OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE NICE
2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

CORRECTION INDIVIDUEL

2022

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Voie générale

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Rappels pour les deux exercices du sujet

- Un **nombre premier** est un nombre entier naturel ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
- Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 50 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
- 1 n'est pas un nombre premier.

Exercice 1 : Nombres cousins

Dans cet exercice, on donne la définition suivante.

Deux nombres premiers $a < b$ sont **cousins** si leur différence $b - a$ est égale à 4. On dit alors qu'ils forment un **couple de nombres cousins** que l'on notera (a, b).

Partie A : *Premières recherches*

1. Le nombre premier 2 admet-il un cousin ? Justifier.

   Si 2 admet un cousin, alors c'est nécessairement $2 + 4 = 6$ qui n'est pas premier. 2 n'admet donc pas de cousin.

2. Avec quels nombres premiers 7 est-il cousin ? Préciser les couples obtenus.

   Soit un couple (a, b) de nombres premiers cousins où $a < b$.
   Si $a = 7$ alors on a nécessairement $b = 7 + 4 = 11$ qui est un nombre premier.
   Si $b = 7$ alors on a nécessairement $a = 7 - 4 = 3$ qui est un nombre premier.
   Ainsi 7 peut être cousin avec 3 et 11, on obtient alors les couples $(3, 7)$ et $(7, 11)$.

3. Déterminer tous les couples de nombres premiers cousins constitués d'entiers inférieurs à 50.

   Il y a 6 couples :
   $$(3, 7), (7, 11), (13, 17), (19, 23), (37, 41), (43, 47)$$

Partie B : *Nature des couples*
On rappelle que :

- la division euclidienne d'un entier naturel a par 6 s'écrit : $a = 6 \times q + r$ où q et r sont les uniques entiers tels que $0 \leqslant r < 6$;
- q est le quotient et r est le reste de cette division euclidienne.

1. Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 5. Soit r le reste de la division euclidienne de a par 6.

   (a) Démontrer que si le reste r est égal à 0 ou 2 ou 3 ou 4, alors a n'est pas un nombre premier.

   Soit a un nombre entier tel que $a \geqslant 5$.
   Si r est dans $\{0, 2, 4\}$ alors $a = 2 \times 3 \times q + r$ est un nombre pair en tant que somme de deux nombres pairs. Hors il n'existe pas de nombre premier pair autre que 2, comme $a \geqslant 5$, a ne peut pas être premier.
   Si $r = 3$ alors $a = 3 \times (2q + 1)$ où $2q + 1$ est un nombre entier donc 3 divise a, ainsi a ne peut pas être un nombre premier.

(b) Démontrer que si le reste r est égal à 5, alors $a+4$ n'est pas un nombre premier.

Si $r=5$ alors on a $a=6q+5$ d'où $a+4=6q+9=3(2q+3)$ où $2q+3$ est un nombre entier. Ainsi 3 divise $a+4$ qui est un nombre entier supérieur ou égal à 4. On en déduit que $a+4$ n'est pas un nombre premier.

2. Démontrer alors que tous les couples d'entiers premiers cousins, excepté le couple $(3,7)$, peuvent s'écrire sous la forme $(6q+1, 6q+5)$ où q désigne un entier naturel non nul.

Excepté $(3,7)$, le plus petit couple de nombres premiers cousins est $(7,11)$. Ainsi si (a,b) est un couple de nombres premiers cousins autre que (3,7), on a $a \geqslant 7 \geqslant 5$. D'après la question précédente, comme a et $b=a+4$ sont des nombres premiers alors on a nécessairement $r=1$ d'où $a=6q+1$ et $b=a+4=6q+5$. De plus comme $a \geqslant 7$, on obtient $6q+1 \geqslant 7$ d'où $q \geqslant 1$ donc q est un entier naturel non nul.

Partie C : *Étude des nombres compris entre deux cousins*

Pour répondre aux questions suivantes, on pourra utiliser le résultat de la question B.2 même s'il n'a pas été démontré.

1. Montrer que si (a,b) est un couple de nombres premiers cousins autre que $(3,7)$ alors la moyenne m de ces deux nombres, donnée par $m=\dfrac{a+b}{2}$, est un nombre entier qui n'est pas premier.

D'après la partie précédente, il existe un entier naturel q non nul tel que $a=6q+1$ et $b=6q+5$. Comme $q \geq 1$, on a $a \geq 7$ et $m=a+2$ qui est supérieur ou égal à 9. Ainsi $m=\dfrac{a+b}{2}=6q+3=3(2q+1)$ est un nombre entier qui est toujours divisible par 3. Comme $m \neq 3$, on en déduit que m n'est pas premier.

2. On considère (a,b) un couple de nombres premiers cousins autre que $(3,7)$. Démontrer que tous les entiers qui sont strictement compris entre a et b ne sont pas premiers.

Il existe un entier naturel q non nul tel que $a=6q+1$ et $b=6q+5$. Comme $q \geq 1$, on a $a \geq 7$.

- $a+1=6q+2$ est divisible par 2 donc n'est pas premier ;
- $a+2=m$ n'est pas premier d'après la question précédente ;
- $a+3=6q+4$ est divisible par 2 donc n'est pas premier.

3. Est-il possible d'obtenir trois entiers a, b et c tels que les couples (a,b) et (b,c) soient des couples de nombres premiers cousins et tels que $5 \leqslant a < b < c$? Justifier la réponse.

On suppose que de tels entiers a, b et c existent.
D'après la question B.2, il existerait un entier naturel q non nul tel que $a=6q+1$ et $b=6q+5$.
$c=b+4=6q+9=3(2q+3)$ serait donc divisible par 3 est ne serait donc pas premier (car $c > a \geqslant 7$)), ce qui est contraire à l'hypothèse selon laquelle c est premier.
De tels entiers n'existent donc pas.
Cependant (3,7) et (7,11) fonctionnent...

Partie D : *Langage Python*

En langage Python, on rappelle que, si `n` désigne un entier naturel non nul :

- l'instruction `range(1,n+1)` correspond à la liste des entiers naturels compris entre 1 et `n` inclus ;
- `n % k` est le reste dans la division euclidienne de l'entier `n` par un entier naturel non nul `k` ;
- `a == b` renvoie `True` si `a` et `b` sont égaux, `False` sinon.

On considère la fonction **`mystère`** écrite en langage Python prenant pour argument, en entrée, un entier naturel **`n`** non nul :

```
def mystère(n):
    compteur = 0
    for k in range(1, n + 1):
        if n % k == 0:
            compteur = compteur + 1
    return compteur == 2
```

Voici un exemple d'utilisation de cette fonction :

```
>>> mystère(7)
True
>>> mystère(155)
False
```

1. Préciser le rôle de la fonction `mystère`.

   Cette fonction retourne `True` si le nombre `n` est premier et `False` sinon.

2. On souhaite programmer une fonction `cousins(n)`, où `n` désigne un entier naturel non nul, qui renvoie le nombre de couples d'entiers premiers cousins (a, b) tels que $b \leqslant$ `n`. Par exemple, un résultat attendu est :

   ```
   >>> cousins(2022)
   65
   ```

   Recopier et compléter la fonction `cousins(n)` ci-dessous. On pourra utiliser la fonction `mystère` introduite à la question précédente.

   ```
   def cousins(n):
       compteur = 0
       for a in range(...):
           if ... and ... :
               ...
       return compteur
   ```

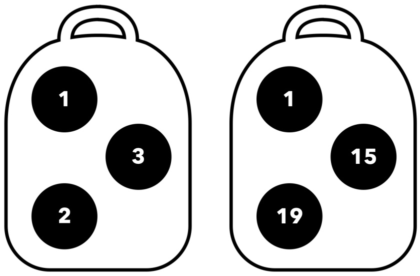
   ```
   def cousins(n):
       compteur = 0
       for a in range(2, n-3):
           if mystère(a) and mystère(a+4) :
               compteur = compteur + 1
       return compteur
   ```

À ce jour, il n'a pas été démontré qu'il existait une infinité de couples d'entiers premiers cousins malgré de fortes présomptions... Ce résultat a le statut actuel de conjecture.

Exercice 2 : Joli sac

Un sac contient plusieurs jetons, tous distincts. Sur chaque jeton est inscrit un nombre entier.
On convient de nommer « jeton n » le jeton sur lequel est écrit le nombre entier n.

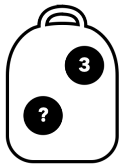
On dit que le sac est **joli** si, pour tous les couples de jetons du sac, la différence positive des nombres inscrits sur les jetons n'est pas un nombre premier.
On en déduit que le sac **n'est pas joli** s'il existe au moins un couple de jetons du sac dont la différence positive est un nombre premier.



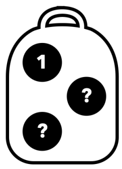
Le sac n'est pas joli. Le sac est joli.

Par exemple, le sac contenant les jetons 1, 2 et 3 « n'est pas joli » car $3 - 1 = 2$ et 2 est un nombre premier. En revanche, le sac contenant les jetons 1, 15 et 19 « est joli » car les différences positives sont $15 - 1 = 14$, $19 - 1 = 18$, $19 - 15 = 4$ et ni 14, ni 18, ni 4 ne sont des nombres premiers.

1. Dans cette question, on considère un sac contenant deux jetons : le jeton 3 et le jeton n.
   (a) Le sac est-il joli si $n = 2$?
   $3 - 2 = 1$ et 1 n'est pas un nombre premier donc le sac est joli.
   (b) Le sac est-il joli si $n = 5$?
   $5 - 3 = 2$ et 2 est un nombre premier donc le sac n'est pas joli.
   (c) Pour quelles valeurs de n, comprises entre 1 et 20 inclus, le sac est-il joli ?
   On peut utiliser les jetons 2, 4, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19.



2. Dans cette question, on considère un sac contenant trois jetons, dont le jeton 1. En choisissant deux autres jetons parmi les jetons 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, donner un exemple de sac « joli ».
   On peut former les sacs jolis :
   - 1, 2, 10
   - 1, 5, 9
   - 1, 9, 10
   - 2, 6, 10



3. En justifiant les réponses, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
   (a) Il est possible de faire un sac joli avec trois nombres premiers.

Vrai. Les sacs jolis possibles avec trois nombres premiers inférieurs à 50 sont (2,3,11) ; (2,3,17) ; (2,3,23) ; (2,3,29) ; (2,3,37) ; (2,3,41) ; (2,3,47) ; (2,11,17) ; (2,11,23) ; (2,11,29) ; (2,11,37) ; (2,11,41) ; (2,11,47) ; (2,17,23) ; (2,17,29) ; (2,17,37) ; (2,17,41) ; (2,17,47) ; (2,23,29) ; (2,23,37) ; (2,23,41) ; (2,23,47) ; (2,29,37) ; (2,29,41) ; (2,29,47) ; (2,37,41) ; (2,37,47) ; (2,41,47) ; (3,7,11) ; (3,7,13) ; (3,7,17) ; (3,7,19) ; (3,7,23) ; (3,7,29) ; (3,7,31) ; (3,7,37) ; (3,7,41) ; (3,7,43) ; (3,7,47) ; (3,11,17) ; (3,11,19) ; (3,11,23) ; (3,11,29) ; (3,11,31) ; (3,11,37) ; (3,11,41) ; (3,11,43) ; (3,11,47) ; (3,13,17) ; (3,13,19) ; (3,13,23) ; (3,13,29) ; (3,13,31) ; (3,13,37) ; (3,13,41) ; (3,13,43) ; (3,13,47) ; (3,17,23) ; (3,17,29) ; (3,17,31) ; (3,17,37) ; (3,17,41) ; (3,17,43) ; (3,17,47) ; (3,19,23) ; (3,19,29) ; (3,19,31) ; (3,19,37) ; (3,19,41) ; (3,19,43) ; (3,19,47) ; (3,23,29) ; (3,23,31) ; (3,23,37) ; (3,23,41) ; (3,23,43) ; (3,23,47) ; (3,29,37) ; (3,29,41) ; (3,29,43) ; (3,29,47) ; (3,31,37) ; (3,31,41) ; (3,31,43) ; (3,31,47) ; (3,37,41) ; (3,37,43) ; (3,37,47) ; (3,41,47) ; (3,43,47) ; (5,11,17) ; (5,11,19) ; (5,11,23) ; (5,11,29) ; (5,11,31) ; (5,11,37) ; (5,11,41) ; (5,11,43) ; (5,11,47) ; (5,13,17) ; (5,13,19) ; (5,13,23) ; (5,13,29) ; (5,13,31) ; (5,13,37) ; (5,13,41) ; (5,13,43) ; (5,13,47) ; (5,17,23) ; (5,17,29) ; (5,17,31) ; (5,17,37) ; (5,17,41) ; (5,17,43) ; (5,17,47) ; (5,19,23) ; (5,19,29) ; (5,19,31) ; (5,19,37) ; (5,19,41) ; (5,19,43) ; (5,19,47) ; (5,23,29) ; (5,23,31) ; (5,23,37) ; (5,23,41) ; (5,23,43) ; (5,23,47) ; (5,29,37) ; (5,29,41) ; (5,29,43) ; (5,29,47) ; (5,31,37) ; (5,31,41) ; (5,31,43) ; (5,31,47) ; (5,37,41) ; (5,37,43) ; (5,37,47) ; (5,41,47) ; (5,43,47) ; (7,11,17) ; (7,11,19) ; (7,11,23) ; (7,11,29) ; (7,11,31) ; (7,11,37) ; (7,11,41) ; (7,11,43) ; (7,11,47) ; (7,13,17) ; (7,13,19) ; (7,13,23) ; (7,13,29) ; (7,13,31) ; (7,13,37) ; (7,13,41) ; (7,13,43) ; (7,13,47) ; (7,17,23) ; (7,17,29) ; (7,17,31) ; (7,17,37) ; (7,17,41) ; (7,17,43) ; (7,17,47) ; (7,19,23) ; (7,19,29) ; (7,19,31) ; (7,19,37) ; (7,19,41) ; (7,19,43) ; (7,19,47) ; (7,23,29) ; (7,23,31) ; (7,23,37) ; (7,23,41) ; (7,23,43) ; (7,23,47) ; (7,29,37) ; (7,29,41) ; (7,29,43) ; (7,29,47) ; (7,31,37) ; (7,31,41) ; (7,31,43) ; (7,31,47) ; (7,37,41) ; (7,37,43) ; (7,37,47) ; (7,41,47) ; (7,43,47) ; (11,17,23) ; (11,17,29) ; (11,17,31) ; (11,17,37) ; (11,17,41) ; (11,17,43) ; (11,17,47) ; (11,19,23) ; (11,19,29) ; (11,19,31) ; (11,19,37) ; (11,19,41) ; (11,19,43) ; (11,19,47) ; (11,23,29) ; (11,23,31) ; (11,23,37) ; (11,23,41) ; (11,23,43) ; (11,23,47) ; (11,29,37) ; (11,29,41) ; (11,29,43) ; (11,29,47) ; (11,31,37) ; (11,31,41) ; (11,31,43) ; (11,31,47) ; (11,37,41) ; (11,37,43) ; (11,37,47) ; (11,41,47) ; (11,43,47) ; (13,17,23) ; (13,17,29) ; (13,17,31) ; (13,17,37) ; (13,17,41) ; (13,17,43) ; (13,17,47) ; (13,19,23) ; (13,19,29) ; (13,19,31) ; (13,19,37) ; (13,19,41) ; (13,19,43) ; (13,19,47) ; (13,23,29) ; (13,23,31) ; (13,23,37) ; (13,23,41) ; (13,23,43) ; (13,23,47) ; (13,29,37) ; (13,29,41) ; (13,29,43) ; (13,29,47) ; (13,31,37) ; (13,31,41) ; (13,31,43) ; (13,31,47) ; (13,37,41) ; (13,37,43) ; (13,37,47) ; (13,41,47) ; (13,43,47) ; (17,23,29) ; (17,23,31) ; (17,23,37) ; (17,23,41) ; (17,23,43) ; (17,23,47) ; (17,29,37) ; (17,29,41) ; (17,29,43) ; (17,29,47) ; (17,31,37) ; (17,31,41) ; (17,31,43) ; (17,31,47) ; (17,37,41) ; (17,37,43) ; (17,37,47) ; (17,41,47) ; (17,43,47) ; (19,23,29) ; (19,23,31) ; (19,23,37) ; (19,23,41) ; (19,23,43) ; (19,23,47) ; (19,29,37) ; (19,29,41) ; (19,29,43) ; (19,29,47) ; (19,31,37) ; (19,31,41) ; (19,31,43) ; (19,31,47) ; (19,37,41) ; (19,37,43) ; (19,37,47) ; (19,41,47) ; (19,43,47) ; (23,29,37) ; (23,29,41) ; (23,29,43) ; (23,29,47) ; (23,31,37) ; (23,31,41) ; (23,31,43) ; (23,31,47) ; (23,37,41) ; (23,37,43) ; (23,37,47) ; (23,41,47) ; (23,43,47) ; (29,37,41) ; (29,37,43) ; (29,37,47) ; (29,41,47) ; (29,43,47) ; (31,37,41) ; (31,37,43) ; (31,37,47) ; (31,41,47) ; (31,43,47) ; (37,41,47) ; (37,43,47).

(b) Si un sac de trois jetons est joli, alors il n'est plus joli si on lui retire un de ses jetons.
Faux. Les différences positives des jetons qui restent dans le sac ne sont pas des nombres premiers.

