OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

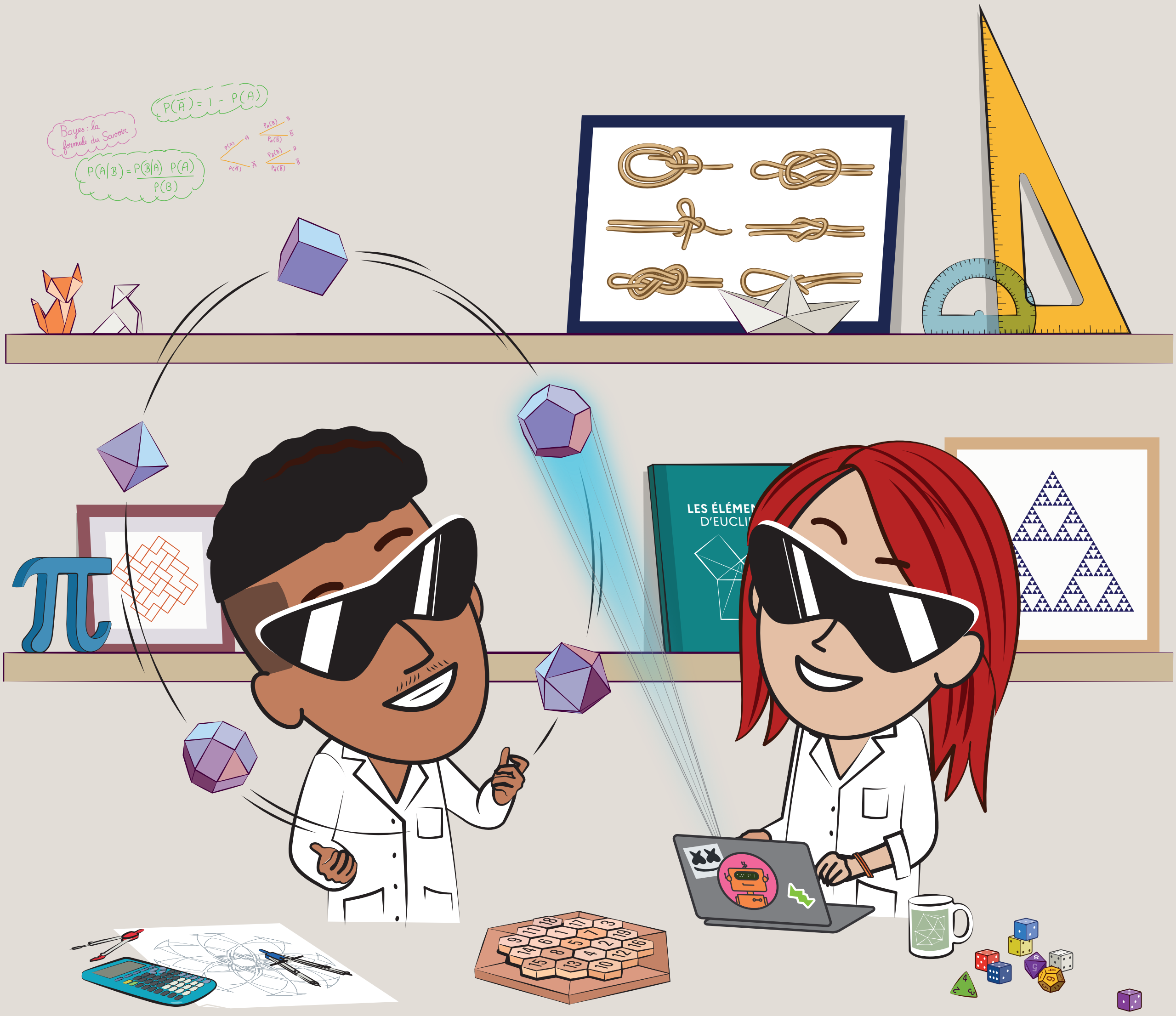
ACADÉMIE DE NICE
2023

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Spécialité mathématiques

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 - Tout FEUX tout FUN

Partie A - Nombres FUN

On dit qu'un nombre entier relatif est FUN s'il est consécutif d'un multiple de 3, c'est-à-dire si la différence entre ce nombre et le multiple de 3 qui le précède immédiatement **F**ait **UN**.

Par exemple :

- 4 est FUN car $4 - 3 \times 1 = 1$;
- 13 est FUN car $13 - 3 \times 4 = 1$;
- -8 est FUN car $-8 - 3 \times (-3) = 1$;
- 14 n'est pas FUN car $14 - 3 \times 4 = 2$.

On admet que les nombres FUN sont les nombres entiers relatifs s'écrivant sous la forme $3k + 1$ où k est un nombre entier relatif. Cette écriture est unique.

A1. Nombres FUN positifs inférieurs à 60

Quels sont tous les nombres FUN compris entre 0 et 60 ?

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58.

A2. Somme

1. Soient $A = 76$, $B = -23$ et $C = 9\,999\,999\,999\,999\,991$.
   (a) Prouver que les nombres A, B et C sont FUN.
   $A = 75 + 1 = 3 \times 25 + 1$ $B = -24 + 1 = -8 \times 3 + 1$ et $C = 3 \times 3\,333\,333\,333\,333\,330 + 1$.
   (b) La somme $A + B$ est-elle FUN ? Justifier.
   $A + B = 76 - 23 = 53 = 3 \times 17 + 2$ donc $A + B$ n'est pas fun.
   (c) La somme $A + B + C$ est-elle FUN ? Justifier.
   $A + B + C = 3 \times (17 + 3\,333\,333\,333\,333\,330) + 2 + 1 = 3 \times 3\,333\,333\,333\,333\,348 + 0$ donc $A + B + C$ n'est pas fun.

2. Cas général
   (a) Prouver que la somme de trois nombres FUN n'est jamais FUN.
   Soient $A = 3k + 1$, $B = 3k' + 1$ et $C = 3k'' + 1$ trois nombres FUN avec k, k' et k'' trois entiers relatifs. Alors $A + B + C = 3(k + k' + k'') + 3 = 3(k + k' + k'' + 1)$ avec $k + k' + k'' + 1$ un entier relatif donc $A + B + C$ n'est jamais FUN.
   (b) La somme de quatre nombres FUN est-elle FUN ? Justifier.
   Soient $A = 3k_1 + 1$, $B = 3k_2 + 1$, $C = 3k_3 + 1$ et $D = 3k_4 + 1$ quatre nombres FUN avec k_1, k_2, k_3 et k_4 quatre nombre entiers relatifs.
   Alors $3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + 4 = 3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + 1) + 1$ avec $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + 1$ un entier relatif donc leur somme est FUN.

A3. Produit

1. Montrer que le produit de deux nombres FUN est FUN.
   Soient $A = 3k + 1$ et $B = 3k' + 1$ deux nombres FUN avec k et k' deux nombres entiers relatifs. Alors $A \times B = (3k + 1)(3k' + 1) = 9kk' + 3k + 3k' + 1 = 3(3kk' + k + k') + 1$ avec $3kk' + k + k'$ un entier relatif donc $A \times B$ est FUN.
2. L'opposé d'un nombre FUN est-il FUN ? Justifier.
   Non. Par exemple, l'opposé du nombre FUN 4 est -4 et -4 n'est pas FUN car $-4 = 3 \times (-2) + 2$.

A4. Nombres FUN-primitifs

On dit qu'un nombre FUN strictement supérieur à 1 est un nombre FUN-primitif si ses seuls diviseurs positifs FUN sont 1 et lui-même.

Par exemple 4 est un nombre FUN-primitif. En effet, 4 possède trois diviseurs positifs, 1, 2 et 4 mais ses seuls diviseurs positifs FUN sont 1 et 4 car 2 n'est pas un nombre FUN

1. Énoncer la liste des nombres FUN-primitifs inférieurs à 60.
   4, 7, 10, 13, 19, 22, 25, 31, 34, 37, 43, 46, 55, 58
2. Trouver un nombre entier F qui est FUN et qui peut se décomposer de deux manières différentes sous la forme $F = p_1 \times p_2 = p_3 \times p_4$, où p_1, p_2, p_3, p_4 des nombres FUN-primitifs distincts.
   Par exemple : $220 = 4 \times 55 = 10 \times 22$.

Partie B - Nombres FEUX

On dit qu'un nombre entier relatif est FEUX si la différence entre ce nombre et le multiple de 3 qui le précède immédiatement **F**ait D**EUX**.

