ? Combien de parties connaît alors ce propagateur ?
   (b) On suppose dans cette question qu'un des propagateurs n'effectue qu'un seul appel pour apprendre entièrement la rumeur. Prouver alors que le nombre d'appels nécessaires entre les n propagateurs est supérieur ou égal à $2n - 3$.
   (c) En déduire que lorsque tous les propagateurs connaissent la rumeur en un nombre minimum d'appels, chacun a au moins deux conversations.