(c) La somme des jetons d'un sac joli à trois jetons peut être un nombre premier.
Vrai. Les sacs jolis possibles avec trois jetons dont la somme est un nombre premier inférieur à 50 sont (1,2,10) ; (1,2,16) ; (1,2,26) ; (1,2,28) ; (1,2,34) ; (1,2,40) ; (1,5,11) ; (1,5,13) ; (1,5,17) ; (1,5,23) ; (1,5,25) ; (1,5,31) ; (1,5,35) ; (1,5,37) ; (1,5,41) ; (1,7,11) ; (1,7,15) ; (1,7,21) ; (1,7,23) ; (1,7,29) ; (1,7,33) ; (1,7,35) ; (1,7,39) ; (1,9,13) ; (1,9,19) ; (1,9,21) ; (1,9,27) ; (1,9,31) ; (1,9,33) ; (1,9,37) ; (1,10,26) ; (1,10,36) ; (1,11,17) ; (1,11,19) ; (1,11,25) ; (1,11,29) ; (1,11,31) ; (1,11,35) ; (1,13,17) ; (1,13,23) ; (1,13,27) ; (1,13,29) ; (1,13,33) ; (1,15,21) ; (1,15,25) ; (1,15,27) ; (1,15,31) ; (1,16,26) ; (1,17,23) ; (1,17,25) ; (1,17,29) ; (1,19,23) ; (1,19,27) ; (1,21,25) ; (2,3,12) ; (2,3,18) ; (2,3,24) ; (2,3,36) ; (2,3,38) ; (2,3,42) ; (2,10,11) ; (2,10,35) ; (2,12,27) ; (2,17,18) ; (2,18,27) ;

(2,22,23) ; (3,4,12) ; (3,4,24) ; (3,4,30) ; (3,4,36) ; (3,7,13) ; (3,7,19) ; (3,7,21) ; (3,7,27) ; (3,7,31) ; (3,7,33) ; (3,7,37) ; (3,9,17) ; (3,9,19) ; (3,9,25) ; (3,9,29) ; (3,9,31) ; (3,9,35) ; (3,11,15) ; (3,11,17) ; (3,11,23) ; (3,11,27) ; (3,11,29) ; (3,11,33) ; (3,12,28) ; (3,13,21) ; (3,13,25) ; (3,13,27) ; (3,13,31) ; (3,15,19) ; (3,15,23) ; (3,15,25) ; (3,15,29) ; (3,17,21) ; (3,17,23) ; (3,17,27) ; (3,19,25) ; (4,5,14) ; (4,5,20) ; (4,5,32) ; (4,5,38) ; (4,8,29) ; (4,12,13) ; (4,13,14) ; (4,14,29) ; (4,18,19) ; (4,19,20) ; (5,6,20) ; (5,6,26) ; (5,6,30) ; (5,6,32) ; (5,9,15) ; (5,9,17) ; (5,9,23) ; (5,9,27) ; (5,9,29) ; (5,9,33) ; (5,11,15) ; (5,11,21) ; (5,11,25) ; (5,11,27) ; (5,11,31) ; (5,13,19) ; (5,13,23) ; (5,13,25) ; (5,13,29) ; (5,15,21) ; (5,15,23) ; (5,15,27) ; (5,17,21) ; (5,17,25) ; (5,19,23) ; (6,7,16) ; (6,7,28) ; (6,7,34) ; (6,10,31) ; (6,15,16) ; (6,20,21) ; (7,8,16) ; (7,8,22) ; (7,8,28) ; (7,8,32) ; (7,11,19) ; (7,11,23) ; (7,11,25) ; (7,11,29) ; (7,13,17) ; (7,13,21) ; (7,13,23) ; (7,13,27) ; (7,15,19) ; (7,15,21) ; (7,15,25) ; (7,17,23) ; (8,9,24) ; (8,9,30) ; (8,16,17) ; (8,17,18) ; (9,10,18) ; (9,10,24) ; (9,13,19) ; (9,13,21) ; (9,13,25) ; (9,15,19) ; (9,15,23) ; (9,17,21) ; (10,11,20) ; (10,11,26) ; (10,18,19) ; (11,12,20) ; (11,15,21) ; (12,13,22).

(d) Il existe un sac joli contenant exactement 5 nombres premiers.
Vrai. Les sacs jolis contenant exactement 5 nombres premiers inférieurs à 50 sont :

(2,11,17,23,29) ; (2,11,17,23,37) ; (2,11,17,23,41) ; (2,11,17,23,47) ; (2,11,17,29,37) ; (2,11,17,29,41) ; (2,11,17,29,47) ; (2,11,17,37,41) ; (2,11,17,37,47) ; (2,11,17,41,47) ; (2,11,23,29,37) ; (2,11,23,29,41) ; (2,11,23,29,47) ; (2,11,23,37,41) ; (2,11,23,37,47) ; (2,11,23,41,47) ; (2,11,29,37,41) ; (2,11,29,37,47) ; (2,11,29,41,47) ; (2,11,37,41,47) ; (2,17,23,29,37) ; (2,17,23,29,41) ; (2,17,23,29,47) ; (2,17,23,37,41) ; (2,17,23,37,47) ; (2,17,23,41,47) ; (2,17,29,37,41) ; (2,17,29,37,47) ; (2,17,29,41,47) ; (2,17,37,41,47) ; (2,23,29,37,41) ; (2,23,29,37,47) ; (2,23,29,41,47) ; (2,23,37,41,47) ; (2,29,37,41,47) ; (2,3,11,17,23) ; (2,3,11,17,29) ; (2,3,11,17,37) ; (2,3,11,17,41) ; (2,3,11,17,47) ; (2,3,11,23,29) ; (2,3,11,23,37) ; (2,3,11,23,41) ; (2,3,11,23,47) ; (2,3,11,29,37) ; (2,3,11,29,41) ; (2,3,11,29,47) ; (2,3,11,37,41) ; (2,3,11,37,47) ; (2,3,11,41,47) ; (2,3,17,23,29) ; (2,3,17,23,37) ; (2,3,17,23,41) ; (2,3,17,23,47) ; (2,3,17,29,37) ; (2,3,17,29,41) ; (2,3,17,29,47) ; (2,3,17,37,41) ; (2,3,17,37,47) ; (2,3,17,41,47) ; (2,3,23,29,37) ; (2,3,23,29,41) ; (2,3,23,29,47) ; (2,3,23,37,41) ; (2,3,23,37,47) ; (2,3,23,41,47) ; (2,3,29,37,41) ; (2,3,29,37,47) ; (2,3,29,41,47) ; (2,3,37,41,47) ; (23,29,37,41,47) ; (23,29,37,43,47) ; (23,31,37,41,47) ; (23,31,37,43,47) ; (3,11,17,23,29) ; (3,11,17,23,31) ; (3,11,17,23,37) ; (3,11,17,23,41) ; (3,11,17,23,43) ; (3,11,17,23,47) ; (3,11,17,29,37) ; (3,11,17,29,41) ; (3,11,17,29,43) ; (3,11,17,29,47) ; (3,11,17,31,37) ; (3,11,17,31,41) ; (3,11,17,31,43) ; (3,11,17,31,47) ; (3,11,17,37,41) ; (3,11,17,37,43) ; (3,11,17,37,47) ; (3,11,17,41,47) ; (3,11,17,43,47) ; (3,11,19,23,29) ; (3,11,19,23,31) ; (3,11,19,23,37) ; (3,11,19,23,41) ; (3,11,19,23,43) ; (3,11,19,23,47) ; (3,11,19,29,37) ; (3,11,19,29,41) ; (3,11,19,29,43) ; (3,11,19,29,47) ; (3,11,19,31,37) ; (3,11,19,31,41) ; (3,11,19,31,43) ; (3,11,19,31,47) ; (3,11,19,37,41) ; (3,11,19,37,43) ; (3,11,19,37,47) ; (3,11,19,41,47) ; (3,11,19,43,47) ; (3,11,23,29,37) ; (3,11,23,29,41) ; (3,11,23,29,43) ; (3,11,23,29,47) ; (3,11,23,31,37) ; (3,11,23,31,41) ; (3,11,23,31,43) ; (3,11,23,31,47) ; (3,11,23,37,41) ; (3,11,23,37,43) ; (3,11,23,37,47) ; (3,11,23,41,47) ; (3,11,23,43,47) ; (3,11,29,37,41) ; (3,11,29,37,43) ; (3,11,29,37,47) ; (3,11,29,41,47) ; (3,11,29,43,47) ; (3,11,31,37,41) ; (3,11,31,37,43) ; (3,11,31,37,47) ; (3,11,31,41,47) ; (3,11,31,43,47) ; (3,11,37,41,47) ; (3,11,37,43,47) ; (3,13,17,23,29) ; (3,13,17,23,31) ; (3,13,17,23,37) ; (3,13,17,23,41) ; (3,13,17,23,43) ; (3,13,17,23,47) ; (3,13,17,29,37) ; (3,13,17,29,41) ; (3,13,17,29,43) ; (3,13,17,29,47) ; (3,13,17,31,37) ; (3,13,17,31,41) ; (3,13,17,31,43) ; (3,13,17,31,47) ; (3,13,17,37,41) ; (3,13,17,37,43) ; (3,13,17,37,47) ; (3,13,17,41,47) ; (3,13,17,43,47) ; (3,13,19,23,29) ; (3,13,19,23,31) ; (3,13,19,23,37) ; (3,13,19,23,41) ; (3,13,19,23,43) ; (3,13,19,23,47) ; (3,13,19,29,37) ; (3,13,19,29,41) ; (3,13,19,29,43) ; (3,13,19,29,47) ; (3,13,19,31,37) ; (3,13,19,31,41) ; (3,13,19,31,43) ; (3,13,19,31,47) ; (3,13,19,37,41) ; (3,13,19,37,43) ; (3,13,19,37,47) ; (3,13,19,41,47) ; (3,13,19,43,47) ; (3,13,23,29,37) ; (3,13,23,29,41) ; (3,13,23,29,43) ; (3,13,23,29,47) ; (3,13,23,31,37) ; (3,13,23,31,41) ; (3,13,23,31,43) ; (3,13,23,31,47) ; (3,13,23,37,41) ; (3,13,23,37,43) ;

(3,13,23,37,47) ; (3,13,23,41,47) ; (3,13,23,43,47) ; (3,13,29,37,41) ; (3,13,29,37,43) ;
(3,13,29,37,47) ; (3,13,29,41,47) ; (3,13,29,43,47) ; (3,13,31,37,41) ; (3,13,31,37,43) ;
(3,13,31,37,47) ; (3,13,31,41,47) ; (3,13,31,43,47) ; (3,13,37,41,47) ; (3,13,37,43,47) ;
(3,17,23,29,37) ; (3,17,23,29,41) ; (3,17,23,29,43) ; (3,17,23,29,47) ; (3,17,23,31,37) ;
(3,17,23,31,41) ; (3,17,23,31,43) ; (3,17,23,31,47) ; (3,17,23,37,41) ; (3,17,23,37,43) ;
(3,17,23,37,47) ; (3,17,23,41,47) ; (3,17,23,43,47) ; (3,17,29,37,41) ; (3,17,29,37,43) ;
(3,17,29,37,47) ; (3,17,29,41,47) ; (3,17,29,43,47) ; (3,17,31,37,41) ; (3,17,31,37,43) ;
(3,17,31,37,47) ; (3,17,31,41,47) ; (3,17,31,43,47) ; (3,17,37,41,47) ; (3,17,37,43,47) ;
(3,19,23,29,37) ; (3,19,23,29,41) ; (3,19,23,29,43) ; (3,19,23,29,47) ; (3,19,23,31,37) ;
(3,19,23,31,41) ; (3,19,23,31,43) ; (3,19,23,31,47) ; (3,19,23,37,41) ; (3,19,23,37,43) ;
(3,19,23,37,47) ; (3,19,23,41,47) ; (3,19,23,43,47) ; (3,19,29,37,41) ; (3,19,29,37,43) ;
(3,19,29,37,47) ; (3,19,29,41,47) ; (3,19,29,43,47) ; (3,19,31,37,41) ; (3,19,31,37,43) ;
(3,19,31,37,47) ; (3,19,31,41,47) ; (3,19,31,43,47) ; (3,19,37,41,47) ; (3,19,37,43,47) ;
(3,23,29,37,41) ; (3,23,29,37,43) ; (3,23,29,37,47) ; (3,23,29,41,47) ; (3,23,29,43,47) ;
(3,23,31,37,41) ; (3,23,31,37,43) ; (3,23,31,37,47) ; (3,23,31,41,47) ; (3,23,31,43,47) ;
(3,23,37,41,47) ; (3,23,37,43,47) ; (3,29,37,41,47) ; (3,29,37,43,47) ; (3,31,37,41,47) ;
(3,31,37,43,47) ; (3,7,11,17,23) ; (3,7,11,17,29) ; (3,7,11,17,31) ; (3,7,11,17,37) ;
(3,7,11,17,41) ; (3,7,11,17,43) ; (3,7,11,17,47) ; (3,7,11,19,23) ; (3,7,11,19,29) ; (3,7,11,19,31) ;
(3,7,11,19,37) ; (3,7,11,19,41) ; (3,7,11,19,43) ; (3,7,11,19,47) ; (3,7,11,23,29) ; (3,7,11,23,31) ;
(3,7,11,23,37) ; (3,7,11,23,41) ; (3,7,11,23,43) ; (3,7,11,23,47) ; (3,7,11,29,37) ; (3,7,11,29,41) ;
(3,7,11,29,43) ; (3,7,11,29,47) ; (3,7,11,31,37) ; (3,7,11,31,41) ; (3,7,11,31,43) ; (3,7,11,31,47) ;
(3,7,11,37,41) ; (3,7,11,37,43) ; (3,7,11,37,47) ; (3,7,11,41,47) ; (3,7,11,43,47) ; (3,7,13,17,23) ;
(3,7,13,17,29) ; (3,7,13,17,31) ; (3,7,13,17,37) ; (3,7,13,17,41) ; (3,7,13,17,43) ; (3,7,13,17,47) ;
(3,7,13,19,23) ; (3,7,13,19,29) ; (3,7,13,19,31) ; (3,7,13,19,37) ; (3,7,13,19,41) ; (3,7,13,19,43) ;
(3,7,13,19,47) ; (3,7,13,23,29) ; (3,7,13,23,31) ; (3,7,13,23,37) ; (3,7,13,23,41) ; (3,7,13,23,43) ;
(3,7,13,23,47) ; (3,7,13,29,37) ; (3,7,13,29,41) ; (3,7,13,29,43) ; (3,7,13,29,47) ; (3,7,13,31,37) ;
(3,7,13,31,41) ; (3,7,13,31,43) ; (3,7,13,31,47) ; (3,7,13,37,41) ; (3,7,13,37,43) ; (3,7,13,37,47) ;
(3,7,13,41,47) ; (3,7,13,43,47) ; (3,7,17,23,29) ; (3,7,17,23,31) ; (3,7,17,23,37) ; (3,7,17,23,41) ;
(3,7,17,23,43) ; (3,7,17,23,47) ; (3,7,17,29,37) ; (3,7,17,29,41) ; (3,7,17,29,43) ; (3,7,17,29,47) ;
(3,7,17,31,37) ; (3,7,17,31,41) ; (3,7,17,31,43) ; (3,7,17,31,47) ; (3,7,17,37,41) ; (3,7,17,37,43) ;
(3,7,17,37,47) ; (3,7,17,41,47) ; (3,7,17,43,47) ; (3,7,19,23,29) ; (3,7,19,23,31) ; (3,7,19,23,37) ;
(3,7,19,23,41) ; (3,7,19,23,43) ; (3,7,19,23,47) ; (3,7,19,29,37) ; (3,7,19,29,41) ; (3,7,19,29,43) ;
(3,7,19,29,47) ; (3,7,19,31,37) ; (3,7,19,31,41) ; (3,7,19,31,43) ; (3,7,19,31,47) ; (3,7,19,37,41) ;
(3,7,19,37,43) ; (3,7,19,37,47) ; (3,7,19,41,47) ; (3,7,19,43,47) ; (3,7,23,29,37) ; (3,7,23,29,41) ;
(3,7,23,29,43) ; (3,7,23,29,47) ; (3,7,23,31,37) ; (3,7,23,31,41) ; (3,7,23,31,43) ; (3,7,23,31,47) ;
(3,7,23,37,41) ; (3,7,23,37,43) ; (3,7,23,37,47) ; (3,7,23,41,47) ; (3,7,23,43,47) ; (3,7,29,37,41) ;
(3,7,29,37,43) ; (3,7,29,37,47) ; (3,7,29,41,47) ; (3,7,29,43,47) ; (3,7,31,37,41) ; (3,7,31,37,43) ;
(3,7,31,37,47) ; (3,7,31,41,47) ; (3,7,31,43,47) ; (3,7,37,41,47) ; (3,7,37,43,47) ;
(5,11,17,23,29) ; (5,11,17,23,31) ; (5,11,17,23,37) ; (5,11,17,23,41) ; (5,11,17,23,43) ;
(5,11,17,23,47) ; (5,11,17,29,37) ; (5,11,17,29,41) ; (5,11,17,29,43) ; (5,11,17,29,47) ;
(5,11,17,31,37) ; (5,11,17,31,41) ; (5,11,17,31,43) ; (5,11,17,31,47) ; (5,11,17,37,41) ;
(5,11,17,37,43) ; (5,11,17,37,47) ; (5,11,17,41,47) ; (5,11,17,43,47) ; (5,11,19,23,29) ;
(5,11,19,23,31) ; (5,11,19,23,37) ; (5,11,19,23,41) ; (5,11,19,23,43) ; (5,11,19,23,47) ;
(5,11,19,29,37) ; (5,11,19,29,41) ; (5,11,19,29,43) ; (5,11,19,29,47) ; (5,11,19,31,37) ;
(5,11,19,31,41) ; (5,11,19,31,43) ; (5,11,19,31,47) ; (5,11,19,37,41) ; (5,11,19,37,43) ;
(5,11,19,37,47) ; (5,11,19,41,47) ; (5,11,19,43,47) ; (5,11,23,29,37) ; (5,11,23,29,41) ;
(5,11,23,29,43) ; (5,11,23,29,47) ; (5,11,23,31,37) ; (5,11,23,31,41) ; (5,11,23,31,43) ;
(5,11,23,31,47) ; (5,11,23,37,41) ; (5,11,23,37,43) ; (5,11,23,37,47) ; (5,11,23,41,47) ;
(5,11,23,43,47) ; (5,11,29,37,41) ; (5,11,29,37,43) ; (5,11,29,37,47) ; (5,11,29,41,47) ;
(5,11,29,43,47) ; (5,11,31,37,41) ; (5,11,31,37,43) ; (5,11,31,37,47) ; (5,11,31,41,47) ;
(5,11,31,43,47) ; (5,11,37,41,47) ; (5,11,37,43,47) ; (5,13,17,23,29) ; (5,13,17,23,31) ;