Par exemple :

- 5 est FEUX car $5 - 3 \times 1 = 2$;
- 11 est FEUX car $11 - 3 \times 3 = 2$;
- -13 est FEUX car $-13 - 3 \times (-5) = 2$;
- 18 n'est pas FEUX car $18 - 3 \times 6 = 0$.

On admet que les nombres FEUX sont les nombres entiers relatifs s'écrivant sous la forme $3k + 2$ où k est un nombre entier relatif. Cette écriture est unique.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de nombre à la fois FUN et FEUX.
   Supposons, par l'absurde qu'il en existe un noté A. Alors $A = 3k + 1$ et $A = 3k' + 2$ avec k et k' deux entiers relatifs.
   Donc $0 = A - A = 3k + 1 - 3k' - 2 = 3(k - k') - 1$ alors $3(k - k') = 1$ avec $k - k'$ un entier relatif. Or 1 n'est pas multiple de 3. Ce qui amène à une contradiction. Donc il n'existe pas de nombre à la fois FUN et FEUX.

2. Montrer que la somme de deux nombres FEUX est FUN.

   Soient $A = 3k + 2$ et $B = 3k' + 2$ deux nombres FEUX avec k et k' deux nombres entiers relatifs. Alors $A + B = 3(k + k') + 4 = 3(k + k' + 1) + 1$ avec $k + k' + 1$ un entier relatif donc $A + B$ est FUN.

3. Montrer que la somme de deux nombres FUN est FEUX.

   Soient $A = 3k + 1$ et $B = 3k' + 1$ deux nombres FUN avec k et k' deux entiers relatifs. Alors $A + B = 3(k + k') + 2$ avec $k + k'$ un entier relatif donc $A + B$ est FEUX.

4. Que dire du produit de deux nombres FEUX ? Énoncer et démontrer cette propriété.

   Soient $A = 3k + 2$ et $B = 3k' + 2$ deux nombres FEUX avec k et k' deux entiers relatifs. Alors $A \times B = 9kk' + 6k + 6k' + 4 = 3(3kk' + 2k + 2k' + 1) + 1$ avec $3kk' + 2k + 2k' + 1$ un entier relatif donc $A \times B$ est FUN.

Partie C - À table !

On dit qu'un nombre entier est FEZ s'il est multiple de 3.

Recopier et compléter les tables d'opération suivantes, à l'aide des mots FEZ, FUN, FEUX. Aucune justification n'est attendue.

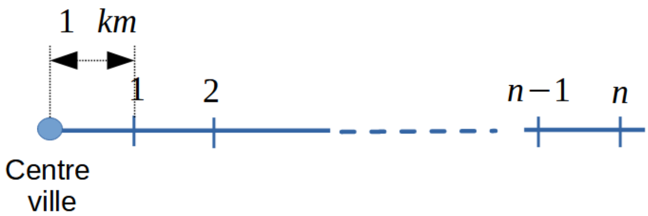
$+$	FUN	$FEUX$
FUN	$FEUX$	FEZ
$FEUX$	FEZ	FUN

$\times$	FUN	$FEUX$
FUN	FUN	$FEUX$
$FEUX$	$FEUX$	FUN

Exercice 2 - Médiane express

Un livreur doit apporter des colis à différents magasins situés sur une longue rue. On prend une situation simple : la rue est rectiligne et deux magasins situés côte à côte sont distants de 1 km (kilomètre). Le premier magasin est à 1 km du centre-ville, le second magasin est situé à 2 km du centre-ville,...

Soit n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère qu'il y a n magasins. Chaque magasin est numéroté et repéré par un entier i compris entre 1 et n. On peut ainsi représenter l'ensemble des magasins sur un demi-axe gradué d'origine le centre-ville :



Le livreur livre tous les magasins sans ordre précis a priori. Nous allons déterminer la distance parcourue par le livreur pour effectuer les livraisons des n magasins.

Partie A - En voiture

Au départ, le livreur arrive à un des magasins et utilise son véhicule de transport pour tous les trajets qu'il devra effectuer. Depuis ce premier magasin, on comptabilise le nombre de kilomètres qu'il va parcourir pour livrer tous les autres magasins.

Par exemple, pour $n = 6$ magasins, si le livreur arrive au magasin situé à 2 km du centre-ville et décide d'effectuer ses livraisons dans l'ordre suivant : $2 \to 4 \to 5 \to 3 \to 6 \to 1$. La distance parcourue est alors de $2 + 1 + 2 + 3 + 5 = 13$ km.

On pourra utiliser cette rédaction pour illustrer les raisonnements.

1. Dans cette question, on considère le cas $n = 5$.
   a) Vérifier que la distance parcourue est de 7 km si le livreur suit l'ordre suivant :
   $$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2.$$
   La distance parcourue est $2 + 1 + 1 + 3 = 7$ km.
   b) Citer tous les parcours de livraison dont la distance vaut 4 km.
   $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$ et $5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$
   c) Trouver deux parcours de livraison dont la distance vaut 10 km.
   [[4, 1, 3, 5, 2], [1, 4, 2, 5, 3], [3, 4, 2, 5, 1], [2, 3, 5, 1, 4], [3, 5, 2, 4, 1], [2, 5, 3, 1, 4], [4, 3, 1, 5, 2], [1, 5, 2, 4, 3], [5, 2, 4, 1, 3], [5, 1, 4, 2, 3], [3, 2, 4, 1, 5], [3, 1, 4, 2, 5], [4, 1, 5, 3, 2], [2, 5, 1, 3, 4]]
   d) Existe-t-il un parcours dont la distance est strictement supérieure à 10 km ? Justifier.
   Oui, par exemple le parcours $2 \to 5 \to 1 \to 4 \to 3$ mesure $3 + 4 + 3 + 1 = 11$ km.

Désormais on considère un entier $n \geqslant 2$.

2. a) Trouver un parcours de livraison tel que la distance parcourue soit $n-1$ km.

   Le parcours $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \ldots \rightarrow n$

   b) Est-ce la distance la plus courte possible ?

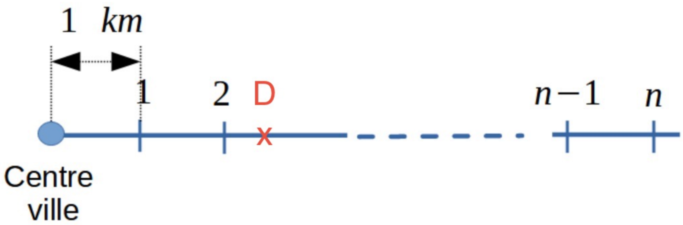
   La distance minimale entre deux magasins vaut 1 et il y a $n-1$ magasins à visiter à partir d'un magasin quelconque donc la distance d vérifie $d \geqslant n-1$.
   De plus le trajet $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \ldots \rightarrow n$ a pour distance $n-1$ km donc la distance minimale est $n-1$.

Partie B - À bout de bras

Désormais le livreur gare son véhicule entre le premier et le dernier magasin. On note D le point correspondant à l'emplacement de son véhicule. Il ne l'utilisera plus et devra donc à chaque livraison faire l'aller-retour à pied entre son véhicule et chacun des magasins. Après la dernière livraison, le livreur retourne à son véhicule.

On admettra que la distance ainsi parcourue par le livreur ne dépend pas de l'ordre des magasins livrés.

Par exemple, dans la figure ci-dessous, le livreur a garé son véhicule à $2,5$ km du centre-ville. Pour livrer les deux premiers magasins, le livreur peut effectuer le trajet $D \rightarrow 1 \rightarrow D \rightarrow 2 \rightarrow D$. La distance parcourue par le livreur est $1,5+1,5+0,5+0,5=4$ km. Si le livreur effectue un autre trajet, par exemple $D \rightarrow 2 \rightarrow D \rightarrow 1 \rightarrow D$, la distance parcourue est toujours égale à 4 km.



1. Dans cette question, on considère le cas $n=5$.

   a) Le livreur gare son véhicule en D situé à $2,5$ km du centre-ville. Vérifier que la distance est 13 km si le livreur livre les magasins dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5 correspondant au trajet $D \rightarrow 1 \rightarrow D \rightarrow 2 \rightarrow D \rightarrow 3 \rightarrow D \rightarrow 4 \rightarrow D \rightarrow 5 \rightarrow D$.

   On calcule $2 \times (1,5+0,5+0,5+1,5+2,5) = 13\ km$.

   b) Le livreur gare son véhicule en D situé à 3 km du centre-ville. Déterminer la distance parcourue pour livrer tous les magasins.

   Le trajet est $D \rightarrow 1 \rightarrow D \rightarrow 2 \rightarrow D \rightarrow 4 \rightarrow D \rightarrow 5 \rightarrow D \rightarrow 6 \rightarrow D$.
   La distance totale est $2 \times 2 \times (1+2) = 12$ km.

2. Dans cette question, on considère le cas $n=6$.

   a) Le livreur gare son véhicule en D situé à 2 km du centre-ville. Déterminer la distance parcourue pour livrer tous les magasins.

   On calcule $2 \times (1+1+2+3+4) = 22\ km$.

   b) Dans cette question, x est un nombre réel compris entre 0 et 6. Le livreur gare son véhicule en D situé à x km du centre-ville. Soit f la fonction qui à x associe la distance parcourue par le livreur au cours de la livraison de tous les magasins.

i. Montrer que, pour $x \in [2; 3]$, $f(x) = 30 - 4x$.

Comme la distance parcourue ne dépend pas de l'ordre des magasins livrés, on calcule $f(x)$ en utilisant le trajet $D \to 2 \to D \to 1 \to D \to 3 \to D \to 4 \to D \to 5 \to D \to 6 \to D$.

On en déduit que :

$f(x) = 2\left((x-2) + (x-1) + (3-x) + (4-x) + (5-x) + (6-x)\right)$

$f(x) = 2\left(-2x + 15\right)$

$f(x) = -4x + 30$

ii. Montrer que, pour $x \in [3; 4]$, $f(x) = 18$.

Comme la distance parcourue ne dépend pas de l'ordre des magasins livrés, on calcule $f(x)$ en utilisant le trajet $D \to 3 \to D \to 2 \to D \to 1 \to D \to 4 \to D \to 5 \to D \to 6 \to D$.

On en déduit que :

$f(x) = 2\left((x-3) + (x-2) + (x-1) + (4-x) + (5-x) + (6-x)\right)$

$f(x) = 2 \times 9$

$f(x) = 18$

iii. Sur l'annexe, compléter la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$. Aucune justification n'est attendue.

cf annexe

iv. Par lecture graphique, en déduire les valeurs de x pour lesquelles la distance de livraison est la plus courte possible.

D'après le graphique, pour que la distance soit la plus courte possible, il faut et il suffit que $x \in [3; 4]$. Elle est alors égale à 18 km.

Annexe

Exercice 2 - Question B.2.b)iii.

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Spécialité mathématiques

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.

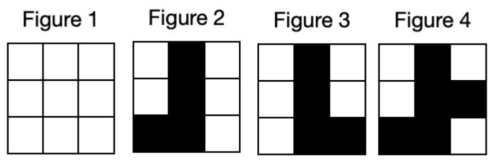
Exercice 1 - Blocs arithmétiques

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On appelle *Bloc* de taille n tout quadrillage blanc de n lignes et n colonnes dont certaines cases sont colorées en noir en respectant la règle suivante :

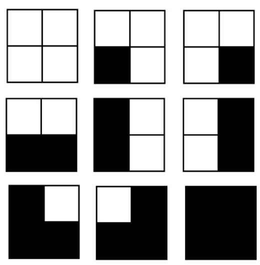
si une case est noire, alors toutes les cases qui sont en dessous de celle-ci sont noires.

Par exemple, les figures 1, 2 et 3 sont des *Blocs* différents de taille 3. La figure 4 n'est pas un *Bloc* de taille 3.



Remarquons qu'une fois dessiné, on ne retourne pas un *Bloc*.

1. Tracer sur la copie tous les *Blocs* de taille 2.



2. Combien y a-t-il de *Blocs* de taille 6 ?
   Il y en a $7^6 = 117649$.

On rappelle que :

- Un nombre premier est un nombre entier positif ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même. Les six premiers nombres premiers sont 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13.
- Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2, s'il n'est pas premier, peut se décomposer en produit de facteurs premiers. Dans ce cas, la décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

À chaque case d'un *Bloc* de taille n, on associe :

- le nombre 1 si la case est blanche ;
- le k-ième nombre premier si la case est noire et se trouve dans la k-ième colonne du *Bloc*.

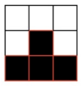
Ainsi, à tout *Bloc* de taille n, on associe un unique nombre entier naturel i égal au produit des nombres associés à ses n^2 cases.

Dans toute la suite de l'exercice, on notera $B_{i,n}$ le bloc de taille n auquel on associe ce nombre i.

Par exemple :

- le nombre $1^9 = 1$ est associé au *Bloc* de la figure 1 : ce *Bloc* est noté $B_{1,3}$;
- le nombre $1^5 \times 2^1 \times 3^3 = 54$ est associé au *Bloc* de la figure 2 : ce *Bloc* est noté $B_{54,3}$.

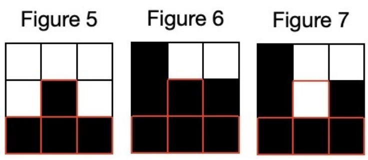
3. Tracer le *Bloc* $B_{90,3}$ de taille 3 auquel est associé le nombre 90.
   Comme $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$, le *Bloc* $B_{90,3}$ est :



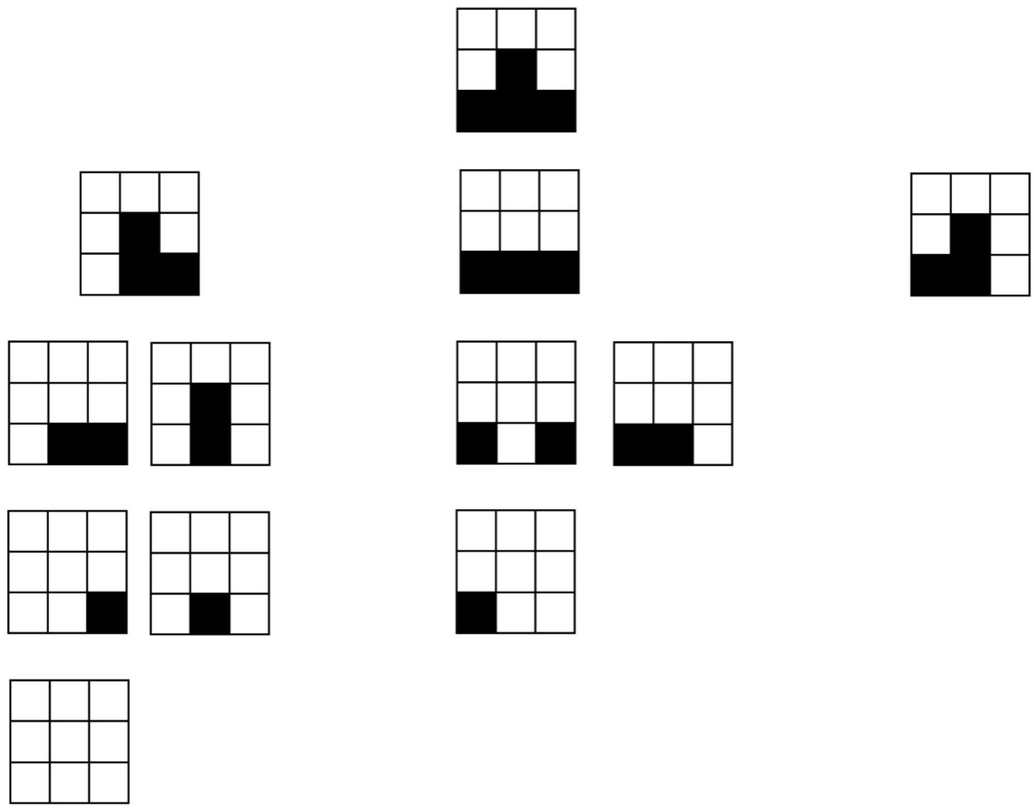
4. Le nombre 2 500 est-il associé à un *Bloc* de taille 3 ?
   Comme $2500 = 2^2 \times 5^4$ le nombre 2 500 n'est pas associé à un *Bloc* de taille 3.
5. Quel est le plus grand nombre associé à un *Bloc* de taille 3 ?
   C'est le nombre $2^3 \times 3^3 \times 5^3 = 27000$.