(5,13,17,23,37) ; (5,13,17,23,41) ; (5,13,17,23,43) ; (5,13,17,23,47) ; (5,13,17,29,37) ;
(5,13,17,29,41) ; (5,13,17,29,43) ; (5,13,17,29,47) ; (5,13,17,31,37) ; (5,13,17,31,41) ;
(5,13,17,31,43) ; (5,13,17,31,47) ; (5,13,17,37,41) ; (5,13,17,37,43) ; (5,13,17,37,47) ;
(5,13,17,41,47) ; (5,13,17,43,47) ; (5,13,19,23,29) ; (5,13,19,23,31) ; (5,13,19,23,37) ;
(5,13,19,23,41) ; (5,13,19,23,43) ; (5,13,19,23,47) ; (5,13,19,29,37) ; (5,13,19,29,41) ;
(5,13,19,29,43) ; (5,13,19,29,47) ; (5,13,19,31,37) ; (5,13,19,31,41) ; (5,13,19,31,43) ;
(5,13,19,31,47) ; (5,13,19,37,41) ; (5,13,19,37,43) ; (5,13,19,37,47) ; (5,13,19,41,47) ;
(5,13,19,43,47) ; (5,13,23,29,37) ; (5,13,23,29,41) ; (5,13,23,29,43) ; (5,13,23,29,47) ;
(5,13,23,31,37) ; (5,13,23,31,41) ; (5,13,23,31,43) ; (5,13,23,31,47) ; (5,13,23,37,41) ;
(5,13,23,37,43) ; (5,13,23,37,47) ; (5,13,23,41,47) ; (5,13,23,43,47) ; (5,13,29,37,41) ;
(5,13,29,37,43) ; (5,13,29,37,47) ; (5,13,29,41,47) ; (5,13,29,43,47) ; (5,13,31,37,41) ;
(5,13,31,37,43) ; (5,13,31,37,47) ; (5,13,31,41,47) ; (5,13,31,43,47) ; (5,13,37,41,47) ;
(5,13,37,43,47) ; (5,17,23,29,37) ; (5,17,23,29,41) ; (5,17,23,29,43) ; (5,17,23,29,47) ;
(5,17,23,31,37) ; (5,17,23,31,41) ; (5,17,23,31,43) ; (5,17,23,31,47) ; (5,17,23,37,41) ;
(5,17,23,37,43) ; (5,17,23,37,47) ; (5,17,23,41,47) ; (5,17,23,43,47) ; (5,17,29,37,41) ;
(5,17,29,37,43) ; (5,17,29,37,47) ; (5,17,29,41,47) ; (5,17,29,43,47) ; (5,17,31,37,41) ;
(5,17,31,37,43) ; (5,17,31,37,47) ; (5,17,31,41,47) ; (5,17,31,43,47) ; (5,17,37,41,47) ;
(5,17,37,43,47) ; (5,19,23,29,37) ; (5,19,23,29,41) ; (5,19,23,29,43) ; (5,19,23,29,47) ;
(5,19,23,31,37) ; (5,19,23,31,41) ; (5,19,23,31,43) ; (5,19,23,31,47) ; (5,19,23,37,41) ;
(5,19,23,37,43) ; (5,19,23,37,47) ; (5,19,23,41,47) ; (5,19,23,43,47) ; (5,19,29,37,41) ;
(5,19,29,37,43) ; (5,19,29,37,47) ; (5,19,29,41,47) ; (5,19,29,43,47) ; (5,19,31,37,41) ;
(5,19,31,37,43) ; (5,19,31,37,47) ; (5,19,31,41,47) ; (5,19,31,43,47) ; (5,19,37,41,47) ;
(5,19,37,43,47) ; (5,23,29,37,41) ; (5,23,29,37,43) ; (5,23,29,37,47) ; (5,23,29,41,47) ;
(5,23,29,43,47) ; (5,23,31,37,41) ; (5,23,31,37,43) ; (5,23,31,37,47) ; (5,23,31,41,47) ;
(5,23,31,43,47) ; (5,23,37,41,47) ; (5,23,37,43,47) ; (5,29,37,41,47) ; (5,29,37,43,47) ;
(5,31,37,41,47) ; (5,31,37,43,47) ; (7,11,17,23,29) ; (7,11,17,23,31) ; (7,11,17,23,37) ;
(7,11,17,23,41) ; (7,11,17,23,43) ; (7,11,17,23,47) ; (7,11,17,29,37) ; (7,11,17,29,41) ;
(7,11,17,29,43) ; (7,11,17,29,47) ; (7,11,17,31,37) ; (7,11,17,31,41) ; (7,11,17,31,43) ;
(7,11,17,31,47) ; (7,11,17,37,41) ; (7,11,17,37,43) ; (7,11,17,37,47) ; (7,11,17,41,47) ;
(7,11,17,43,47) ; (7,11,19,23,29) ; (7,11,19,23,31) ; (7,11,19,23,37) ; (7,11,19,23,41) ;
(7,11,19,23,43) ; (7,11,19,23,47) ; (7,11,19,29,37) ; (7,11,19,29,41) ; (7,11,19,29,43) ;
(7,11,19,29,47) ; (7,11,19,31,37) ; (7,11,19,31,41) ; (7,11,19,31,43) ; (7,11,19,31,47) ;
(7,11,19,37,41) ; (7,11,19,37,43) ; (7,11,19,37,47) ; (7,11,19,41,47) ; (7,11,19,43,47) ;
(7,11,23,29,37) ; (7,11,23,29,41) ; (7,11,23,29,43) ; (7,11,23,29,47) ; (7,11,23,31,37) ;
(7,11,23,31,41) ; (7,11,23,31,43) ; (7,11,23,31,47) ; (7,11,23,37,41) ; (7,11,23,37,43) ;
(7,11,23,37,47) ; (7,11,23,41,47) ; (7,11,23,43,47) ; (7,11,29,37,41) ; (7,11,29,37,43) ;
(7,11,29,37,47) ; (7,11,29,41,47) ; (7,11,29,43,47) ; (7,11,31,37,41) ; (7,11,31,37,43) ;
(7,11,31,37,47) ; (7,11,31,41,47) ; (7,11,31,43,47) ; (7,11,37,41,47) ; (7,11,37,43,47) ;
(7,13,17,23,29) ; (7,13,17,23,31) ; (7,13,17,23,37) ; (7,13,17,23,41) ; (7,13,17,23,43) ;
(7,13,17,23,47) ; (7,13,17,29,37) ; (7,13,17,29,41) ; (7,13,17,29,43) ; (7,13,17,29,47) ;
(7,13,17,31,37) ; (7,13,17,31,41) ; (7,13,17,31,43) ; (7,13,17,31,47) ; (7,13,17,37,41) ;
(7,13,17,37,43) ; (7,13,17,37,47) ; (7,13,17,41,47) ; (7,13,17,43,47) ; (7,13,19,23,29) ;
(7,13,19,23,31) ; (7,13,19,23,37) ; (7,13,19,23,41) ; (7,13,19,23,43) ; (7,13,19,23,47) ;
(7,13,19,29,37) ; (7,13,19,29,41) ; (7,13,19,29,43) ; (7,13,19,29,47) ; (7,13,19,31,37) ;
(7,13,19,31,41) ; (7,13,19,31,43) ; (7,13,19,31,47) ; (7,13,19,37,41) ; (7,13,19,37,43) ;
(7,13,19,37,47) ; (7,13,19,41,47) ; (7,13,19,43,47) ; (7,13,23,29,37) ; (7,13,23,29,41) ;
(7,13,23,29,43) ; (7,13,23,29,47) ; (7,13,23,31,37) ; (7,13,23,31,41) ; (7,13,23,31,43) ;
(7,13,23,31,47) ; (7,13,23,37,41) ; (7,13,23,37,43) ; (7,13,23,37,47) ; (7,13,23,41,47) ;
(7,13,23,43,47) ; (7,13,29,37,41) ; (7,13,29,37,43) ; (7,13,29,37,47) ; (7,13,29,41,47) ;
(7,13,29,43,47) ; (7,13,31,37,41) ; (7,13,31,37,43) ; (7,13,31,37,47) ; (7,13,31,41,47) ;
(7,13,31,43,47) ; (7,13,37,41,47) ; (7,13,37,43,47) ; (7,17,23,29,37) ; (7,17,23,29,41) ;

(7,17,23,29,43) ; (7,17,23,29,47) ; (7,17,23,31,37) ; (7,17,23,31,41) ; (7,17,23,31,43) ;
(7,17,23,31,47) ; (7,17,23,37,41) ; (7,17,23,37,43) ; (7,17,23,37,47) ; (7,17,23,41,47) ;
(7,17,23,43,47) ; (7,17,29,37,41) ; (7,17,29,37,43) ; (7,17,29,37,47) ; (7,17,29,41,47) ;
(7,17,29,43,47) ; (7,17,31,37,41) ; (7,17,31,37,43) ; (7,17,31,37,47) ; (7,17,31,41,47) ;
(7,17,31,43,47) ; (7,17,37,41,47) ; (7,17,37,43,47) ; (7,19,23,29,37) ; (7,19,23,29,41) ;
(7,19,23,29,43) ; (7,19,23,29,47) ; (7,19,23,31,37) ; (7,19,23,31,41) ; (7,19,23,31,43) ;
(7,19,23,31,47) ; (7,19,23,37,41) ; (7,19,23,37,43) ; (7,19,23,37,47) ; (7,19,23,41,47) ;
(7,19,23,43,47) ; (7,19,29,37,41) ; (7,19,29,37,43) ; (7,19,29,37,47) ; (7,19,29,41,47) ;
(7,19,29,43,47) ; (7,19,31,37,41) ; (7,19,31,37,43) ; (7,19,31,37,47) ; (7,19,31,41,47) ;
(7,19,31,43,47) ; (7,19,37,41,47) ; (7,19,37,43,47) ; (7,23,29,37,41) ; (7,23,29,37,43) ;
(7,23,29,37,47) ; (7,23,29,41,47) ; (7,23,29,43,47) ; (7,23,31,37,41) ; (7,23,31,37,43) ;
(7,23,31,37,47) ; (7,23,31,41,47) ; (7,23,31,43,47) ; (7,23,37,41,47) ; (7,23,37,43,47) ;
(7,29,37,41,47) ; (7,29,37,43,47) ; (7,31,37,41,47) ; (7,31,37,43,47) ; (11,17,23,29,37) ;
(11,17,23,29,41) ; (11,17,23,29,43) ; (11,17,23,29,47) ; (11,17,23,31,37) ; (11,17,23,31,41) ;
(11,17,23,31,43) ; (11,17,23,31,47) ; (11,17,23,37,41) ; (11,17,23,37,43) ; (11,17,23,37,47) ;
(11,17,23,41,47) ; (11,17,23,43,47) ; (11,17,29,37,41) ; (11,17,29,37,43) ; (11,17,29,37,47) ;
(11,17,29,41,47) ; (11,17,29,43,47) ; (11,17,31,37,41) ; (11,17,31,37,43) ; (11,17,31,37,47) ;
(11,17,31,41,47) ; (11,17,31,43,47) ; (11,17,37,41,47) ; (11,17,37,43,47) ; (11,19,23,29,37) ;
(11,19,23,29,41) ; (11,19,23,29,43) ; (11,19,23,29,47) ; (11,19,23,31,37) ; (11,19,23,31,41) ;
(11,19,23,31,43) ; (11,19,23,31,47) ; (11,19,23,37,41) ; (11,19,23,37,43) ; (11,19,23,37,47) ;
(11,19,23,41,47) ; (11,19,23,43,47) ; (11,19,29,37,41) ; (11,19,29,37,43) ; (11,19,29,37,47) ;
(11,19,29,41,47) ; (11,19,29,43,47) ; (11,19,31,37,41) ; (11,19,31,37,43) ; (11,19,31,37,47) ;
(11,19,31,41,47) ; (11,19,31,43,47) ; (11,19,37,41,47) ; (11,19,37,43,47) ; (11,23,29,37,41) ;
(11,23,29,37,43) ; (11,23,29,37,47) ; (11,23,29,41,47) ; (11,23,29,43,47) ; (11,23,31,37,41) ;
(11,23,31,37,43) ; (11,23,31,37,47) ; (11,23,31,41,47) ; (11,23,31,43,47) ; (11,23,37,41,47) ;
(11,23,37,43,47) ; (11,29,37,41,47) ; (11,29,37,43,47) ; (11,31,37,41,47) ; (11,31,37,43,47) ;
(13,17,23,29,37) ; (13,17,23,29,41) ; (13,17,23,29,43) ; (13,17,23,29,47) ; (13,17,23,31,37) ;
(13,17,23,31,41) ; (13,17,23,31,43) ; (13,17,23,31,47) ; (13,17,23,37,41) ; (13,17,23,37,43) ;
(13,17,23,37,47) ; (13,17,23,41,47) ; (13,17,23,43,47) ; (13,17,29,37,41) ; (13,17,29,37,43) ;
(13,17,29,37,47) ; (13,17,29,41,47) ; (13,17,29,43,47) ; (13,17,31,37,41) ; (13,17,31,37,43) ;
(13,17,31,37,47) ; (13,17,31,41,47) ; (13,17,31,43,47) ; (13,17,37,41,47) ; (13,17,37,43,47) ;
(13,19,23,29,37) ; (13,19,23,29,41) ; (13,19,23,29,43) ; (13,19,23,29,47) ; (13,19,23,31,37) ;
(13,19,23,31,41) ; (13,19,23,31,43) ; (13,19,23,31,47) ; (13,19,23,37,41) ; (13,19,23,37,43) ;
(13,19,23,37,47) ; (13,19,23,41,47) ; (13,19,23,43,47) ; (13,19,29,37,41) ; (13,19,29,37,43) ;
(13,19,29,37,47) ; (13,19,29,41,47) ; (13,19,29,43,47) ; (13,19,31,37,41) ; (13,19,31,37,43) ;
(13,19,31,37,47) ; (13,19,31,41,47) ; (13,19,31,43,47) ; (13,19,37,41,47) ; (13,19,37,43,47) ;
(13,23,29,37,41) ; (13,23,29,37,43) ; (13,23,29,37,47) ; (13,23,29,41,47) ; (13,23,29,43,47) ;
(13,23,31,37,41) ; (13,23,31,37,43) ; (13,23,31,37,47) ; (13,23,31,41,47) ; (13,23,31,43,47) ;
(13,23,37,41,47) ; (13,23,37,43,47) ; (13,29,37,41,47) ; (13,29,37,43,47) ; (13,31,37,41,47) ;
(13,31,37,43,47) ; (17,23,29,37,41) ; (17,23,29,37,43) ; (17,23,29,37,47) ; (17,23,29,41,47) ;
(17,23,29,43,47) ; (17,23,31,37,41) ; (17,23,31,37,43) ; (17,23,31,37,47) ; (17,23,31,41,47) ;
(17,23,31,43,47) ; (17,23,37,41,47) ; (17,23,37,43,47) ; (17,29,37,41,47) ; (17,29,37,43,47) ;
(17,31,37,41,47) ; (17,31,37,43,47) ; (19,23,29,37,41) ; (19,23,29,37,43) ; (19,23,29,37,47) ;
(19,23,29,41,47) ; (19,23,29,43,47) ; (19,23,31,37,41) ; (19,23,31,37,43) ; (19,23,31,37,47) ;
(19,23,31,41,47) ; (19,23,31,43,47) ; (19,23,37,41,47) ; (19,23,37,43,47) ; (19,29,37,41,47) ;
(19,29,37,43,47) ; (19,31,37,41,47) ; (19,31,37,43,47).

4. On utilise uniquement les jetons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.
   (a) Quels sont tous les sacs jolis de deux jetons que l'on peut constituer ?
   On peut former les 13 sacs jolis suivants : (2, 8), (7, 8), (3, 4), (4, 5), (4, 8), (1, 7), (6, 7), (2, 6), (2, 3), (1, 5), (3, 7), (1, 2), (5, 6).

(b) Prouver que si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.

D'après la question précédente, un sac joli contenant le jeton 2 contient l'un des jetons suivants : 1, 3, 6 ou 8. Or les nombres $3-1=2$, $6-1=5$, $8-1=7$, $6-3=3$, $8-3=5$ et $8-6=2$ sont tous premiers. Donc si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.

(c) Prouver que si un sac joli ne contient pas le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.