Soient i et j deux entiers associés à deux *Blocs* de taille n. On dit que $B_{i,n}$ se pose sur $B_{j,n}$ si toutes les cases noires de $B_{i,n}$ sont également colorées en noir sur $B_{j,n}$.

Par exemple, le *Bloc* de la figure 5 se pose sur celui de la figure 6 mais pas sur celui de la figure 7.



6. (a) Tracer tous les *Blocs* qui se posent sur celui de la figure 5. Pour cela, on pourra utiliser les quadrillages de l'annexe 1.



(b) Quels sont les nombres associés à ces *Blocs* ?

Les nombres associés sont 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 15 ; 18 ; 30 ; 45 ; 90. Ce sont tous les diviseurs de 90.

7. Soient i et j deux entiers naturels associés à deux *Blocs* de taille n.

(a) Démontrer que si $B_{i,n}$ se pose sur $B_{j,n}$ alors le nombre i divise j.

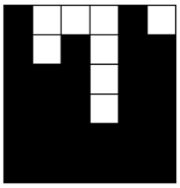
i est le produit des nombres associés aux cases de $B_{i,n}$ et j est le produit des nombres associés aux cases de $B_{j,n}$. Or toutes les cases noires de $B_{i,n}$ sont des cases noires pour $B_{j,n}$ donc $j = i \times h$ où h est le produit des nombres associés aux cases noires de $B_{j,n}$ qui sont blanches sur $B_{i,n}$. Donc i divise j.

(b) Réciproquement, démontrer que si i divise j alors $B_{i,n}$ se pose sur $B_{j,n}$.

Si $i = 1$, le *Bloc* associé à i se pose sur n'importe quel bloc car il ne comporte que des cases blanches.

Si i est un nombre premier ou un produit de facteurs premiers qui divise j alors il existe un entier naturel h tel que $j = i \times h$. La plus grande puissance d'un nombre premier qui divise i divise également j : par conséquent, toutes les cases de $B_{i,n}$ noires de la colonne de ce nombre premier sont également colorées en noir sur $B_{j,n}$.

(c) Déterminer le nombre de diviseurs positifs du nombre associé au *Bloc* de taille 6 ci-dessous :



La question revient à dénombrer le nombre de *Blocs* qui se posent sur ce *Bloc* de taille 6. Il y en a $7 \times 5 \times 6 \times 3 \times 7 \times 6 = 26460$

(d) Trouver tous les nombres associés à des *Blocs* de taille 3 et qui ont exactement 18 diviseurs positifs.

Comme $18 = 2 \times 3 \times 3$, ce sont tous les nombres associés à un *Bloc* ayant une colonne avec une case noire et deux colonnes avec 2 cases noires. Il y en a 3 : $2 \times 3^2 \times 5^2 = 450$, $2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$ et $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.

(e) Combien de nombres associés à des *Blocs* de taille 3 ont exactement cinq diviseurs positifs ?

5 est un nombre premier. Les nombres cherchés sont associés à des *Blocs* dont l'une des colonnes comporte 4 cases noires. C'est impossible avec des *Blocs* de taille 3. Il n'y a donc pas de nombres associés à des *Blocs* de taille 3 qui ont exactement 5 diviseurs.

Un *Bloc* est un *Bloc miroir* s'il admet au moins un axe de symétrie.

Par exemple, le *Bloc* de la figure 8 est un *Bloc miroir* mais pas celui de la figure 9.

Figure 8

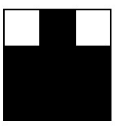
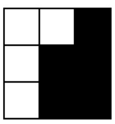


Figure 9



8. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

(a) Il existe un *Bloc miroir* de taille 3 ayant au moins deux axes de symétrie.

Vrai : par exemple le *Bloc* $B_{1,3}$ ou $B_{27000,3}$.

(b) Le *Bloc* $B_{270,3}$ est un *Bloc miroir*.

Vrai : $270 = 2 \times 3^3 \times 5$.

(c) Il existe au moins 20 *Blocs miroirs* de taille 3.

Vrai : il y en a exactement 32. Les nombres associés à ces blocs sont 1, 2, 3, 5, 8, 9, 10, 12, 27, 30, 36, 75, 90, 100, 120, 125, 216, 225, 270, 300, 360, 750, 900, 1000, 2250, 2700, 3000, 3375, 5400, 9000, 13500, 27000.

(d) Il existe un *Bloc miroir* de taille 3 dont le nombre associé a exactement 36 diviseurs.

Vrai : il s'agit du *Bloc* $B_{2700,3}$.

(e) Pour tout nombre entier naturel k non nul, il existe un *Bloc miroir* dont le nombre associé admet exactement k diviseurs.

Vrai : on peut par exemple considérer le *Bloc* de taille $2k+1$ dans lequel la $(k+1)$-ième colonne a exactement $k-1$ cases colorées en noir.

Exercice 2 - Des nombres en spirale

En écrivant les nombres entiers positifs non nuls en spirale on voit apparaître une infinité d'anneaux concentriques.

Sur l'anneau 1 figurent les nombres entiers de 2 à 9, sur l'anneau 2 les nombres entiers de 10 à 25, sur l'anneau 3 les nombres entiers de 26 à 49, ...

65	64	63	62	61	60	59	58	57
66	37	36	35	34	33	32	31	56
67	38	17	16	15	14	13	30	55
68	39	18	5	4	3	12	29	54
69	40	19	6	1	2	11	28	53
70	41	20	7	8	9	10	27	52
71	42	21	22	23	24	25	26	51
72	43	44	45	46	47	48	49	50
73	74	75	76	77	78	79	80	81

Partie A - D'anneaux en anneaux

L'anneau 1 est formé de huit entiers naturels.

1. Combien de nombres entiers forment l'anneau 2 ?
   $8 \times 2 = 16$
2. Combien de nombres entiers forment l'anneau 3 ?
   $8 \times 3 = 24$
3. Combien de nombres entiers forment l'anneau 6 ?
   $8 \times 6 = 48$
4. Pour n non nul fixé, combien de nombres entiers forment l'anneau n ?
   $8n$

Partie B - Des polynômes générateurs de diagonales

On s'intéresse aux suites croissantes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers appartenant à des anneaux consécutifs de la spirale et alignés en diagonale.

La figure ci-contre donne un exemple d'une telle suite avec $u_0 = 22$, $u_1 = 44$ et $u_2 = 74$.

-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	15	14	13	-	-
-	-	-	5	4	3	12	-	-
-	-	-	6	1	2	11	-	-
-	-	-	7	8	9	10	-	-
-	-	-	u_0	-	-	-	-	-
-	-	u_1	-	-	-	-	-	-
-	u_2	-	-	-	-	-	-	-

Dans cet exercice, on pourra utiliser, sans démonstration, la formule donnant la somme des entiers naturels compris entre 1 et n, où n est un entier naturel non nul : $1 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. **Diagonale 1**
   La suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4n^2 + 12n + 7$ génère une diagonale de cette spirale. Combien de nombres premiers peut-on compter parmi les cinq premiers nombres entiers de cette spirale ? Quels sont-ils ? Expliquer.
   $u_0 = 7$, $u_1 = 23$, $u_2 = 47$, $u_3 = 79$, $u_4 = 119$. Ces entiers sont tous des nombres premiers sauf $u_4 = 119$ car $119 = 7 \times 17$.

2. **Diagonale 2**

   Soit la suite de nombres entiers alignés en diagonale de la spirale $u_0 = 1$, $u_1 = 9$, $u_2 = 25$, $u_3 = 49$, $u_4 = 81$... Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n. Aucune justification n'est attendue.

   $u_n = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$

3. **Diagonale 3**
Soit la suite de nombres entiers alignés en diagonale de la spirale $u_0 = 4$, $u_1 = 16$, $u_2 = 36$, $u_3 = 64$, ... On admet qu'il existe trois nombres entiers naturels a, b, c tels que, pour tout entier naturel n, le terme u_n de cette suite peut s'écrire sous la forme suivante : $u_n = an^2 + bn + c$. Déterminer les nombres a, b, c.
$u_n = (2n+2)^2 = 4n^2 + 8n + 4$. En effet :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = 16 \\ u_2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a+b+c = 16 \\ 4a+2b+c = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a+b = 12 \\ 2a+b = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a = 4 \\ b = 8 \end{cases}$$

4. **Généralisation**
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ et on admet que $v_{n+1} = v_n + 8$.
   (a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de n et de v_1.
   La suite v est arithmétique de raison 8 et de premier terme v_1. Par conséquent, $v_n = v_1 + 8(n-1)$.
   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n - u_0 = 4n(n-1) + nv_1$.
   Nous avons :
   $v_n = v_1 + 8(n-1)$ s'écrit $u_n - u_{n-1} = v_1 + 8(n-1)$
   $v_{n-1} = v_1 + 8(n-2)$ s'écrit $u_{n-1} - u_{n-2} = v_1 + 8(n-2)$
   ...
   $v_2 = v_1 + 8$ s'écrit $u_2 - u_1 = v_1 + 8$
   v_1 s'écrit $u_1 - u_0 = v_1$
   Par sommation :
   $u_n - u_0 = n \times v_1 + 8 \times ((n-1) + (n-2) + ... + 1) = n \times v_1 + 8 \times \frac{n(n-1)}{2} = nv_1 + 4n(n-1)$.
   (c) En déduire qu'il existe deux entiers naturels d et e tels que, pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite peut s'écrire sous la forme $u_n = 4n^2 + dn + e$. Exprimer d et e en fonction de u_0 et u_1.
   $u_n - u_0 = nv_1 + 4n(n-1)$
   $u_n = n(u_1 - u_0) + 4n^2 - 4n + u_0$
   $u_n = 4n^2 + (u_1 - u_0 - 4)n + u_0$
   (d) i. Trouver l'expression de u_n qui génère la diagonale de la spirale commençant par les nombres premiers $u_0 = 5$ et $u_1 = 19$.
   $u_n = 4n^2 + (u_1 - u_0 - 4)n + u_0 = 4n^2 + (19 - 5 - 4)n + 5 = 4n^2 + 10n + 5$
   ii. Jusqu'à quel rang n les nombres entiers ainsi générés sont-ils premiers ? Expliquer.
   Les entiers générés sont des nombres premiers jusqu'au rang 4 : $u_0 = 5$, $u_1 = 19$, $u_2 = 41$, $u_3 = 71$, $u_4 = 109$. En revanche, $u_5 = 155 = 5 \times 31$ n'est pas premier.

Partie C - Un anneau pour une année

1. Quel est le numéro de l'anneau de la spirale sur lequel est situé le nombre 2023 ? Expliquer.
Pour $n = 22$, $(2n+1)^2 = 2025$ et $(2n+1)^2 - 8n + 1 = 1850$. Les entiers de 1850 à 2025 se trouvent sur l'anneau 22. Donc 2023 se trouve sur l'anneau 22.
2. Quel est le plus petit nombre entier situé sur cet anneau ? Quel est le plus grand nombre entier situé sur cet anneau ?
Le plus petit nombre situé sur cet anneau est 1850. Le plus grand est 2025.

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Voie technologique

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 - Des urnes pas comme les autres

On considère des urnes opaques contenant quatre boules indiscernables au toucher.
Sur chaque boule est inscrit un nombre entier naturel : on identifiera une boule avec le nombre inscrit sur celle-ci.

Par exemple, on joue avec deux urnes : la première urne, appelée A, contient les boules 2, 4, 6, 6 et la deuxième urne, appelée B, contient les boules 1, 3, 5, 7.

On pioche au hasard une boule dans l'urne A et une boule dans l'urne B.
On considère l'événement « le nombre inscrit sur la boule piochée dans l'urne A est supérieur à celui inscrit sur la boule de l'urne B ». On le note $A > B$.
On dit que **l'urne A est *meilleure* que l'urne B** si la probabilité de l'événement $A > B$ est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.

Par exemple, les 16 tirages possibles avec les urnes précédentes sont représentés dans le tableau ci-contre. Pour chaque tirage, on a indiqué la lettre de l'urne dans laquelle a été piochée la boule portant le plus grand nombre. On en déduit que $P(A > B) = \frac{9}{16} > \frac{1}{2}$. Ainsi, l'urne A est meilleure que l'urne B.

Urne B \ Urne A	2	4	6	6
1	A	A	A	A
3	B	A	A	A
5	B	B	A	A
7	B	B	B	B

Partie A - Des urnes indifférentes

On considère les trois urnes suivantes :

l'urne A avec les boules	:	3	6	7	10
l'urne B avec les boules	:	2	5	8	11
l'urne C avec les boules	:	1	4	9	12

1. On pioche une boule dans une des trois urnes puis une boule dans une des deux urnes restantes.
   a) Comme dans l'exemple précédent, compléter les tableaux fournis en annexe en indiquant la lettre de l'urne dans laquelle a été piochée la boule portant le plus grand nombre.
   cf annexe
   b) Vérifier que $P(A > B) = \frac{1}{2}$ puis déterminer $P(B > C)$ et $P(C > A)$.
   D'après les tableaux de l'annexe, $P(A > B) = P(B > C) = P(C > A) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$
   c) Y a-t-il une urne *meilleure* que l'autre ?
   Non car $P(A > B) = P(B > A) = \frac{1}{2}$, $P(A > C) = P(C > A) = \frac{1}{2}$, $P(B > C) = P(C > B) = \frac{1}{2}$.
2. Un premier joueur pioche une boule dans l'urne de son choix. Un deuxième joueur choisit au hasard une urne parmi les deux restantes puis il pioche une boule dans celle-ci. Le joueur qui a le plus grand nombre gagne la partie.

a) Le joueur 1 choisit l'urne A. Montrer que la probabilité qu'il gagne la partie est égale à $\frac{1}{2}$.

On note B l'événement "l'urne B est choisie par le joueur 2" et C l'événement "l'urne C est choisie par le joueur 2".

$P(B) \times P(A > B) + P(C) \times P(A > C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) Si le joueur 1 choisit une autre urne, la probabilité qu'il gagne la partie change-t-elle ?

Dans tous les cas, la probabilité est égale à $\frac{1}{2}$.

Partie B - Des urnes bien ordonnées

On considère désormais les trois urnes suivantes :

l'urne A avec les boules	:	1	4	7	10
l'urne B avec les boules	:	2	5	8	11
l'urne C avec les boules	:	3	6	9	12

1. On pioche une boule dans une des trois urnes puis une boule dans une des deux urnes restantes.
   a) Compléter les tableaux fournis en annexe en indiquant la lettre de l'urne dans laquelle a été piochée la boule portant le plus grand nombre.
   cf annexe
   b) Vérifier que $P(B > A) = \frac{5}{8}$ puis déterminer $P(C > B)$ et $P(C > A)$.
   D'après les tableaux de l'annexe, $P(B > A) = P(C > B) = P(C > A) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$
   c) Y a-t-il une urne meilleure que toutes les autres ?
   L'urne C est la meilleure des trois.
2. Un premier joueur pioche une boule dans l'urne de son choix. Un deuxième joueur choisit au hasard une des deux urnes restantes et pioche une boule dans celle-ci.
   a) Quelle(s) urne(s) doit choisir le deuxième joueur pour avoir le plus de chance de gagner la partie ? On pourra s'aider de la question précédente.
   Si le premier joueur choisit l'urne A, les urnes B ou C sont plus avantageuses.
   Si le premier joueur choisit l'urne B, l'urne C est plus avantageuse.
   Si le premier joueur choisit l'urne C, tous les choix restants sont moins avantageux.
   b) i. Le joueur 1 choisit l'urne A. Montrer que la probabilité qu'il gagne la partie est $\frac{6}{16}$.
   $P(B) \times P(A > B) + P(C) \times P(A > C) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{16} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{16} = \frac{6}{16}$
   ii. Le joueur 1 choisit l'urne B. Montrer que la probabilité qu'il gagne la partie est $\frac{8}{16}$.
   On note A l'événement "l'urne A est choisie par le joueur 2".
   $P(A) \times P(B > A) + P(C) \times P(B > C) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{16} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{16} = \frac{8}{16}$
   iii. Le joueur 1 choisit l'urne C. Montrer que la probabilité qu'il gagne la partie est $\frac{10}{16}$.
   $P(A) \times P(C > A) + P(B) \times P(C > B) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{16} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{16} = \frac{10}{16}$
   iv. Quelle urne doit choisir le premier joueur pour avoir le plus de chance de gagner la partie ?
   D'après les questions précédentes, il vaut mieux choisir l'urne C.