Par disjonction de cas :

- si un tel sac contient le jeton 1, alors il contient l'un des jetons suivants : 7 ou 5. Mais $7-5=2$ est un nombre premier.
- si un tel sac contient le jeton 3, alors il contient l'un des jetons suivants : 4, 7. Mais $7-4=3$ est un nombre premier.
- si un tel sac contient le jeton 4, alors il contient l'un des jetons suivants : 3, 5, 8. Mais $5-3=2$, $8-5=3$ et $8-3=5$ sont des nombres premiers.
- si un tel sac contient le jeton 5, alors il contient l'un des jetons suivants : 4, 1, 6. Mais $6-4=2$, $6-1=5$ et $4-1=3$ sont des nombres premiers.
- si un tel sac contient le jeton 6, alors il contient l'un des jetons suivants : 7 ou 5. Mais $7-5=2$ est un nombre premier.
- si un tel sac contient le jeton 7, alors il contient l'un des jetons suivants : 8, 1, 6, 3. Mais $8-1=7$, $8-6=2$, $8-3=5$, $6-1=5$, $6-3=3$, $3-1=2$ sont des nombres premiers.
- si un tel sac contient le jeton 8, alors il contient l'un des jetons suivants : 4, 7. Mais $7-4=3$ est un nombre premier.

(d) Est-il possible de constituer un sac joli avec trois jetons ?

Non car si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons et s'il ne contient pas le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons. Dans tous les cas, un sac joli avec les jetons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et 8 contient exactement deux jetons.

5. (a) On dispose des seize jetons 1, 2, 3, …, 16. Combien peut-on en choisir au maximum pour que le sac soit joli ?

Avec les jetons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et 8, on ne peut constituer un sac joli qu'avec deux jetons.

Par conservation des différences positives, on démontre qu'avec 8 jetons consécutifs, on ne peut constituer un sac joli qu'avec deux jetons. On en déduit qu'avec les jetons 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 et 16, on ne peut faire un sac joli qu'avec deux jetons.

Par conséquent, il ne peut y avoir plus de 4 jetons dans un sac joli en utilisant les jetons 1, 2, 3, …, 16.

On vérifie que le sac contenant les jetons 1, 5, 9, 13 est joli.

Finalement, on peut choisir au maximum 4 jetons parmi 1, 2, 3, …, 16 pour que le sac soit joli.

(b) On dispose des deux-mille-vingt-deux jetons 1, 2, 3, …, 2022. Combien peut-on en choisir au maximum pour que le sac soit joli ?

$\{1,2,3,\dots,2022\} = \{1,2,3,\dots,8\} \cup \{9,10,11,\dots,16\} \cup \{17,18,19\dots,24\} \cup \{9,10,11,\dots,16\} \cup \dots \cup \{2009,2010,2011\dots,2016\} \cup \{2017,2018,2019,2020,2021,2022\}$

Avec 8 jetons consécutifs, on ne peut constituer un sac joli qu'avec deux jetons : on en déduit qu'en utilisant les jetons 1, 2, 3, …, 2022, le nombre maximum de jetons que peut contenir un sac joli est inférieur ou égal à $252 \times 2 + 2 = 506$.

On démontre que les jetons de la forme $1+4\times k$, où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant 505$, permettent de faire un sac joli de 506 jetons. Pour cela, on remarque que si les jetons sont de la forme $1+4\times k$ et $1+4\times k'$, avec k et k' deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k < k' \leqslant 505$, alors $(1+4\times k') - (1+4\times k) = 4\times(k'-k)$ n'est pas un nombre premier.

Finalement, on peut choisir au maximum 506 jetons parmi 1, 2, 3, ..., 2022 pour que le sac soit joli.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Voie technologique

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR · Inria · ÉCOLE POLYTECHNIQUE · Animath · Google · hp · Texas Instruments · CASIO · NUMWORKS · Crédit Mutuel Enseignant · WOLFRAM

Exercice 1 : Somme apparente

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième.

Des gobelets opaques contiennent des pièces de monnaie de 1€ et de 2€. On secoue les gobelets avant de les retourner sur une table. Pour chaque pièce, la probabilité d'obtenir *face* est égale à la probabilité d'obtenir *pile* et les tirages sont indépendants. Dans tout l'exercice, la *somme apparente* est égale à la somme des valeurs des pièces tombées sur *pile*.

Dans cet exemple, la *somme apparente* est $5 \times 1€ + 4 \times 2€ = 13€$.

Partie A : avec des pièces de 1€

1. On utilise deux gobelets contenant deux pièces de 1€ chacun. On secoue les gobelets et on les retourne sur la table.
   (a) La somme apparente peut-elle être égale à 5€ ?
   Non car la somme apparente est inférieure ou égale à 4€.
   (b) Calculer la probabilité que la somme apparente soit égale à 4€.
   La probabilité que la somme apparente soit égale à 4€ *visibles* est égale à $\frac{1}{16} \simeq 0,063$.
   (c) Quelle est la probabilité que la somme apparente soit supérieure ou égale à 3€ ?
   Cette probabilité est égale à $\frac{5}{16} \simeq 0,313$.
2. On utilise deux gobelets contenant deux pièces de 1€ chacun. On secoue les gobelets et on les retourne sur la table. On soulève un seul des deux gobelets : la somme apparente de ses pièces est égale à 1€. Quelle est la probabilité que la somme apparente des quatre pièces sur la table soit égale à 3€ ?
   Cette probabilité est égale à la probabilité d'avoir une somme apparente de 2€ avec deux pièces : elle est égale à $\frac{1}{4} = 0,25$.

Dans toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser le tableau de probabilités ci-dessous. On rappelle que toutes les probabilités sont arrondies au millième.

	0 « pile »	1 « pile »	2 « pile »	3 « pile »	4 « pile »	5 « pile »	6 « pile »	7 « pile »	8 « pile »	9 « pile »
Avec 9 pièces	0,002	0,018	0,070	0,164	0,246	0,246	0,164	0,070	0,018	0,002
Avec 8 pièces	0,004	0,031	0,109	0,219	0,273	0,219	0,109	0,031	0,004	0
Avec 7 pièces	0,008	0,055	0,164	0,273	0,273	0,164	0,055	0,008	0	0
Avec 6 pièces	0,016	0,094	0,234	0,313	0,234	0,094	0,016	0	0	0
Avec 5 pièces	0,031	0,156	0,313	0,313	0,156	0,031	0	0	0	0
Avec 4 pièces	0,063	0,250	0,375	0,250	0,063	0	0	0	0	0

Exemple de lecture : en lançant 7 pièces de monnaie, la probabilité d'obtenir 5 faces est environ égale à 0,164.

3. Pour cette question, on utilise trois gobelets contenant trois pièces de 1€. On les secoue et on les retourne sur la table.

   (a) Calculer la probabilité que la somme apparente soit inférieure ou égale à 5€.
   D'après le tableau, cette probabilité est environ égale à $0,002 + 0,018 + 0,070 + 0,164 + 0,246 + 0,246 = 0,746$.

   (b) On recommence l'expérience et on soulève un seul des trois gobelets : sous celui-ci, on dénombre deux "pile" et une "face". Quelle est la probabilité que la somme apparente des neuf pièces sur la table soit inférieure ou égale à 5€ ?
   Cette probabilité est égale à la probabilité d'avoir une somme apparente inférieure ou égale à 3€ avec 6 pièces : elle est environ égale à $0,016 + 0,094 + 0,234 + 0,313 = 0,657$.

Partie B : avec des pièces de 1€ et de 2€

1. On utilise deux gobelets : chacun a une pièce de 1€ et une pièce de 2€. On les secoue et on les retourne sur la table.

   (a) Quelle est la probabilité que la somme apparente soit égale à 5€ ?
   La probabilité que la somme apparente soit égale à 5€ est $\frac{2}{16} = \frac{1}{8} = 0,125$.

   (b) Quelle est la probabilité que la somme apparente soit supérieure ou égale à 4€ ?
   La probabilité que la somme apparente soit supérieure ou égale à 4€ est $\frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$.

   (c) On recommence l'expérience puis on soulève l'un des deux gobelets : la somme apparente de ses pièces est égale à 2€. Quelle est la probabilité que la somme apparente des quatre pièces sur la table soit inférieure ou égale à 4€ ?
   Cette probabilité est égale à la probabilité d'avoir une somme apparente inférieure ou égale à 2€ avec une pièce de 1€ et une pièce de 2€ : elle est égale à $\frac{3}{4} = 0,75$.

2. On utilise quatre gobelets contenant chacun une pièce de 1€ et une pièce de 2€. On les secoue et on les retourne sur la table.

   (a) Quelle est la probabilité que la somme apparente soit égale à 8€ ?

   On peut obtenir 8€ avec :

   - 4 pièces de 2€ et 0 pièces de 1€ : la probabilité associée est environ égale à $0,063 \times 0,063 \simeq 0,004$.
   - 3 pièces de 2€ et 2 pièces de 1€ : la probabilité associée est environ égale à $0,25 \times 0,375 \simeq 0,094$.
   - 2 pièces de 2€ et 4 pièces de 1€ : la probabilité associée est environ égale à $0,375 \times 0,063 \simeq 0,024$.

   La probabilité que la somme apparente soit égale à 8€ est donc environ égale à $0,004 + 0,094 + 0,024 = 0,122$.

   (b) On recommence l'expérience puis on soulève l'un des quatre gobelets : la somme apparente de ses pièces est égale à 3€. Quelle est la probabilité que la somme apparente des huit pièces sur la table soit égale à 8€ ?

   Cette probabilité est égale à la probabilité d'avoir une somme apparente de 5€ avec les pièces des autres gobelets : trois de 1€ et trois de 2€.

   On peut obtenir 5€ avec :

   - 2 pièces de 2€ et 1 pièces de 1€ : la probabilité associée est environ égale à $0,375 \times 0,375 \simeq 0,141$.
   - 1 pièces de 2€ et 3 pièces de 1€ : la probabilité associée est environ égale à $0,375 \times 0,125 \simeq 0,047$.

   La probabilité que la somme apparente soit égale à 8€ est donc environ égale à $0,141 + 0,047 = 0,188$.

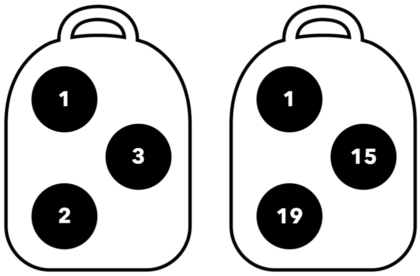
Exercice 2 : Des jetons et des sacs

On rappelle qu'un nombre premier est un nombre entier naturel ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 50 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. On rappelle que 1 n'est pas un nombre premier.

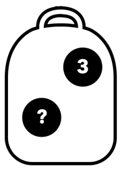
Un sac contient plusieurs jetons, tous distincts. Sur chaque jeton est inscrit un nombre entier.
On convient de nommer « jeton n » le jeton sur lequel est écrit le nombre entier n.

On dit que le sac est **joli** si, pour tous les couples de jetons du sac, la différence positive des nombres inscrits sur les jetons n'est pas un nombre premier. On en déduit que le sac **n'est pas joli** s'il existe au moins un couple de jetons du sac dont la différence positive est un nombre premier.

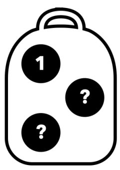


Par exemple, le sac contenant les jetons 1, 2 et 3 « n'est pas joli » car $3 - 1 = 2$ et 2 est un nombre premier. En revanche, le sac contenant les jetons 1, 15 et 19 « est joli » car les différences positives sont $15 - 1 = 14$, $19 - 1 = 18$, $19 - 15 = 4$ et ni 14, ni 18, ni 4 ne sont des nombres premiers.

1. Dans cette question, on considère un sac contenant deux jetons : le jeton 3 et le jeton n.
   (a) Le sac est-il joli si $n = 2$?
   $3 - 2 = 1$ et 1 n'est pas un nombre premier donc le sac est joli.
   (b) Le sac est-il joli si $n = 5$?
   $5 - 3 = 2$ et 2 est un nombre premier donc le sac n'est pas joli.
   (c) Pour quelles valeurs de n, comprises entre 1 et 20 inclus, le sac est-il joli ?
   On peut utiliser les jetons 2, 4, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19.



2. Dans cette question, on considère un sac contenant trois jetons, dont le jeton 1. En choisissant deux autres jetons parmi les jetons 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, donner un exemple de sac « joli ».
   On peut former les sacs jolis :
   - 1, 2, 10
   - 1, 5, 9
   - 1, 9, 10
   - 2, 6, 10



3. En justifiant les réponses, dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

   (a) Il est possible de faire un sac joli avec trois nombres premiers.

   Vrai. Les sacs jolis possibles avec trois nombres premiers inférieurs à 50 sont (2,3,11) ; (2,3,17) ; (2,3,23) ; (2,3,29) ; (2,3,37) ; (2,3,41) ; (2,3,47) ; (2,11,17) ; (2,11,23) ; (2,11,29) ; (2,11,37) ; (2,11,41) ; (2,11,47) ; (2,17,23) ; (2,17,29) ; (2,17,37) ; (2,17,41) ; (2,17,47) ; (2,23,29) ; (2,23,37) ; (2,23,41) ; (2,23,47) ; (2,29,37) ; (2,29,41) ; (2,29,47) ; (2,37,41) ; (2,37,47) ; (2,41,47) ; (3,7,11) ; (3,7,13) ; (3,7,17) ; (3,7,19) ; (3,7,23) ; (3,7,29) ; (3,7,31) ; (3,7,37) ; (3,7,41) ; (3,7,43) ; (3,7,47) ; (3,11,17) ; (3,11,19) ; (3,11,23) ; (3,11,29) ; (3,11,31) ; (3,11,37) ; (3,11,41) ; (3,11,43) ; (3,11,47) ; (3,13,17) ; (3,13,19) ; (3,13,23) ; (3,13,29) ; (3,13,31) ; (3,13,37) ; (3,13,41) ; (3,13,43) ; (3,13,47) ; (3,17,23) ; (3,17,29) ; (3,17,31) ; (3,17,37) ; (3,17,41) ; (3,17,43) ; (3,17,47) ; (3,19,23) ; (3,19,29) ; (3,19,31) ; (3,19,37) ; (3,19,41) ; (3,19,43) ; (3,19,47) ; (3,23,29) ; (3,23,31) ; (3,23,37) ; (3,23,41) ; (3,23,43) ; (3,23,47) ; (3,29,37) ; (3,29,41) ; (3,29,43) ; (3,29,47) ; (3,31,37) ; (3,31,41) ; (3,31,43) ; (3,31,47) ; (3,37,41) ; (3,37,43) ; (3,37,47) ; (3,41,47) ; (3,43,47) ; (5,11,17) ; (5,11,19) ; (5,11,23) ; (5,11,29) ; (5,11,31) ; (5,11,37) ; (5,11,41) ; (5,11,43) ; (5,11,47) ; (5,13,17) ; (5,13,19) ; (5,13,23) ; (5,13,29) ; (5,13,31) ; (5,13,37) ; (5,13,41) ; (5,13,43) ; (5,13,47) ; (5,17,23) ; (5,17,29) ; (5,17,31) ; (5,17,37) ; (5,17,41) ; (5,17,43) ; (5,17,47) ; (5,19,23) ; (5,19,29) ; (5,19,31) ; (5,19,37) ; (5,19,41) ; (5,19,43) ; (5,19,47) ; (5,23,29) ; (5,23,31) ; (5,23,37) ; (5,23,41) ; (5,23,43) ; (5,23,47) ; (5,29,37) ; (5,29,41) ; (5,29,43) ; (5,29,47) ; (5,31,37) ; (5,31,41) ; (5,31,43) ; (5,31,47) ; (5,37,41) ; (5,37,43) ; (5,37,47) ; (5,41,47) ; (5,43,47) ; (7,11,17) ; (7,11,19) ; (7,11,23) ; (7,11,29) ; (7,11,31) ; (7,11,37) ; (7,11,41) ; (7,11,43) ; (7,11,47) ; (7,13,17) ; (7,13,19) ; (7,13,23) ; (7,13,29) ; (7,13,31) ; (7,13,37) ; (7,13,41) ; (7,13,43) ; (7,13,47) ; (7,17,23) ; (7,17,29) ; (7,17,31) ; (7,17,37) ; (7,17,41) ; (7,17,43) ; (7,17,47) ; (7,19,23) ; (7,19,29) ; (7,19,31) ; (7,19,37) ; (7,19,41) ; (7,19,43) ; (7,19,47) ; (7,23,29) ; (7,23,31) ; (7,23,37) ; (7,23,41) ; (7,23,43) ; (7,23,47) ; (7,29,37) ; (7,29,41) ; (7,29,43) ; (7,29,47) ; (7,31,37) ; (7,31,41) ; (7,31,43) ; (7,31,47) ; (7,37,41) ; (7,37,43) ; (7,37,47) ; (7,41,47) ; (7,43,47) ; (11,17,23) ; (11,17,29) ; (11,17,31) ; (11,17,37) ; (11,17,41) ; (11,17,43) ; (11,17,47) ; (11,19,23) ; (11,19,29) ; (11,19,31) ; (11,19,37) ; (11,19,41) ; (11,19,43) ; (11,19,47) ; (11,23,29) ; (11,23,31) ; (11,23,37) ; (11,23,41) ; (11,23,43) ; (11,23,47) ; (11,29,37) ; (11,29,41) ; (11,29,43) ; (11,29,47) ; (11,31,37) ; (11,31,41) ; (11,31,43) ; (11,31,47) ; (11,37,41) ; (11,37,43) ; (11,37,47) ; (11,41,47) ; (11,43,47) ; (13,17,23) ; (13,17,29) ; (13,17,31) ; (13,17,37) ; (13,17,41) ; (13,17,43) ; (13,17,47) ; (13,19,23) ; (13,19,29) ; (13,19,31) ; (13,19,37) ; (13,19,41) ; (13,19,43) ; (13,19,47) ; (13,23,29) ; (13,23,31) ; (13,23,37) ; (13,23,41) ; (13,23,43) ; (13,23,47) ; (13,29,37) ; (13,29,41) ; (13,29,43) ; (13,29,47) ; (13,31,37) ; (13,31,41) ; (13,31,43) ; (13,31,47) ; (13,37,41) ; (13,37,43) ; (13,37,47) ; (13,41,47) ; (13,43,47) ; (17,23,29) ; (17,23,31) ; (17,23,37) ; (17,23,41) ; (17,23,43) ; (17,23,47) ; (17,29,37) ; (17,29,41) ; (17,29,43) ; (17,29,47) ; (17,31,37) ; (17,31,41) ; (17,31,43) ; (17,31,47) ; (17,37,41) ; (17,37,43) ; (17,37,47) ; (17,41,47) ; (17,43,47) ; (19,23,29) ; (19,23,31) ; (19,23,37) ; (19,23,41) ; (19,23,43) ; (19,23,47) ; (19,29,37) ; (19,29,41) ; (19,29,43) ; (19,29,47) ; (19,31,37) ; (19,31,41) ; (19,31,43) ; (19,31,47) ; (19,37,41) ; (19,37,43) ; (19,37,47) ; (19,41,47) ; (19,43,47) ; (23,29,37) ; (23,29,41) ; (23,29,43) ; (23,29,47) ; (23,31,37) ; (23,31,41) ; (23,31,43) ; (23,31,47) ; (23,37,41) ; (23,37,43) ; (23,37,47) ; (23,41,47) ; (23,43,47) ; (29,37,41) ; (29,37,43) ; (29,37,47) ; (29,41,47) ; (29,43,47) ; (31,37,41) ; (31,37,43) ; (31,37,47) ; (31,41,47) ; (31,43,47) ; (37,41,47) ; (37,43,47).