Partie C - Des urnes désordonnées

On considère les trois urnes suivantes :

l'urne A avec les boules	:	1	4	7	7
l'urne B avec les boules	:	2	6	6	6
l'urne C avec les boules	:	3	5	5	8

1. On pioche une boule dans deux urnes parmi les trois.

   a) Compléter les tableaux fournis en annexe en indiquant la lettre de l'urne dans laquelle a été piochée la boule portant le plus grand nombre.
   cf annexe

   b) Déterminer $P(A > B)$, $P(B > C)$ et $P(C > A)$.
   Les trois probabilités valent $\dfrac{9}{16}$.

   c) Quelle est la meilleure urne entre l'urne B et l'urne C ? Et entre l'urne A et l'urne B ?
   On a $B > C$, $A > B$.

   d) Quelle est la meilleure urne entre l'urne A et l'urne C ? En quoi cette réponse est-elle étonnante ?
   D'après la question précédente, on s'attend par transitivité à ce que A soit meilleure que C, ce qui n'est pas le cas...

2. Un premier joueur pioche une boule dans l'urne de son choix. Un deuxième joueur choisit au hasard l'une des deux urnes restantes et pioche une boule dans celle-ci.

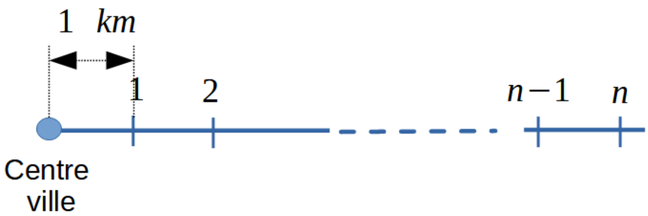
   a) Quelle(s) urne(s) doit choisir le deuxième joueur pour avoir le plus de chance de gagner la partie ? On pourra s'aider de la question précédente.
   Si le joueur 1 choisit l'urne A, il faut qu'il prenne l'urne C.
   Si le joueur 1 choisit l'urne B, il faut qu'il prenne l'urne A.
   Si le joueur 1 choisit l'urne C, il faut qu'il prenne l'urne B.

   b) Y a-t-il un meilleur choix pour le joueur 1 pour avoir le plus de chance de gagner la partie ?
   $P(B) \times P(A > B) + P(C) \times P(A > C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{9}{16} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{16} = \dfrac{1}{2}$
   $P(A) \times P(B > A) + P(C) \times P(B > C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{16} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{9}{16} = \dfrac{1}{2}$
   $P(A) \times P(C > A) + P(B) \times P(C > B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{9}{16} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{7}{16} = \dfrac{1}{2}$
   Il n'y a pas de meilleur choix pour le joueur 1 car les trois probabilités sont égales.

Exercice 2 - En livraison

Un livreur doit apporter des colis à différents magasins situés sur une longue rue. On prend une situation simple : la rue est rectiligne et deux magasins situés côte à côte sont distants de 1 km (kilomètre). Le premier magasin est à 1 km du centre-ville, le second magasin est situé à 2 km du centre-ville,...

Soit n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère qu'il y a n magasins. Chaque magasin est numéroté et repéré par un entier i compris entre 1 et n. On peut ainsi représenter l'ensemble des magasins sur un demi-axe gradué d'origine le centre-ville :



Le livreur livre tous les magasins sans ordre précis a priori. Nous allons déterminer la distance parcourue par le livreur pour effectuer les livraisons des n magasins.

Partie A - En voiture

Au départ, le livreur arrive à un des magasins et utilise son véhicule de transport pour tous les trajets qu'il devra effectuer. Depuis ce premier magasin, on comptabilise le nombre de kilomètres qu'il va parcourir pour livrer tous les autres magasins.

Par exemple, pour $n = 6$ magasins, si le livreur arrive au magasin situé à 2 km du centre-ville et décide d'effectuer ses livraisons dans l'ordre suivant : $2 \to 4 \to 5 \to 3 \to 6 \to 1$. La distance parcourue est alors de $2 + 1 + 2 + 3 + 5 = 13$ km.

On pourra utiliser cette rédaction pour illustrer les raisonnements.

1. Dans cette question, on considère le cas $n = 5$.
   a) Vérifier que la distance parcourue est de 7 km si le livreur suit l'ordre suivant :
   $$1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2.$$
   La distance parcourue est $2 + 1 + 1 + 3 = 7$ km.
   b) Citer tous les parcours de livraison dont la distance vaut 4 km.
   $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$ et $5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$
   c) Trouver deux parcours de livraison dont la distance vaut 10 km.
   [[4, 1, 3, 5, 2], [1, 4, 2, 5, 3], [3, 4, 2, 5, 1], [2, 3, 5, 1, 4], [3, 5, 2, 4, 1], [2, 5, 3, 1, 4], [4, 3, 1, 5, 2], [1, 5, 2, 4, 3], [5, 2, 4, 1, 3], [5, 1, 4, 2, 3], [3, 2, 4, 1, 5], [3, 1, 4, 2, 5], [4, 1, 5, 3, 2], [2, 5, 1, 3, 4]]
   d) Existe-t-il un parcours dont la distance est strictement supérieure à 10 km ? Justifier.
   Oui, par exemple le parcours $2 \to 5 \to 1 \to 4 \to 3$ mesure $3 + 4 + 3 + 1 = 11$ km.

Désormais on considère un entier $n \geqslant 2$.

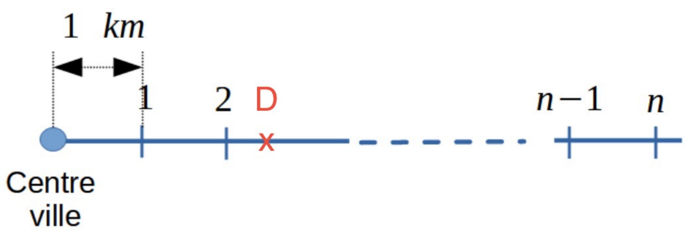
2. a) Trouver un parcours de livraison tel que la distance parcourue soit $n-1$ km.
   Le parcours $1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to n$
   b) Est-ce la distance la plus courte possible ?
   La distance minimale entre deux magasins vaut 1 et il y a $n-1$ magasins à visiter à partir d'un magasin quelconque donc la distance d vérifie $d \geqslant n-1$.
   De plus le trajet $1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to n$ a pour distance $n-1$ km donc la distance minimale est $n-1$.

Partie B - À bout de bras

Désormais le livreur gare son véhicule entre le premier et le dernier magasin. On note D le point correspondant à l'emplacement de son véhicule. Il ne l'utilisera plus et devra donc à chaque livraison faire l'aller-retour à pied entre son véhicule et chacun des magasins. Après la dernière livraison, le livreur retourne à son véhicule.

On admettra que la distance ainsi parcourue par le livreur ne dépend pas de l'ordre des magasins livrés.

Par exemple, dans la figure ci-dessous, le livreur a garé son véhicule à $2,5$ km du centre-ville. Pour livrer les deux premiers magasins, le livreur peut effectuer le trajet $D \to 1 \to D \to 2 \to D$. La distance parcourue par le livreur est $1,5+1,5+0,5+0,5 = 4$ km. Si le livreur effectue un autre trajet, par exemple $D \to 2 \to D \to 1 \to D$, la distance parcourue est toujours égale à 4 km.



1. Dans cette question, on considère le cas $n = 5$.
   a) Le livreur gare son véhicule en D situé à $2,5$ km du centre-ville. Vérifier que la distance est 13 km si le livreur livre les magasins dans l'ordre 1, 2, 3, 4, 5 correspondant au trajet $D \to 1 \to D \to 2 \to D \to 3 \to D \to 4 \to D \to 5 \to D$.
   On calcule $2 \times (1,5+0,5+0,5+1,5+2,5) = 13$ km.
   b) Le livreur gare son véhicule en D situé à 3 km du centre-ville. Déterminer la distance parcourue pour livrer tous les magasins.
   Le trajet est $D \to 1 \to D \to 2 \to D \to 4 \to D \to 5 \to D \to 6 \to D$.
   La distance totale est $2 \times 2 \times (1+2) = 12$ km.

2. Dans cette question, on considère le cas $n = 6$.
   a) Le livreur gare son véhicule en D situé à 2 km du centre-ville. Déterminer la distance parcourue pour livrer tous les magasins.
   On calcule $2 \times (1+1+2+3+4) = 22$ km.
   b) Trouver une position du point D afin d'obtenir une distance de livraison plus courte que la distance trouvée dans la question 2.a). Quelle distance obtient-on pour livrer tous les magasins ?
   On prend D placé entre le magasin 3 et 4 . Par exemple.....D à $3,5$ km.
   On calcule $2 \times 2 \times (0,5+1,5+2,5) = 18$ km

Annexes

Exercice 1 - Question A.1.a)

Urne A / Urne B	3	6	7	10
2	A	A	A	A
5	B	A	A	A
8	B	B	B	A
11	B	B	B	B

Urne B / Urne C	2	5	8	11
1	B	B	B	B
4	C	B	B	B
9	C	C	C	B
12	C	C	C	C

Urne C / Urne A	1	4	9	12
3	A	C	C	C
6	A	A	C	C
7	A	A	C	C
10	A	A	A	C

Exercice 1 - Question B.1.a)

Urne A / Urne B	1	4	7	10
2	B	A	A	A
5	B	B	A	A
8	B	B	B	A
11	B	B	B	B

Urne B / Urne C	2	5	8	11
3	C	B	B	B
6	C	C	B	B
9	C	C	C	B
12	C	C	C	C

Urne C / Urne A	3	6	9	12
1	C	C	C	C
4	A	C	C	C
7	A	A	C	C
10	A	A	A	C

Exercice 1 - Question C.1.a)

Urne A / Urne B	1	4	7	7
2	B	A	A	A
6	B	B	A	A
6	B	B	A	A
6	B	B	A	A

Urne B / Urne C	2	6	6	6
3	C	B	B	B
5	C	B	B	B
5	C	B	B	B
8	C	C	C	C

Urne C / Urne A	3	5	5	8
1	C	C	C	C
4	A	C	C	C
7	A	A	A	C
7	A	A	A	C

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Voie technologique

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.

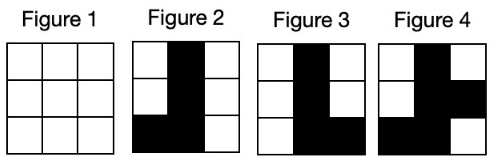
Exercice 1 - Tout en blocs

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On appelle *Bloc* de taille n tout quadrillage blanc de n lignes et n colonnes dont certaines cases sont colorées en noir en respectant la règle suivante :

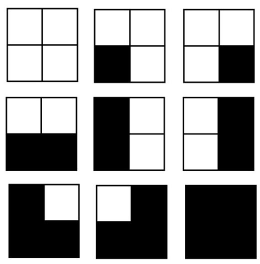
si une case est noire, alors toutes les cases qui sont en dessous de celle-ci sont noires.

Par exemple, les figures 1, 2 et 3 sont des *Blocs* différents de taille 3. La figure 4 n'est pas un *Bloc* de taille 3.



Remarquons qu'une fois dessiné, on ne retourne pas un *Bloc*.

1. Tracer sur la copie tous les *Blocs* de taille 2.



2. Combien y a-t-il de *Blocs* de taille 6 ?
   Il y en a $7^6 = 117649$.

On rappelle qu'un nombre premier est un nombre entier positif ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même. Les six premiers nombres premiers sont 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13.

À chaque case d'un *Bloc* de taille n, on associe :

- le nombre 1 si la case est blanche ;
- le k-ième nombre premier si la case est noire et se trouve dans la k-ième colonne du *Bloc*.

Ainsi, à tout *Bloc* de taille n, on associe un unique nombre entier naturel i égal au produit des nombres associés à ses n^2 cases.

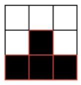
Dans toute la suite de l'exercice, on notera $B_{i,n}$ le bloc de taille n auquel on associe ce nombre i.

Par exemple :

- le nombre $1^9 = 1$ est associé au *Bloc* de la figure 1 : ce *Bloc* est noté $B_{1,3}$;

- le nombre $1^5 \times 2^1 \times 3^3 = 54$ est associé au *Bloc* de la figure 2 : ce *Bloc* est noté $B_{54,3}$.

3. Tracer le *Bloc* $B_{90,3}$ de taille 3 auquel est associé le nombre 90.
   Comme $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$, le *Bloc* $B_{90,3}$ est :

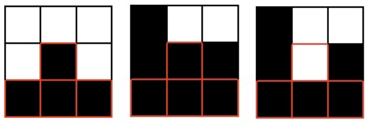


4. Le nombre 2 500 est-il associé à un *Bloc* de taille 3 ?
   Comme $2500 = 2^2 \times 5^4$ le nombre 2 500 n'est pas associé à un *Bloc* de taille 3.
5. Quel est le plus grand nombre associé à un *Bloc* de taille 3 ?
   C'est le nombre $2^3 \times 3^3 \times 5^3 = 27000$.

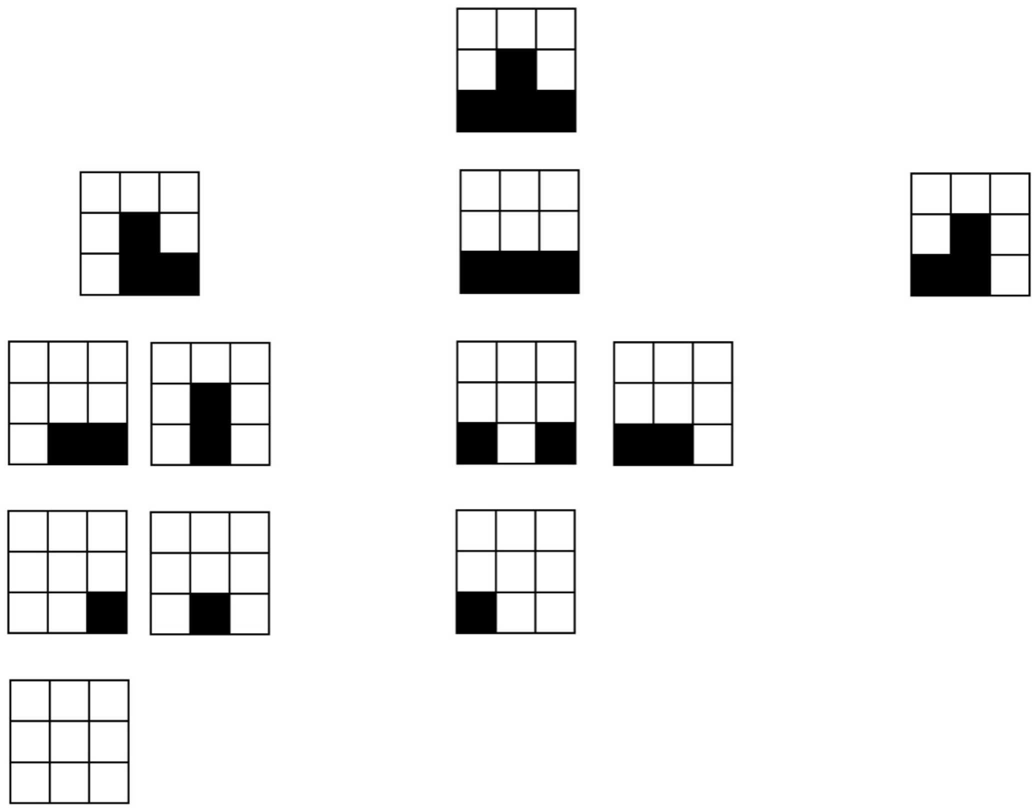
Soient i et j deux entiers associés à deux *Blocs* de taille n. On dit que $B_{i,n}$ se pose sur $B_{j,n}$ si toutes les cases noires de $B_{i,n}$ sont également colorées en noir sur $B_{j,n}$.

Par exemple, le *Bloc* de la figure 5 se pose sur celui de la figure 6 mais pas sur celui de la figure 7.

Figure 5 Figure 6 Figure 7



6. (a) Tracer tous les *Blocs* qui se posent sur celui de la figure 5. Pour cela, on pourra utiliser les quadrillages de l'annexe 1.

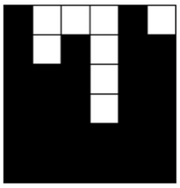


(b) Quels sont les nombres associés à ces *Blocs* ?

Les nombres associés sont 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 15 ; 18 ; 30 ; 45 ; 90. Ce sont tous les diviseurs de 90.

7. On admet la propriété suivante : le *Bloc* $B_{i,n}$ se pose sur le *Bloc* $B_{j,n}$ si et seulement si le nombre i divise j.