   (b) Si un sac de trois jetons est joli, alors il n'est plus joli si on lui retire un de ses jetons.

   Faux. Les différences positives des jetons qui restent dans le sac ne sont pas des nombres premiers.

   (c) La somme des jetons d'un sac joli à trois jetons peut être un nombre premier.

   Vrai. Les sacs jolis possibles avec trois jetons dont la somme est un nombre premier inférieur à 50 sont (1,2,10) ; (1,2,16) ; (1,2,26) ; (1,2,28) ; (1,2,34) ; (1,2,40) ; (1,5,11) ; (1,5,13) ; (1,5,17) ; (1,5,23) ; (1,5,25) ; (1,5,31) ; (1,5,35) ; (1,5,37) ; (1,5,41) ; (1,7,11) ; (1,7,15) ; (1,7,21) ; (1,7,23) ; (1,7,29) ; (1,7,33) ; (1,7,35) ; (1,7,39) ; (1,9,13) ; (1,9,19) ; (1,9,21) ; (1,9,27) ; (1,9,31) ; (1,9,33) ; (1,9,37) ; (1,10,26) ; (1,10,36) ; (1,11,17) ; (1,11,19) ; (1,11,25) ; (1,11,29) ; (1,11,31) ; (1,11,35) ;

(1,13,17) ; (1,13,23) ; (1,13,27) ; (1,13,29) ; (1,13,33) ; (1,15,21) ; (1,15,25) ; (1,15,27) ; (1,15,31) ; (1,16,26) ; (1,17,23) ; (1,17,25) ; (1,17,29) ; (1,19,23) ; (1,19,27) ; (1,21,25) ; (2,3,12) ; (2,3,18) ; (2,3,24) ; (2,3,36) ; (2,3,38) ; (2,3,42) ; (2,10,11) ; (2,10,35) ; (2,12,27) ; (2,17,18) ; (2,18,27) ; (2,22,23) ; (3,4,12) ; (3,4,24) ; (3,4,30) ; (3,4,36) ; (3,7,13) ; (3,7,19) ; (3,7,21) ; (3,7,27) ; (3,7,31) ; (3,7,33) ; (3,7,37) ; (3,9,17) ; (3,9,19) ; (3,9,25) ; (3,9,29) ; (3,9,31) ; (3,9,35) ; (3,11,15) ; (3,11,17) ; (3,11,23) ; (3,11,27) ; (3,11,29) ; (3,11,33) ; (3,12,28) ; (3,13,21) ; (3,13,25) ; (3,13,27) ; (3,13,31) ; (3,15,19) ; (3,15,23) ; (3,15,25) ; (3,15,29) ; (3,17,21) ; (3,17,23) ; (3,17,27) ; (3,19,25) ; (4,5,14) ; (4,5,20) ; (4,5,32) ; (4,5,38) ; (4,8,29) ; (4,12,13) ; (4,13,14) ; (4,14,29) ; (4,18,19) ; (4,19,20) ; (5,6,20) ; (5,6,26) ; (5,6,30) ; (5,6,32) ; (5,9,15) ; (5,9,17) ; (5,9,23) ; (5,9,27) ; (5,9,29) ; (5,9,33) ; (5,11,15) ; (5,11,21) ; (5,11,25) ; (5,11,27) ; (5,11,31) ; (5,13,19) ; (5,13,23) ; (5,13,25) ; (5,13,29) ; (5,15,21) ; (5,15,23) ; (5,15,27) ; (5,17,21) ; (5,17,25) ; (5,19,23) ; (6,7,16) ; (6,7,28) ; (6,7,34) ; (6,10,31) ; (6,15,16) ; (6,20,21) ; (7,8,16) ; (7,8,22) ; (7,8,28) ; (7,8,32) ; (7,11,19) ; (7,11,23) ; (7,11,25) ; (7,11,29) ; (7,13,17) ; (7,13,21) ; (7,13,23) ; (7,13,27) ; (7,15,19) ; (7,15,21) ; (7,15,25) ; (7,17,23) ; (8,9,24) ; (8,9,30) ; (8,16,17) ; (8,17,18) ; (9,10,18) ; (9,10,24) ; (9,13,19) ; (9,13,21) ; (9,13,25) ; (9,15,19) ; (9,15,23) ; (9,17,21) ; (10,11,20) ; (10,11,26) ; (10,18,19) ; (11,12,20) ; (11,15,21) ; (12,13,22).

(d) Il existe un sac joli contenant exactement 5 nombres premiers.

Vrai. Les sacs jolis contenant exactement 5 nombres premiers inférieurs à 50 sont :

(2,11,17,23,29) ; (2,11,17,23,37) ; (2,11,17,23,41) ; (2,11,17,23,47) ; (2,11,17,29,37) ; (2,11,17,29,41) ; (2,11,17,29,47) ; (2,11,17,37,41) ; (2,11,17,37,47) ; (2,11,17,41,47) ; (2,11,23,29,37) ; (2,11,23,29,41) ; (2,11,23,29,47) ; (2,11,23,37,41) ; (2,11,23,37,47) ; (2,11,23,41,47) ; (2,11,29,37,41) ; (2,11,29,37,47) ; (2,11,29,41,47) ; (2,11,37,41,47) ; (2,17,23,29,37) ; (2,17,23,29,41) ; (2,17,23,29,47) ; (2,17,23,37,41) ; (2,17,23,37,47) ; (2,17,23,41,47) ; (2,17,29,37,41) ; (2,17,29,37,47) ; (2,17,29,41,47) ; (2,17,37,41,47) ; (2,23,29,37,41) ; (2,23,29,37,47) ; (2,23,29,41,47) ; (2,23,37,41,47) ; (2,29,37,41,47) ; (2,3,11,17,23) ; (2,3,11,17,29) ; (2,3,11,17,37) ; (2,3,11,17,41) ; (2,3,11,17,47) ; (2,3,11,23,29) ; (2,3,11,23,37) ; (2,3,11,23,41) ; (2,3,11,23,47) ; (2,3,11,29,37) ; (2,3,11,29,41) ; (2,3,11,29,47) ; (2,3,11,37,41) ; (2,3,11,37,47) ; (2,3,11,41,47) ; (2,3,17,23,29) ; (2,3,17,23,37) ; (2,3,17,23,41) ; (2,3,17,23,47) ; (2,3,17,29,37) ; (2,3,17,29,41) ; (2,3,17,29,47) ; (2,3,17,37,41) ; (2,3,17,37,47) ; (2,3,17,41,47) ; (2,3,23,29,37) ; (2,3,23,29,41) ; (2,3,23,29,47) ; (2,3,23,37,41) ; (2,3,23,37,47) ; (2,3,23,41,47) ; (2,3,29,37,41) ; (2,3,29,37,47) ; (2,3,29,41,47) ; (2,3,37,41,47) ; (23,29,37,41,47) ; (23,29,37,43,47) ; (23,31,37,41,47) ; (23,31,37,43,47) ; (3,11,17,23,29) ; (3,11,17,23,31) ; (3,11,17,23,37) ; (3,11,17,23,41) ; (3,11,17,23,43) ; (3,11,17,23,47) ; (3,11,17,29,37) ; (3,11,17,29,41) ; (3,11,17,29,43) ; (3,11,17,29,47) ; (3,11,17,31,37) ; (3,11,17,31,41) ; (3,11,17,31,43) ; (3,11,17,31,47) ; (3,11,17,37,41) ; (3,11,17,37,43) ; (3,11,17,37,47) ; (3,11,17,41,47) ; (3,11,17,43,47) ; (3,11,19,23,29) ; (3,11,19,23,31) ; (3,11,19,23,37) ; (3,11,19,23,41) ; (3,11,19,23,43) ; (3,11,19,23,47) ; (3,11,19,29,37) ; (3,11,19,29,41) ; (3,11,19,29,43) ; (3,11,19,29,47) ; (3,11,19,31,37) ; (3,11,19,31,41) ; (3,11,19,31,43) ; (3,11,19,31,47) ; (3,11,19,37,41) ; (3,11,19,37,43) ; (3,11,19,37,47) ; (3,11,19,41,47) ; (3,11,19,43,47) ; (3,11,23,29,37) ; (3,11,23,29,41) ; (3,11,23,29,43) ; (3,11,23,29,47) ; (3,11,23,31,37) ; (3,11,23,31,41) ; (3,11,23,31,43) ; (3,11,23,31,47) ; (3,11,23,37,41) ; (3,11,23,37,43) ; (3,11,23,37,47) ; (3,11,23,41,47) ; (3,11,23,43,47) ; (3,11,29,37,41) ; (3,11,29,37,43) ; (3,11,29,37,47) ; (3,11,29,41,47) ; (3,11,29,43,47) ; (3,11,31,37,41) ; (3,11,31,37,43) ; (3,11,31,37,47) ; (3,11,31,41,47) ; (3,11,31,43,47) ; (3,11,37,41,47) ; (3,11,37,43,47) ; (3,13,17,23,29) ; (3,13,17,23,31) ; (3,13,17,23,37) ; (3,13,17,23,41) ; (3,13,17,23,43) ; (3,13,17,23,47) ; (3,13,17,29,37) ; (3,13,17,29,41) ; (3,13,17,29,43) ; (3,13,17,29,47) ; (3,13,17,31,37) ; (3,13,17,31,41) ; (3,13,17,31,43) ; (3,13,17,31,47) ; (3,13,17,37,41) ; (3,13,17,37,43) ; (3,13,17,37,47) ; (3,13,17,41,47) ; (3,13,17,43,47) ; (3,13,19,23,29) ; (3,13,19,23,31) ; (3,13,19,23,37) ; (3,13,19,23,41) ; (3,13,19,23,43) ; (3,13,19,23,47) ; (3,13,19,29,37) ; (3,13,19,29,41) ; (3,13,19,29,43) ; (3,13,19,29,47) ; (3,13,19,31,37) ; (3,13,19,31,41) ; (3,13,19,31,43) ; (3,13,19,31,47) ;

(3,13,19,37,41) ; (3,13,19,37,43) ; (3,13,19,37,47) ; (3,13,19,41,47) ; (3,13,19,43,47) ;
(3,13,23,29,37) ; (3,13,23,29,41) ; (3,13,23,29,43) ; (3,13,23,29,47) ; (3,13,23,31,37) ;
(3,13,23,31,41) ; (3,13,23,31,43) ; (3,13,23,31,47) ; (3,13,23,37,41) ; (3,13,23,37,43) ;
(3,13,23,37,47) ; (3,13,23,41,47) ; (3,13,23,43,47) ; (3,13,29,37,41) ; (3,13,29,37,43) ;
(3,13,29,37,47) ; (3,13,29,41,47) ; (3,13,29,43,47) ; (3,13,31,37,41) ; (3,13,31,37,43) ;
(3,13,31,37,47) ; (3,13,31,41,47) ; (3,13,31,43,47) ; (3,13,37,41,47) ; (3,13,37,43,47) ;
(3,17,23,29,37) ; (3,17,23,29,41) ; (3,17,23,29,43) ; (3,17,23,29,47) ; (3,17,23,31,37) ;
(3,17,23,31,41) ; (3,17,23,31,43) ; (3,17,23,31,47) ; (3,17,23,37,41) ; (3,17,23,37,43) ;
(3,17,23,37,47) ; (3,17,23,41,47) ; (3,17,23,43,47) ; (3,17,29,37,41) ; (3,17,29,37,43) ;
(3,17,29,37,47) ; (3,17,29,41,47) ; (3,17,29,43,47) ; (3,17,31,37,41) ; (3,17,31,37,43) ;
(3,17,31,37,47) ; (3,17,31,41,47) ; (3,17,31,43,47) ; (3,17,37,41,47) ; (3,17,37,43,47) ;
(3,19,23,29,37) ; (3,19,23,29,41) ; (3,19,23,29,43) ; (3,19,23,29,47) ; (3,19,23,31,37) ;
(3,19,23,31,41) ; (3,19,23,31,43) ; (3,19,23,31,47) ; (3,19,23,37,41) ; (3,19,23,37,43) ;
(3,19,23,37,47) ; (3,19,23,41,47) ; (3,19,23,43,47) ; (3,19,29,37,41) ; (3,19,29,37,43) ;
(3,19,29,37,47) ; (3,19,29,41,47) ; (3,19,29,43,47) ; (3,19,31,37,41) ; (3,19,31,37,43) ;
(3,19,31,37,47) ; (3,19,31,41,47) ; (3,19,31,43,47) ; (3,19,37,41,47) ; (3,19,37,43,47) ;
(3,23,29,37,41) ; (3,23,29,37,43) ; (3,23,29,37,47) ; (3,23,29,41,47) ; (3,23,29,43,47) ;
(3,23,31,37,41) ; (3,23,31,37,43) ; (3,23,31,37,47) ; (3,23,31,41,47) ; (3,23,31,43,47) ;
(3,23,37,41,47) ; (3,23,37,43,47) ; (3,29,37,41,47) ; (3,29,37,43,47) ; (3,31,37,41,47) ;
(3,31,37,43,47) ; (3,7,11,17,23) ; (3,7,11,17,29) ; (3,7,11,17,31) ; (3,7,11,17,37) ;
(3,7,11,17,41) ; (3,7,11,17,43) ; (3,7,11,17,47) ; (3,7,11,19,23) ; (3,7,11,19,29) ; (3,7,11,19,31) ;
(3,7,11,19,37) ; (3,7,11,19,41) ; (3,7,11,19,43) ; (3,7,11,19,47) ; (3,7,11,23,29) ; (3,7,11,23,31) ;
(3,7,11,23,37) ; (3,7,11,23,41) ; (3,7,11,23,43) ; (3,7,11,23,47) ; (3,7,11,29,37) ; (3,7,11,29,41) ;
(3,7,11,29,43) ; (3,7,11,29,47) ; (3,7,11,31,37) ; (3,7,11,31,41) ; (3,7,11,31,43) ; (3,7,11,31,47) ;
(3,7,11,37,41) ; (3,7,11,37,43) ; (3,7,11,37,47) ; (3,7,11,41,47) ; (3,7,11,43,47) ; (3,7,13,17,23) ;
(3,7,13,17,29) ; (3,7,13,17,31) ; (3,7,13,17,37) ; (3,7,13,17,41) ; (3,7,13,17,43) ; (3,7,13,17,47) ;
(3,7,13,19,23) ; (3,7,13,19,29) ; (3,7,13,19,31) ; (3,7,13,19,37) ; (3,7,13,19,41) ; (3,7,13,19,43) ;
(3,7,13,19,47) ; (3,7,13,23,29) ; (3,7,13,23,31) ; (3,7,13,23,37) ; (3,7,13,23,41) ; (3,7,13,23,43) ;
(3,7,13,23,47) ; (3,7,13,29,37) ; (3,7,13,29,41) ; (3,7,13,29,43) ; (3,7,13,29,47) ; (3,7,13,31,37) ;
(3,7,13,31,41) ; (3,7,13,31,43) ; (3,7,13,31,47) ; (3,7,13,37,41) ; (3,7,13,37,43) ; (3,7,13,37,47) ;
(3,7,13,41,47) ; (3,7,13,43,47) ; (3,7,17,23,29) ; (3,7,17,23,31) ; (3,7,17,23,37) ; (3,7,17,23,41) ;
(3,7,17,23,43) ; (3,7,17,23,47) ; (3,7,17,29,37) ; (3,7,17,29,41) ; (3,7,17,29,43) ; (3,7,17,29,47) ;
(3,7,17,31,37) ; (3,7,17,31,41) ; (3,7,17,31,43) ; (3,7,17,31,47) ; (3,7,17,37,41) ; (3,7,17,37,43) ;
(3,7,17,37,47) ; (3,7,17,41,47) ; (3,7,17,43,47) ; (3,7,19,23,29) ; (3,7,19,23,31) ; (3,7,19,23,37) ;
(3,7,19,23,41) ; (3,7,19,23,43) ; (3,7,19,23,47) ; (3,7,19,29,37) ; (3,7,19,29,41) ; (3,7,19,29,43) ;
(3,7,19,29,47) ; (3,7,19,31,37) ; (3,7,19,31,41) ; (3,7,19,31,43) ; (3,7,19,31,47) ; (3,7,19,37,41) ;
(3,7,19,37,43) ; (3,7,19,37,47) ; (3,7,19,41,47) ; (3,7,19,43,47) ; (3,7,23,29,37) ; (3,7,23,29,41) ;
(3,7,23,29,43) ; (3,7,23,29,47) ; (3,7,23,31,37) ; (3,7,23,31,41) ; (3,7,23,31,43) ; (3,7,23,31,47) ;
(3,7,23,37,41) ; (3,7,23,37,43) ; (3,7,23,37,47) ; (3,7,23,41,47) ; (3,7,23,43,47) ; (3,7,29,37,41) ;
(3,7,29,37,43) ; (3,7,29,37,47) ; (3,7,29,41,47) ; (3,7,29,43,47) ; (3,7,31,37,41) ; (3,7,31,37,43) ;
(3,7,31,37,47) ; (3,7,31,41,47) ; (3,7,31,43,47) ; (3,7,37,41,47) ; (3,7,37,43,47) ;
(5,11,17,23,29) ; (5,11,17,23,31) ; (5,11,17,23,37) ; (5,11,17,23,41) ; (5,11,17,23,43) ;
(5,11,17,23,47) ; (5,11,17,29,37) ; (5,11,17,29,41) ; (5,11,17,29,43) ; (5,11,17,29,47) ;
(5,11,17,31,37) ; (5,11,17,31,41) ; (5,11,17,31,43) ; (5,11,17,31,47) ; (5,11,17,37,41) ;
(5,11,17,37,43) ; (5,11,17,37,47) ; (5,11,17,41,47) ; (5,11,17,43,47) ; (5,11,19,23,29) ;
(5,11,19,23,31) ; (5,11,19,23,37) ; (5,11,19,23,41) ; (5,11,19,23,43) ; (5,11,19,23,47) ;
(5,11,19,29,37) ; (5,11,19,29,41) ; (5,11,19,29,43) ; (5,11,19,29,47) ; (5,11,19,31,37) ;
(5,11,19,31,41) ; (5,11,19,31,43) ; (5,11,19,31,47) ; (5,11,19,37,41) ; (5,11,19,37,43) ;
(5,11,19,37,47) ; (5,11,19,41,47) ; (5,11,19,43,47) ; (5,11,23,29,37) ; (5,11,23,29,41) ;
(5,11,23,29,43) ; (5,11,23,29,47) ; (5,11,23,31,37) ; (5,11,23,31,41) ; (5,11,23,31,43) ;
(5,11,23,31,47) ; (5,11,23,37,41) ; (5,11,23,37,43) ; (5,11,23,37,47) ; (5,11,23,41,47) ;