(a) Déterminer le nombre de diviseurs positifs du nombre associé au *Bloc* de taille 6 ci-dessous :



La question revient à dénombrer le nombre de *Blocs* qui se posent sur ce *Bloc* de taille 6. Il y en a $7 \times 5 \times 6 \times 3 \times 7 \times 6 = 26460$

(b) Trouver tous les nombres associés à des *Blocs* de taille 3 et qui ont exactement 18 diviseurs positifs.

Comme $18 = 2 \times 3 \times 3$, ce sont tous les nombres associés à un *Bloc* ayant une colonne avec une case noire et deux colonnes avec 2 cases noires. Il y en a 3 : $2 \times 3^2 \times 5^2 = 450$, $2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$ et $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.

(c) Combien de nombres associés à des *Blocs* de taille 3 ont exactement cinq diviseurs positifs ?

5 est un nombre premier. Les nombres cherchés sont associés à des *Blocs* dont l'une des colonnes comporte 4 cases noires. C'est impossible avec des *Blocs* de taille 3. Il n'y a donc pas de nombres associés à des *Blocs* de taille 3 qui ont exactement 5 diviseurs.

Exercice 2 - Pièces en prise mutuelle

On considère un plateau de jeu de 64 cases composés de 8 colonnes nommées a, b, c, d, e, f, g et h et de 8 lignes numérotées de 1 à 8. Les cases de ce plateau sont soit blanches, soit grisées. Par exemple, la case a1 est grisée, la case b1 est blanche, la case c1 est grisée, etc.

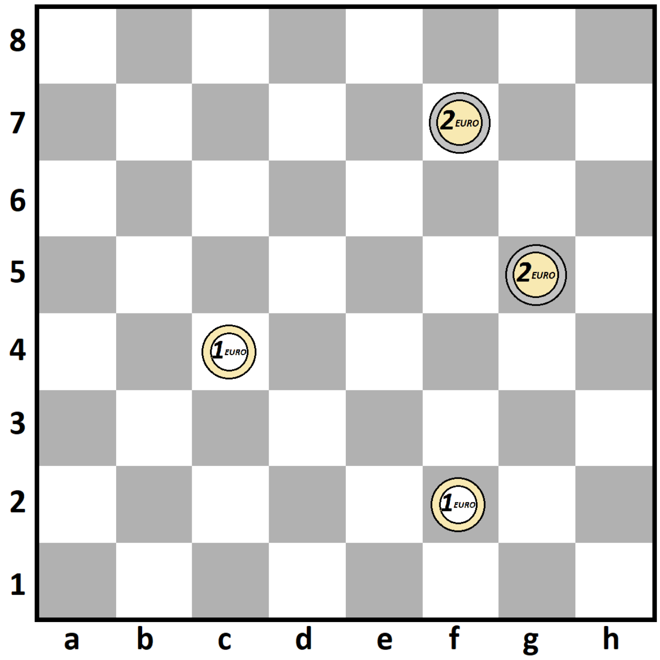


Figure 1

Dans cet exercice, on étudie les différentes possibilités de placer dans les cases de ce plateau de jeu des pièces de 1 euro et de 2 euros.

Sur la figure 1, on a disposé sur le plateau :

- une pièce de 1 euro dans la case c4 ;
- une pièce de 1 euro dans la case f2 ;
- une pièce de 2 euros dans la case f7 ;
- une pièce de 2 euros dans la case g5.

Dans cet exercice, on ne peut placer qu'une seule pièce au maximum par case.

Partie A - Placer deux pièces

1. Combien y a-t-il de façons, sur un plateau vide, de placer simultanément une pièce de 1 euro et une pièce de 2 euros dans des cases blanches ?
   On a 32 cases blanches possibles afin de placer la pièce de 1 euro. Puis il reste 31 cases blanches possibles de placer la pièce de 2 euros. On a donc $31 \times 32 = 992$ manières de placer ces deux pièces sur des cases blanches.

On dit **qu'une pièce de 1 euro et une pièce de 2 euros sont en prise mutuelle** si elles sont alignées en diagonale sur le plateau. Par exemple sur la figure 1, la pièce de 1 euro en c4 et la pièce de 2 euros en f7 sont en prise mutuelle mais pas les pièces des cases f2 et g5. Deux pièces qui sont en prise mutuelle sont donc nécessairement dans des cases de même couleur.

2. (a) On place une pièce de 1 euro dans la case c6 d'un plateau vide. Citer les 11 cases où peut être placée une pièce de 2 euros de telle manière qu'elle soit en prise mutuelle avec la pièce de 1 euro.

   Ce sont les cases a8, b7, d5, e4, f3, g2, h1, a4, b5, d7, e8.

   (b) Dans l'annexe 2, on a inscrit 11 dans la case c6 pour indiquer le nombre de ces possibilités. De même, on a complété toutes les cases grisées en suivant le même principe. Sans justifier, compléter les cases blanches du plateau de l'annexe 2.

8	7	7	7	7	7	7	7	7
7	7	9	9	9	9	9	9	7
6	7	9	11	11	11	11	9	7
5	7	9	11	13	13	11	9	7
4	7	9	11	13	13	11	9	7
3	7	9	11	11	11	11	9	7
2	7	9	9	9	9	9	9	7
1	7	7	7	7	7	7	7	7
	a	b	c	d	e	f	g	h

   (c) Combien a-t-on de façons, sur un plateau vide, de placer une pièce de 1 euro et une pièce de 2 euros à la fois sur des cases blanches et en prise mutuelle ?

   D'après la question précédente, on a $7 \times 14 + 9 \times 10 + 6 \times 11 + 2 \times 13 = 280$ façons de placer les deux pièces sur des cases blanches telle qu'elles soient en prise mutuelle.

Partie B - Placer quatre pièces

On dispose de deux pièces de 1 euro et de deux pièces de 2 euros que l'on souhaite placer sur le plateau de jeu vide de la manière suivante :

- on place une pièce de 1 euro dans une case blanche, cette pièce est alors notée 1B. On place l'autre pièce de 1 euro dans une case grisée, cette pièce est alors notée 1G ;
- de même, on place une pièce de 2 euros dans une case blanche, cette pièce est alors notée 2B. On place l'autre pièce de 2 euros dans une case grisée, cette pièce est alors notée 2G.

1. En utilisant la question A.1., déterminer le nombre de façons de placer ces quatre pièces sur le plateau de jeu vide.

A la question 1 de la partie A, on a vu que l'on a 992 façons de placer les pièces 1B et 2B. De manière analogue, on a 992 façons de placer les pièces 1G et 2G. On a donc $992^2 = 984064$ façons de placer nos quatre pièces sur un plateau vide.

2. Sur le plateau de jeu vide, on place au hasard les deux pièces 1B et 2B dans des cases blanches puis on place également au hasard les deux pièces 1G et 2G dans des cases grisées. On note :
   - G l'événement "les pièces 1G et 2G sont en prise mutuelle",
   - B l'événement "les pièces 1B et 2B sont en prise mutuelle".

   On admet que $P(G) = P(B)$.

   (a) Démontrer que $P(B) = \dfrac{35}{124}$.

   D'après les questions précédentes, on a 280 façons de placer les pièces 1B et 2B telle qu'elles soient en prise mutuelle parmi les 992 façons de placer ces deux pièces. On a donc $P(B) = 280/992 = \dfrac{35}{124}$.

   (b) Démontrer que $P(G \cap B) = \dfrac{1225}{15376}$.

   Méthode 1 : on remarque que les événements G et B sont indépendants d'où $P(G \cap B) = P(G) \times P(B) = (\dfrac{35}{124})^2 = \dfrac{1225}{15376}$.

   Méthode 2 : On a 280 façons de placer les pièces 1B et 2B telles qu'elles soient en prise mutuelle, et de manière symétrique, on a 280 façons de placer les pièces 1G et 2G telles qu'elles soient en prise mutuelle. On a donc $280^2 = 78400$ façons de placer ces quatre pièces afin de vérifier l'événement $G \cap B$. On a donc $P(G \cap B) = \dfrac{78400}{984064} = \dfrac{1225}{15376}$.

   (c) Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au moins une paire de pièces soit en prise mutuelle.

   $P(G \cup B) = P(G) + P(B) - P(G \cap B) = 2 \times \dfrac{35}{124} - \dfrac{1225}{15376} \approx 0,485$.