(5,11,23,43,47) ; (5,11,29,37,41) ; (5,11,29,37,43) ; (5,11,29,37,47) ; (5,11,29,41,47) ;
(5,11,29,43,47) ; (5,11,31,37,41) ; (5,11,31,37,43) ; (5,11,31,37,47) ; (5,11,31,41,47) ;
(5,11,31,43,47) ; (5,11,37,41,47) ; (5,11,37,43,47) ; (5,13,17,23,29) ; (5,13,17,23,31) ;
(5,13,17,23,37) ; (5,13,17,23,41) ; (5,13,17,23,43) ; (5,13,17,23,47) ; (5,13,17,29,37) ;
(5,13,17,29,41) ; (5,13,17,29,43) ; (5,13,17,29,47) ; (5,13,17,31,37) ; (5,13,17,31,41) ;
(5,13,17,31,43) ; (5,13,17,31,47) ; (5,13,17,37,41) ; (5,13,17,37,43) ; (5,13,17,37,47) ;
(5,13,17,41,47) ; (5,13,17,43,47) ; (5,13,19,23,29) ; (5,13,19,23,31) ; (5,13,19,23,37) ;
(5,13,19,23,41) ; (5,13,19,23,43) ; (5,13,19,23,47) ; (5,13,19,29,37) ; (5,13,19,29,41) ;
(5,13,19,29,43) ; (5,13,19,29,47) ; (5,13,19,31,37) ; (5,13,19,31,41) ; (5,13,19,31,43) ;
(5,13,19,31,47) ; (5,13,19,37,41) ; (5,13,19,37,43) ; (5,13,19,37,47) ; (5,13,19,41,47) ;
(5,13,19,43,47) ; (5,13,23,29,37) ; (5,13,23,29,41) ; (5,13,23,29,43) ; (5,13,23,29,47) ;
(5,13,23,31,37) ; (5,13,23,31,41) ; (5,13,23,31,43) ; (5,13,23,31,47) ; (5,13,23,37,41) ;
(5,13,23,37,43) ; (5,13,23,37,47) ; (5,13,23,41,47) ; (5,13,23,43,47) ; (5,13,29,37,41) ;
(5,13,29,37,43) ; (5,13,29,37,47) ; (5,13,29,41,47) ; (5,13,29,43,47) ; (5,13,31,37,41) ;
(5,13,31,37,43) ; (5,13,31,37,47) ; (5,13,31,41,47) ; (5,13,31,43,47) ; (5,13,37,41,47) ;
(5,13,37,43,47) ; (5,17,23,29,37) ; (5,17,23,29,41) ; (5,17,23,29,43) ; (5,17,23,29,47) ;
(5,17,23,31,37) ; (5,17,23,31,41) ; (5,17,23,31,43) ; (5,17,23,31,47) ; (5,17,23,37,41) ;
(5,17,23,37,43) ; (5,17,23,37,47) ; (5,17,23,41,47) ; (5,17,23,43,47) ; (5,17,29,37,41) ;
(5,17,29,37,43) ; (5,17,29,37,47) ; (5,17,29,41,47) ; (5,17,29,43,47) ; (5,17,31,37,41) ;
(5,17,31,37,43) ; (5,17,31,37,47) ; (5,17,31,41,47) ; (5,17,31,43,47) ; (5,17,37,41,47) ;
(5,17,37,43,47) ; (5,19,23,29,37) ; (5,19,23,29,41) ; (5,19,23,29,43) ; (5,19,23,29,47) ;
(5,19,23,31,37) ; (5,19,23,31,41) ; (5,19,23,31,43) ; (5,19,23,31,47) ; (5,19,23,37,41) ;
(5,19,23,37,43) ; (5,19,23,37,47) ; (5,19,23,41,47) ; (5,19,23,43,47) ; (5,19,29,37,41) ;
(5,19,29,37,43) ; (5,19,29,37,47) ; (5,19,29,41,47) ; (5,19,29,43,47) ; (5,19,31,37,41) ;
(5,19,31,37,43) ; (5,19,31,37,47) ; (5,19,31,41,47) ; (5,19,31,43,47) ; (5,19,37,41,47) ;
(5,19,37,43,47) ; (5,23,29,37,41) ; (5,23,29,37,43) ; (5,23,29,37,47) ; (5,23,29,41,47) ;
(5,23,29,43,47) ; (5,23,31,37,41) ; (5,23,31,37,43) ; (5,23,31,37,47) ; (5,23,31,41,47) ;
(5,23,31,43,47) ; (5,23,37,41,47) ; (5,23,37,43,47) ; (5,29,37,41,47) ; (5,29,37,43,47) ;
(5,31,37,41,47) ; (5,31,37,43,47) ; (7,11,17,23,29) ; (7,11,17,23,31) ; (7,11,17,23,37) ;
(7,11,17,23,41) ; (7,11,17,23,43) ; (7,11,17,23,47) ; (7,11,17,29,37) ; (7,11,17,29,41) ;
(7,11,17,29,43) ; (7,11,17,29,47) ; (7,11,17,31,37) ; (7,11,17,31,41) ; (7,11,17,31,43) ;
(7,11,17,31,47) ; (7,11,17,37,41) ; (7,11,17,37,43) ; (7,11,17,37,47) ; (7,11,17,41,47) ;
(7,11,17,43,47) ; (7,11,19,23,29) ; (7,11,19,23,31) ; (7,11,19,23,37) ; (7,11,19,23,41) ;
(7,11,19,23,43) ; (7,11,19,23,47) ; (7,11,19,29,37) ; (7,11,19,29,41) ; (7,11,19,29,43) ;
(7,11,19,29,47) ; (7,11,19,31,37) ; (7,11,19,31,41) ; (7,11,19,31,43) ; (7,11,19,31,47) ;
(7,11,19,37,41) ; (7,11,19,37,43) ; (7,11,19,37,47) ; (7,11,19,41,47) ; (7,11,19,43,47) ;
(7,11,23,29,37) ; (7,11,23,29,41) ; (7,11,23,29,43) ; (7,11,23,29,47) ; (7,11,23,31,37) ;
(7,11,23,31,41) ; (7,11,23,31,43) ; (7,11,23,31,47) ; (7,11,23,37,41) ; (7,11,23,37,43) ;
(7,11,23,37,47) ; (7,11,23,41,47) ; (7,11,23,43,47) ; (7,11,29,37,41) ; (7,11,29,37,43) ;
(7,11,29,37,47) ; (7,11,29,41,47) ; (7,11,29,43,47) ; (7,11,31,37,41) ; (7,11,31,37,43) ;
(7,11,31,37,47) ; (7,11,31,41,47) ; (7,11,31,43,47) ; (7,11,37,41,47) ; (7,11,37,43,47) ;
(7,13,17,23,29) ; (7,13,17,23,31) ; (7,13,17,23,37) ; (7,13,17,23,41) ; (7,13,17,23,43) ;
(7,13,17,23,47) ; (7,13,17,29,37) ; (7,13,17,29,41) ; (7,13,17,29,43) ; (7,13,17,29,47) ;
(7,13,17,31,37) ; (7,13,17,31,41) ; (7,13,17,31,43) ; (7,13,17,31,47) ; (7,13,17,37,41) ;
(7,13,17,37,43) ; (7,13,17,37,47) ; (7,13,17,41,47) ; (7,13,17,43,47) ; (7,13,19,23,29) ;
(7,13,19,23,31) ; (7,13,19,23,37) ; (7,13,19,23,41) ; (7,13,19,23,43) ; (7,13,19,23,47) ;
(7,13,19,29,37) ; (7,13,19,29,41) ; (7,13,19,29,43) ; (7,13,19,29,47) ; (7,13,19,31,37) ;
(7,13,19,31,41) ; (7,13,19,31,43) ; (7,13,19,31,47) ; (7,13,19,37,41) ; (7,13,19,37,43) ;
(7,13,19,37,47) ; (7,13,19,41,47) ; (7,13,19,43,47) ; (7,13,23,29,37) ; (7,13,23,29,41) ;
(7,13,23,29,43) ; (7,13,23,29,47) ; (7,13,23,31,37) ; (7,13,23,31,41) ; (7,13,23,31,43) ;
(7,13,23,31,47) ; (7,13,23,37,41) ; (7,13,23,37,43) ; (7,13,23,37,47) ; (7,13,23,41,47) ;

(7,13,23,43,47) ; (7,13,29,37,41) ; (7,13,29,37,43) ; (7,13,29,37,47) ; (7,13,29,41,47) ; (7,13,29,43,47) ; (7,13,31,37,41) ; (7,13,31,37,43) ; (7,13,31,37,47) ; (7,13,31,41,47) ; (7,13,31,43,47) ; (7,13,37,41,47) ; (7,13,37,43,47) ; (7,17,23,29,37) ; (7,17,23,29,41) ; (7,17,23,29,43) ; (7,17,23,29,47) ; (7,17,23,31,37) ; (7,17,23,31,41) ; (7,17,23,31,43) ; (7,17,23,31,47) ; (7,17,23,37,41) ; (7,17,23,37,43) ; (7,17,23,37,47) ; (7,17,23,41,47) ; (7,17,23,43,47) ; (7,17,29,37,41) ; (7,17,29,37,43) ; (7,17,29,37,47) ; (7,17,29,41,47) ; (7,17,29,43,47) ; (7,17,31,37,41) ; (7,17,31,37,43) ; (7,17,31,37,47) ; (7,17,31,41,47) ; (7,17,31,43,47) ; (7,17,37,41,47) ; (7,17,37,43,47) ; (7,19,23,29,37) ; (7,19,23,29,41) ; (7,19,23,29,43) ; (7,19,23,29,47) ; (7,19,23,31,37) ; (7,19,23,31,41) ; (7,19,23,31,43) ; (7,19,23,31,47) ; (7,19,23,37,41) ; (7,19,23,37,43) ; (7,19,23,37,47) ; (7,19,23,41,47) ; (7,19,23,43,47) ; (7,19,29,37,41) ; (7,19,29,37,43) ; (7,19,29,37,47) ; (7,19,29,41,47) ; (7,19,29,43,47) ; (7,19,31,37,41) ; (7,19,31,37,43) ; (7,19,31,37,47) ; (7,19,31,41,47) ; (7,19,31,43,47) ; (7,19,37,41,47) ; (7,19,37,43,47) ; (7,23,29,37,41) ; (7,23,29,37,43) ; (7,23,29,37,47) ; (7,23,29,41,47) ; (7,23,29,43,47) ; (7,23,31,37,41) ; (7,23,31,37,43) ; (7,23,31,37,47) ; (7,23,31,41,47) ; (7,23,31,43,47) ; (7,23,37,41,47) ; (7,23,37,43,47) ; (7,29,37,41,47) ; (7,29,37,43,47) ; (7,31,37,41,47) ; (7,31,37,43,47) ; (11,17,23,29,37) ; (11,17,23,29,41) ; (11,17,23,29,43) ; (11,17,23,29,47) ; (11,17,23,31,37) ; (11,17,23,31,41) ; (11,17,23,31,43) ; (11,17,23,31,47) ; (11,17,23,37,41) ; (11,17,23,37,43) ; (11,17,23,37,47) ; (11,17,23,41,47) ; (11,17,23,43,47) ; (11,17,29,37,41) ; (11,17,29,37,43) ; (11,17,29,37,47) ; (11,17,29,41,47) ; (11,17,29,43,47) ; (11,17,31,37,41) ; (11,17,31,37,43) ; (11,17,31,37,47) ; (11,17,31,41,47) ; (11,17,31,43,47) ; (11,17,37,41,47) ; (11,17,37,43,47) ; (11,19,23,29,37) ; (11,19,23,29,41) ; (11,19,23,29,43) ; (11,19,23,29,47) ; (11,19,23,31,37) ; (11,19,23,31,41) ; (11,19,23,31,43) ; (11,19,23,31,47) ; (11,19,23,37,41) ; (11,19,23,37,43) ; (11,19,23,37,47) ; (11,19,23,41,47) ; (11,19,23,43,47) ; (11,19,29,37,41) ; (11,19,29,37,43) ; (11,19,29,37,47) ; (11,19,29,41,47) ; (11,19,29,43,47) ; (11,19,31,37,41) ; (11,19,31,37,43) ; (11,19,31,37,47) ; (11,19,31,41,47) ; (11,19,31,43,47) ; (11,19,37,41,47) ; (11,19,37,43,47) ; (11,23,29,37,41) ; (11,23,29,37,43) ; (11,23,29,37,47) ; (11,23,29,41,47) ; (11,23,29,43,47) ; (11,23,31,37,41) ; (11,23,31,37,43) ; (11,23,31,37,47) ; (11,23,31,41,47) ; (11,23,31,43,47) ; (11,23,37,41,47) ; (11,23,37,43,47) ; (11,29,37,41,47) ; (11,29,37,43,47) ; (11,31,37,41,47) ; (11,31,37,43,47) ; (13,17,23,29,37) ; (13,17,23,29,41) ; (13,17,23,29,43) ; (13,17,23,29,47) ; (13,17,23,31,37) ; (13,17,23,31,41) ; (13,17,23,31,43) ; (13,17,23,31,47) ; (13,17,23,37,41) ; (13,17,23,37,43) ; (13,17,23,37,47) ; (13,17,23,41,47) ; (13,17,23,43,47) ; (13,17,29,37,41) ; (13,17,29,37,43) ; (13,17,29,37,47) ; (13,17,29,41,47) ; (13,17,29,43,47) ; (13,17,31,37,41) ; (13,17,31,37,43) ; (13,17,31,37,47) ; (13,17,31,41,47) ; (13,17,31,43,47) ; (13,17,37,41,47) ; (13,17,37,43,47) ; (13,19,23,29,37) ; (13,19,23,29,41) ; (13,19,23,29,43) ; (13,19,23,29,47) ; (13,19,23,31,37) ; (13,19,23,31,41) ; (13,19,23,31,43) ; (13,19,23,31,47) ; (13,19,23,37,41) ; (13,19,23,37,43) ; (13,19,23,37,47) ; (13,19,23,41,47) ; (13,19,23,43,47) ; (13,19,29,37,41) ; (13,19,29,37,43) ; (13,19,29,37,47) ; (13,19,29,41,47) ; (13,19,29,43,47) ; (13,19,31,37,41) ; (13,19,31,37,43) ; (13,19,31,37,47) ; (13,19,31,41,47) ; (13,19,31,43,47) ; (13,19,37,41,47) ; (13,19,37,43,47) ; (13,23,29,37,41) ; (13,23,29,37,43) ; (13,23,29,37,47) ; (13,23,29,41,47) ; (13,23,29,43,47) ; (13,23,31,37,41) ; (13,23,31,37,43) ; (13,23,31,37,47) ; (13,23,31,41,47) ; (13,23,31,43,47) ; (13,23,37,41,47) ; (13,23,37,43,47) ; (13,29,37,41,47) ; (13,29,37,43,47) ; (13,31,37,41,47) ; (13,31,37,43,47) ; (17,23,29,37,41) ; (17,23,29,37,43) ; (17,23,29,37,47) ; (17,23,29,41,47) ; (17,23,29,43,47) ; (17,23,31,37,41) ; (17,23,31,37,43) ; (17,23,31,37,47) ; (17,23,31,41,47) ; (17,23,31,43,47) ; (17,23,37,41,47) ; (17,23,37,43,47) ; (17,29,37,41,47) ; (17,29,37,43,47) ; (17,31,37,41,47) ; (17,31,37,43,47) ; (19,23,29,37,41) ; (19,23,29,37,43) ; (19,23,29,37,47) ; (19,23,29,41,47) ; (19,23,29,43,47) ; (19,23,31,37,41) ; (19,23,31,37,43) ; (19,23,31,37,47) ; (19,23,31,41,47) ; (19,23,31,43,47) ; (19,23,37,41,47) ; (19,23,37,43,47) ; (19,29,37,41,47) ; (19,29,37,43,47) ; (19,31,37,41,47) ; (19,31,37,43,47).

4. On utilise uniquement les jetons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.
   (a) Quels sont tous les sacs jolis de deux jetons que l'on peut constituer ?
   On peut former les 13 sacs jolis suivants : (2, 8), (7, 8), (3, 4), (4, 5), (4, 8), (1, 7), (6, 7), (2, 6), (2, 3), (1, 5), (3, 7), (1, 2), (5, 6).
   (b) Prouver que si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.
   D'après la question précédente, un sac joli contenant le jeton 2 contient l'un des jetons suivants : 1, 3, 6 ou 8. Or les nombres $3-1=2$, $6-1=5$, $8-1=7$, $6-3=3$, $8-3=5$ et $8-6=2$ sont tous premiers. Donc si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.
   (c) Prouver que si un sac joli ne contient pas le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons.
   Par disjonction de cas :
   - si un tel sac contient le jeton 1, alors il contient l'un des jetons suivants : 7 ou 5. Mais $7-5=2$ est un nombre premier.
   - si un tel sac contient le jeton 3, alors il contient l'un des jetons suivants : 4, 7. Mais $7-4=3$ est un nombre premier.
   - si un tel sac contient le jeton 4, alors il contient l'un des jetons suivants : 3, 5, 8. Mais $5-3=2$, $8-5=3$ et $8-3=5$ sont des nombres premiers.
   - si un tel sac contient le jeton 5, alors il contient l'un des jetons suivants : 4, 1, 6. Mais $6-4=2$, $6-1=5$ et $4-1=3$ sont des nombres premiers.
   - si un tel sac contient le jeton 6, alors il contient l'un des jetons suivants : 7 ou 5. Mais $7-5=2$ est un nombre premier.
   - si un tel sac contient le jeton 7, alors il contient l'un des jetons suivants : 8, 1, 6, 3. Mais $8-1=7$, $8-6=2$, $8-3=5$, $6-1=5$, $6-3=3$, $3-1=2$ sont des nombres premiers.
   - si un tel sac contient le jeton 8, alors il contient l'un des jetons suivants : 4, 7. Mais $7-4=3$ est un nombre premier.

   (d) Est-il possible de constituer un sac joli avec trois jetons ?
   Non car si un sac joli contient le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons et s'il ne contient pas le jeton 2, alors il contient exactement deux jetons. Dans tous les cas, un sac joli avec les jetons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, et 8 contient exactement deux jetons.

CORRECTION PAR ÉQUIPES

2022

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Voie générale

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : Nombres cousinades

On rappelle que :

- Un **nombre premier** est un nombre entier naturel ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.
- Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 50 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
- 1 n'est pas un nombre premier.
- Un nombre entier naturel non nul peut s'écrire sous la forme d'un **produit de nombres premiers** (éventuellement égaux). De plus, cette écriture est unique à l'ordre près des facteurs.
- Par exemple, $5 \times 5 \times 7$ est l'unique manière d'écrire 175 sous la forme d'un produit de nombres premiers à l'ordre près des facteurs.

Dans cet exercice, on donne la définition suivante :

- On appelle **nombre cousinade** un nombre entier naturel n qui s'écrit sous la forme $n = a \times (a+4)$ où a et $a+4$ sont deux nombres premiers.

Partie A : *Premières recherches*

1. Démontrer que 77 est un nombre cousinade.

   On pose $a = 7$ et on obtient $77 = 7 \times 11 = a \times (a+4)$ où $a = 7$ et $a + 4 = 11$ sont des nombres premiers. Ainsi 77 est un nombre cousinade.

2. Démontrer que 141 n'est pas un nombre cousinade.

   On remarque que 141 est divisible par 3 :

   $$141 = 3 \times 47$$

   47 et 3 sont des nombres premiers mais dont la différence n'est pas égale à 4. D'après l'unicité de l'écriture d'un nombre en facteurs premiers, 141 n'est pas un nombre cousinade.
   <u>Alternative</u> : on résout l'équation $141 = x \times (x+4)$ d'inconnu le nombre réel x.
   $141 = x \times (x+4) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 141 = 0$, on a donc une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-141) = 580$. Cette équation admet deux solutions qui sont $x_1 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{145}}{2} = -2 - \sqrt{145}$ et $x_2 = \dfrac{-4 + 2\sqrt{145}}{2} = -2 + \sqrt{145}$ qui ne sont pas des nombres entiers. Ainsi 141 n'est pas un nombre cousinade.

3. Existe-t-il un nombre cousinade qui soit un nombre pair ? Justifier.

   On raisonne par l'absurde. S'il existe un nombre cousinade n qui soit pair alors il serait divisible par 2 qui est un nombre premier. D'après le résultat donné en introduction, 2 serait nécessairement un des deux facteurs cousins. Or 2 n'admet pas de cousin car $2+4 = 6$ n'est pas premier. Il n'existe donc pas de nombre cousinade pair.

4. En utilisant la liste des nombres premiers, donner les quatre plus petits nombres cousinades.

En utilisant la liste des premiers nombres premiers on en déduit les quatre plus petits nombres cousinades :

$$3 \times 7 = 21$$
$$7 \times 11 = 77$$
$$13 \times 17 = 221$$
$$19 \times 23 = 437$$

Partie B : ***Test***

1. Soit n un nombre cousinade tel que $n = a \times (a+4)$ où a et $a+4$ sont des nombres premiers.
   (a) Démontrer que l'on a : $n + 4 = (a+2)^2$.
   $n + 4 = a \times (a+4) + 4 = a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2$ en utilisant une des identités remarquables.
   (b) En déduire que l'on a : $a = \sqrt{n+4} - 2$.
   D'après la question précédente, on a $n + 4 = (a+2)^2$ d'où $a + 2 = \sqrt{n+4}$ et donc $a = \sqrt{n+4} - 2$.
2. En s'aidant de la question B.1 et en explicitant la démarche, dire pour chacun des nombres suivants s'il est un nombre cousinade :

$$2021,\ 2022,\ 2112$$

- On pose $n = 2021$ et on considère $a = \sqrt{n+4} - 2 = \sqrt{2025} - 2 = 45 - 2 = 43$. De plus $a \times (a+4) = 43 \times 47 = 2021$ où 43 et 47 sont des nombres premiers. Ainsi 2021 est un nombre cousinade.
- On pose $n = 2022$ et on considère $a = \sqrt{n+4} - 2 = \sqrt{2026} - 2$ où $\sqrt{2026}$ n'est pas un nombre entier. Ainsi a n'est pas non plus un nombre entier donc 2022 n'est pas un nombre cousinade.
- On pose $n = 2112$ et on considère $a = \sqrt{n+4} - 2 = \sqrt{2116} - 2 = 46 - 2 = 44$ qui n'est pas un nombre premier car $44 = 2 \times 22$. Ainsi 2112 n'est pas un nombre cousinade.

Partie C : ***Implémentation du test***

En langage Python, on rappelle que si `a` désigne un entier naturel non nul :

- l'instruction `range(1,a+1)` correspond à la liste des entiers naturels compris entre 1 et `a` inclus ;
- `a % d` est le reste dans la division euclidienne de l'entier `a` par un entier naturel non nul `d` ;
- `a == b` renvoie `True` si `a` et `b` sont égaux, `False` sinon.

On considère la fonction **`mystère`** écrite en langage Python prenant pour argument, en entrée, un entier naturel `a` non nul :

```
def mystère(a):
    compteur = 0
    for d in range(1, a + 1):
        if a % d == 0:
            compteur = compteur + 1
    return compteur == 2
```

Voici un exemple d'utilisation de cette fonction :

```
>>> mystère(7)
True
>>> mystère(155)
False
```

1. Préciser le rôle de la fonction `mystère`.
   Le rôle de la fonction mystère est de retourner `True` si `a` est un nombre premier et `False` sinon.

On dispose des deux instructions suivantes :

- l'instruction `est_entier(x)` retourne `True` si le nombre `x` est un nombre entier naturel et `False` dans le cas contraire ;
- l'instruction `racine_carree(x)` calcule une valeur approchée de $\sqrt{x}$ où `x` est un nombre réel positif.

2. Soit `n` un entier naturel non nul. Recopier et proposer la suite de la fonction `est_cousinade(n)` qui renvoie `True` si `n` est un nombre cousinade et `False` sinon. On pourra utiliser la fonction `mystère` et les deux instructions précédentes.

```
def est_cousinade(n):
    ...
```

```
def est_cousinade(n):
    a = racine(n + 4) - 2
    return est_entier(a) and mystère(int(a)) and mystère(int(a+4))
```

On acceptera `mystère(a)` à la place de `mystère(int(a))` bien que `mystère(a)` produise une erreur car `a` ne désigne pas une variable de type entier.
On donne à titre indicatif comment définir les fonctions proposées dans la question :

```
from math import sqrt

def est_entier(x):
    return x == int(x)

def racine(x):
    return sqrt(x)
```

Partie D : ***Tentative de recherche d'une expression***
On rappelle que :

- la division euclidienne d'un entier naturel a par 6 s'écrit : $a = 6 \times q + r$ où q et r sont les uniques entiers tels que $0 \leqslant r < 6$;
- q est le quotient et r est le reste de cette division euclidienne.

1. Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 5. Soit r le reste de la division euclidienne de a par 6.

(a) Démontrer que si le reste r est égal à 0 ou 2 ou 3 ou 4, alors a n'est pas un nombre premier.

Soit a un nombre entier tel que $a \geqslant 5$.

Si r est dans $\{0, 2, 4\}$ alors $a = 2 \times 3 \times q + r$ est un nombre pair en tant que somme de deux nombres pairs. Hors il n'existe pas de nombre premier pair autre que 2, comme $a \geqslant 5$, a ne peut pas être premier.

Si $r = 3$ alors $a = 3 \times (2q + 1)$ où $2q + 1$ est un nombre entier donc 3 divise a, ainsi a ne peut pas être un nombre premier.

(b) Démontrer que si le reste r est égal à 5, alors $a + 4$ n'est pas un nombre premier.

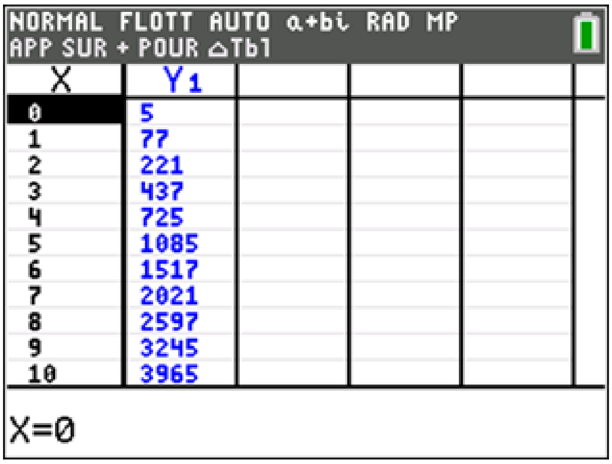
Si $r = 5$ alors on a $a = 6q + 5$ d'où $a + 4 = 6q + 9 = 3(2q + 3)$ où $2q + 3$ est un nombre entier. Ainsi 3 divise $a + 4$ qui est un nombre entier supérieur ou égal à 4. On en déduit que $a + 4$ n'est pas un nombre premier.

2. Soit n un nombre cousinade dont les facteurs premiers sont a et $a + 4$ tels que $a \geqslant 5$.
Démontrer alors que l'on a $n = 36q^2 + 36q + 5$ où $q > 0$.

D'après les deux questions précédentes, on a nécessairement $r = 1$ d'où $a = 6q + 1$. Comme $a \geqslant 5$, on a $6q + 1 \geqslant 5$ d'où $q > 0$. Enfin $n = a \times (a + 4) = (6q + 1) \times (6q + 5) = 36q^2 + 36q + 5$.

3. Est-il vrai que pour tout entier naturel q non nul, le nombre $36q^2 + 36q + 5$ est un nombre cousinade ? Justifier.

On peut faire un tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto 36q^2 + 36q + 5$:



X	Y_1
0	5
1	77
2	221
3	437
4	725
5	1085
6	1517
7	2021
8	2597
9	3245
10	3965

En posant $n = f(4) = 725$ et $a = \sqrt{n + 4} - 2 = \sqrt{729} - 2 = 25$, on remarque que a n'est pas un nombre premier, d'après la question 2, $n = f(4)$ n'est pas un nombre cousinade. Il n'est donc pas vrai que pour tout entier naturel q non nul, le nombre $36q^2 + 36q + 5$ soit un nombre cousinade.

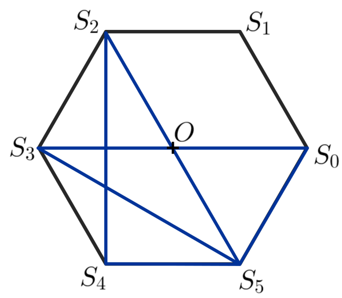
Remarque : néanmoins, excepté 21, tous les nombres cousinades sont de cette forme !

Exercice 2 : Triplangles

Dans tout l'exercice :

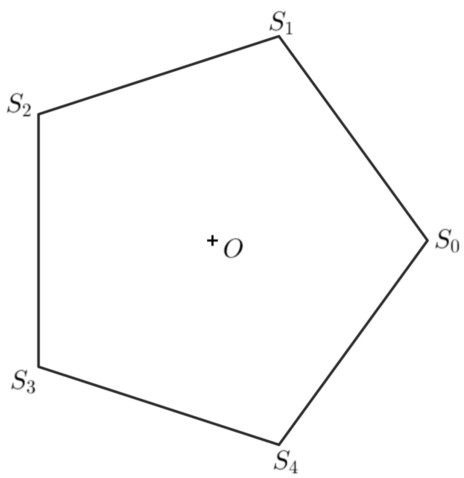
- N est un nombre entier supérieur ou égal à 3.
- a, b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leqslant a < b < c \leqslant N-1$.
- P_N est un polygone régulier à N côtés dont les sommets sont successivement nommés S_0, S_1, ..., S_{N-1} et O son centre.
- $S_aS_bS_c$ est un triangle dont les sommets sont des sommets de P_N.
- Deux triangles sont « de la même famille » s'ils sont superposables.

Par exemple, dans le polygone régulier P_6 ci-contre, sont représentés les triangles $S_2S_4S_5$ et $S_0S_3S_5$. Les triangles $S_2S_4S_5$ et $S_0S_3S_5$ sont superposables : ils sont « de la même famille ».



Partie A : Étude géométrique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$. Pour chaque question, **aucune justification n'est attendue**.



1. Les triangles $S_1S_3S_4$ et $S_0S_2S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
   Oui, le triangle $S_1S_3S_4$ est le triangle $S_0S_2S_3$ sont superposables.
2. Les triangles $S_1S_2S_3$ et $S_0S_2S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
   Non, le triangle $S_1S_2S_3$ et le triangle $S_0S_2S_3$ ne sont pas superposables.
3. Citer les triangles « de la même famille » que $S_1S_3S_4$.
   Les triangles de la même famille que $S_1S_3S_4$ sont $S_0S_2S_4$, $S_0S_1S_3$, $S_1S_2S_4$, $S_0S_2S_3$.
4. (a) Combien de triangles peut-on tracer en reliant des sommets de P_5 ?
   On peut tracer $(5 \times 4 \times 3) \div 6 = 10$ triangles en reliant des sommets de P_5.

(b) On souhaite tracer ces triangles en respectant les règles suivantes :

- si deux triangles sont « de la même famille » alors ils sont tracés avec la même couleur ;
- si deux triangles ne sont pas « de la même famille » alors ils sont tracés avec des couleurs différentes.

Combien de couleurs faut-il utiliser pour tracer tous les triangles dont les sommets sont les sommets de P_5 ?

On utilise deux couleurs. Une pour le triangle $S_1S_2S_3$ et les triangles de la même famille. Une autre pour le triangle $S_0S_2S_3$ et les triangles de la même famille.

On rappelle que a, b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leqslant a < b < c \leqslant N - 1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la définition suivante.

Le nombre entier $T_{a,b,c}$, appelé N-triplangle, est défini par :

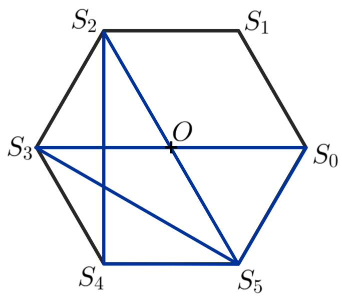
$$T_{a,b,c} = aN^2 + bN + c$$

On admet que :

- à tout triangle $S_aS_bS_c$ on associe l'unique N-triplangle $T_{a,b,c}$;
- réciproquement, tout N-triplangle $T_{a,b,c}$ est associé à un unique triangle $S_aS_bS_c$.

Par exemple, pour $N = 6$:

- le 6-triplangle associé au triangle $S_2S_4S_5$ est $T_{2,4,5} = 2 \times 6^2 + 4 \times 6 + 5 = 101$.
- le 6-triplangle associé au triangle $S_0S_3S_5$ est $T_{0,3,5} = 0 \times 6^2 + 3 \times 6 + 5 = 23$.



Partie B : Étude numérique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$.

1. Calculer le 5-triplangle $T_{1,2,3}$.
   $T_{1,2,3} = 1 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 = 38$
2. Quel 5-triplangle est associé au triangle de l'annexe 1 ?
   Le triangle $S_0S_2S_3$ est associé au triplangle $T_{0,2,3} = 0 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 = 13$.
3. (a) Quel triangle est associé au 5-triplangle 44 ?
   Comme 44 peut s'écrire sous la forme $a \times 5^2 + b \times 5 + c$ avec $a = 1$, $b = 3$ et $c = 4$, 44 est le 5-triplangle associé au triangle $S_1S_3S_4$.

   (b) Tracer ce triangle sur l'annexe 1 à rendre avec la copie.
   Tracer le triangle $S_1S_3S_4$.

   (c) Quelle est la nature de ce triangle ?
   P_5 est un polygone régulier, par conséquent tous ses angles sont égaux et tous ses côtés ont la même longueur. On en déduit que les triangles $S_1S_2S_3$ et $S_1S_0S_4$ sont égaux. Par conséquent, les côtés homologues $[S_1S_3]$ et $[S_1S_4]$ ont la même longueur. Le triangle $S_1S_3S_4$ est donc isocèle.

4. Le nombre 73 est-il un 5-triplangle ? Justifier.

   Par l'absurde, supposons qu'il existe trois nombres entiers a, b, c vérifiant $0 \leq a < b < c < 5$ et $73 = a \times 5^2 + b \times 5 + c$.

   Si $a < 2$, alors $-a \times 25 > -50$ et donc $73 - a \times 25 = b \times 5 + c > 23$. Or $b \times 5 + c$ est majoré par $3 \times 5 + 4 = 19$. Donc $b \times 5 + c$ ne peut être strictement supérieur à 23. Par conséquent, comme $0 \leq a < b < c < 5$, on en déduit que $a = 2$, $b = 3$ et $c = 4$.

   Or $2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4 = 69 \neq 73$, on aboutit donc à une contradiction.

   Il n'existe pas trois nombres entiers a, b, c vérifiant $0 \leq a < b < c < 5$ et $73 = a \times 5^2 + b \times 5 + c$: le nombre 73 n'est pas un 5-triplangle.

5. Déterminer tous les 5-triplangles.

   L'ensemble des 5-triplangles est $\{7, 8, 9, 13, 14, 19, 38, 39, 44, 69\}$: il en existe 10. Ils sont associés aux 10 triangles que l'on peut tracer en reliant des sommets de P_5.

Partie C : Étude de P_{10}

Dans cette partie, on considère $N = 10$.

P_{10} est un polygone régulier à 10 côtés dont les sommets sont successivement nommés S_0, S_1, ..., S_9 : ce polygone est représenté dans les annexes 2 et 3 **à rendre avec la copie**. Pour les recherches, une planche de 6 polygones P_{10} est fournie en page 7 : elle **n'est pas à rendre avec la copie**.

1. (a) Quel est le triangle associé au 10-triplangle 19 ?

   Comme 19 peut s'écrire sous la forme $a \times 10^2 + b \times 10 + c$ avec $a = 0$, $b = 1$ et $c = 9$, 19 est le 5-triplangle associé au triangle $S_0S_1S_9$.

   (b) Sur l'annexe 2, tracer ce triangle ainsi que tous ceux « de la même famille » que celui-ci.

   Les triangles de la même famille que $S_0S_1S_9$ sont $S_0S_1S_2$, $S_1S_2S_3$, $S_2S_3S_4$, $S_3S_4S_5$, $S_4S_5S_6$, $S_5S_6S_7$, $S_6S_7S_8$, $S_7S_8S_9$, $S_0S_8S_9$.

2. (a) Quel est le triangle associé au 10-triplangle 256 ?

   Comme 256 peut s'écrire sous la forme $a \times 10^2 + b \times 10 + c$ avec $a = 2$, $b = 5$ et $c = 6$, 256 est le 10-triplangle associé au triangle $S_2S_5S_6$.

   (b) Sur l'annexe 3, tracer ce triangle ainsi que tous ceux « de la même famille » que celui-ci.

   Les triangles de la même famille que $S_2S_5S_6$ sont $S_0S_1S_4$, $S_0S_1S_7$, $S_0S_3S_4$, $S_0S_3S_9$, $S_0S_6S_7$, $S_0S_6S_9$, $S_1S_2S_5$, $S_1S_2S_8$, $S_1S_4S_5$, $S_1S_7S_8$, $S_2S_3S_6$, $S_2S_3S_9$, $S_2S_8S_9$, $S_3S_4S_7$, $S_3S_6S_7$, $S_4S_5S_8$, $S_4S_7S_8$, $S_5S_6S_9$, $S_5S_8S_9$.

3. Montrer que l'on peut tracer 120 triangles en reliant des sommets de P_{10}.

   Il s'agit de dénombrer les triplets d'entier (a, b, c) vérifiant $0 \leq a < b < c < 10$.

   Si $a = 0$, on en dénombre $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$.

   Si $a = 1$, on en dénombre $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$.

   Si $a = 2$, on en dénombre $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.

   ...

   Si $a = 7$, on en dénombre 1.

   Finalement, on peut tracer $36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 120$ triangles en reliant des sommets de P_{10}.

   On obtient le même résultat par le calcul du quotient $(10 \times 9 \times 8) \div 6 = 120$.

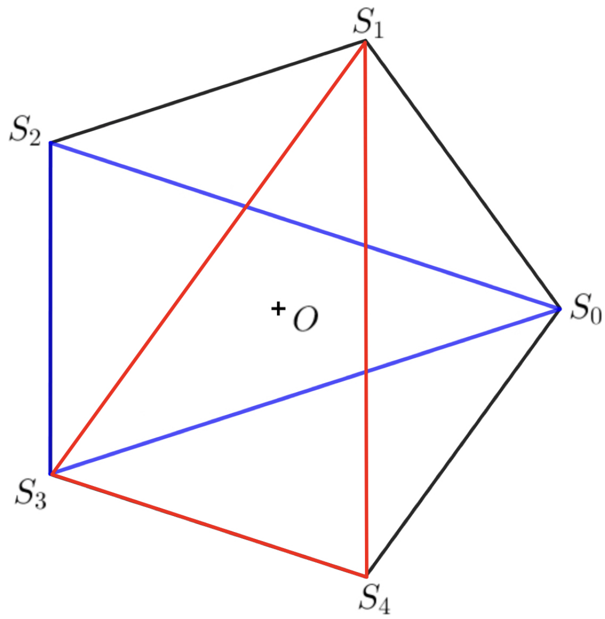
4. En respectant les mêmes règles qu'à la question A. 4. (b), combien de couleurs faut-il utiliser pour tracer tous les triangles dont les sommets sont les sommets de P_{10} ?

   Il en faut 8 pour tracer avec des couleurs différentes les triangles suivants et ceux de leur famille $S_0S_1S_2$, $S_0S_1S_3$, $S_0S_1S_4$, $S_0S_1S_5$, $S_0S_2S_4$, $S_0S_2S_5$, $S_0S_2S_6$, $S_0S_3S_6$.

Annexes de l'exercice 2
À remettre avec la copie

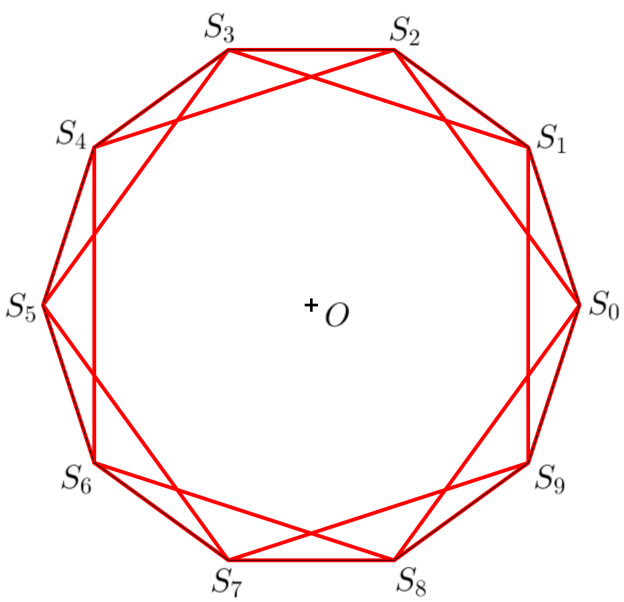
Annexe 1

Exercice 2, questions B.2 et B.3.(b)



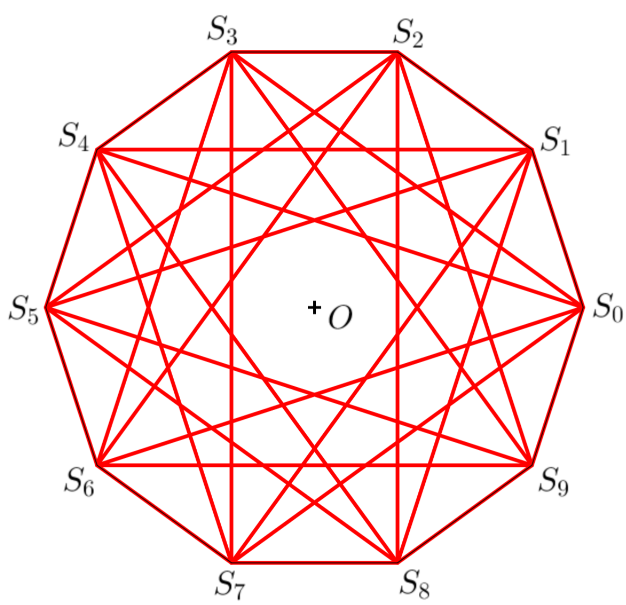
Annexe 2

Exercice 2, question C.1.(b)



Annexe 3

Exercice 2, question C.2.(b)



Olympiades nationales de mathématiques 2022

Voie technologique

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

ACADÉMIE DE NICE
Liberté Égalité Fraternité

Académie de Nice

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution en équipe

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Exercice 1 : Bataille d'intelligences artificielles

Un informaticien programme deux intelligences artificielles que l'on désignera par IA1 et IA2.

Dans tout l'exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Dans un tableau à 2 lignes et N colonnes, IA1 coche au hasard des cases sur la première ligne horizontale et IA2 coche, sans connaître le choix de IA1, des cases encore au hasard sur la deuxième ligne.

Si deux cases de la même colonne sont cochées alors IA2 a gagné et IA1 a perdu. Dans le cas contraire, IA1 a gagné et IA2 a perdu.

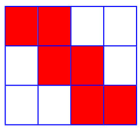
Les résultats pourront être justifiés en utilisant un tableau de deux lignes sur le modèle ci-contre. Dans cet exemple, $N = 4$, IA2 a gagné et IA1 a perdu.

IA1 $\rightarrow$	X	X		
IA2 $\rightarrow$	X			

Partie A - Les choix de IA1

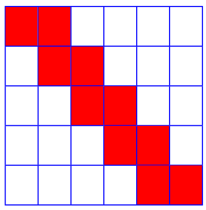
1. Sur sa ligne horizontale de N cases, IA1 coche **deux cases adjacentes** c'est-à-dire **l'une à côté de l'autre**.
   (a) Dans cette question, $N = 4$. Combien y a-t-il de possibilités pour cocher ces deux cases ?

   Pour $N = 4$, il y a 3 choix.

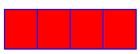
   (b) Dans cette question, $N = 6$. Combien y a-t-il de possibilités pour cocher ces deux cases ?

   Pour $N = 6$, il y a 5 choix.

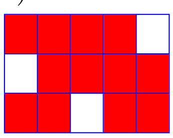
2. On note $D_1(N)$ le nombre de possibilités de cocher deux cases adjacentes.
   (a) Que vaut $D_1(2)$?
   $D_1(2) = 1$
   (b) Exprimer $D_1(N)$ en fonction de N. On acceptera la réponse sans démonstration.
   $D_1(N) = N - 1$

3. Dans cette question, N est un entier naturel supérieur ou égal à 4. Sur sa ligne horizontale de N cases, IA1 coche **deux cases adjacentes** puis, parmi les cases restantes, il coche de nouveau **deux cases adjacentes**. On note $D_2(N)$ le nombre de possibilités de cocher ainsi ces quatre cases.
   (a) Que vaut $D_2(4)$?
   $D_2(4) = 1$

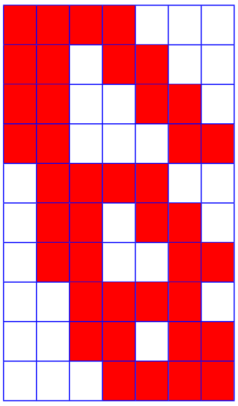
   (b) Justifier que $D_2(5) = 3$.

   $D_2(5) = 3$

(c) Que vaut $D_2(7)$?

$D_2(7) = 10$

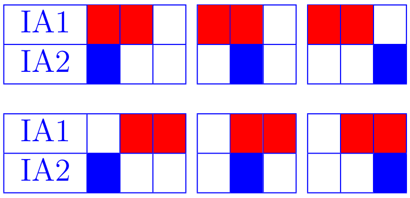


Partie B - Au tour de IA2

Désormais, on s'intéresse aux parties différentes possibles entre IA1 et IA2.

Situation 1 : IA1 coche au hasard **deux cases adjacentes** sur sa ligne et IA2 coche au hasard **une seule case** sur sa ligne.

1. (a) Dans cette question, $N = 3$. Justifier que 6 parties différentes sont possibles.
En déduire la probabilité que IA2 gagne dans ce cas.



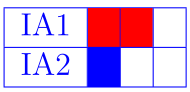
On a bien 6 parties possibles et la probabilité pour IA2 de gagner est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

(b) Dans cette question, $N = 4$. Sur l'annexe à rendre avec la copie, représenter toutes les parties différentes possibles. En déduire la probabilité que IA2 gagne.
On a 12 parties possibles dont 6 gagnantes et la probabilité pour IA2 de gagner est $\frac{1}{2}$.

2. Désormais, N est un entier naturel supérieur ou égal à 4.

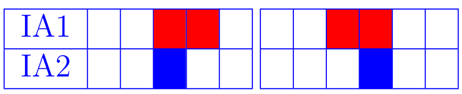
(a) Justifier que $(N-1) \times N$ parties différentes sont possibles.
IA1 a $D_1(N) = N - 1$ choix pour placer le paquet de deux et IA2 a N choix pour sa case , donc un total de $(N-1) \times N$ choix.

(b) Quelle est la probabilité que IA2 gagne la partie si la case cochée par IA2 est dans la première colonne ?
Si la case de IA2 est dans la première colonne, il a une seule partie gagnante pour lui : il faut que IA1 ait coché sa première colonne.



La probabilité que IA2 gagne la partie si la case cochée par IA2 est dans la première colonne est donc égale à $\frac{1}{N-1}$

(c) Quelle est la probabilité que IA2 gagne la partie ?
Si la case n'est pas aux extrémités, il y a 2 parties gagnantes



On a donc $1 + 2 \times (N-2) + 1 = 2N - 2$ parties gagnantes.
La probabilité pour IA2 de gagner est $\frac{2N-2}{N(N-1)} = \frac{2}{N}$.

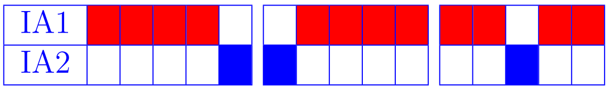
Situation 2 : sur sa ligne, IA1 coche **deux cases adjacentes** puis, parmi les cases restantes, il coche de nouveau **deux cases adjacentes**. IA2 coche au hasard **une seule case** sur sa ligne.

3. Dans cette question, $N = 5$.

   (a) Justifier que 15 parties sont possibles.

   Pour $N = 5$ cases, IA1 a $D_2(5) = 3$ choix et IA1 a 5 choix donc il y a 15 parties possibles.

   (b) Montrer que la probabilité que IA2 gagne est $\frac{4}{5}$.

   Il n'y a que 3 parties perdantes pour IA2 : 

   Donc la probabilité que IA2 gagne est $1 - \frac{3}{12} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

4. Dans cette question, $N = 6$.

   (a) Combien y a-t-il de parties possibles ?

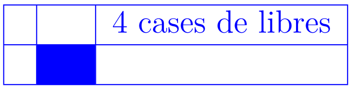
   Il y a $D_2(6) \times 6 = 36$ parties possibles.

   (b) Justifier que, si la case cochée par IA2 est dans la première colonne, il y a 3 parties perdantes pour IA2.

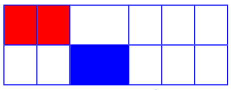
   Il faut que les cases cochées soient à droite donc il reste 5 cases et cela correspond à $D_2(5) = 3$ choix de IA1.

   (c) Montrer que, si la case cochée par IA2 n'est pas dans la première colonne, il y a encore 9 parties perdantes pour IA2.

   On retrouve 3 parties perdantes si la case est cochée tout à droite par symétrie.

   Pour la case 2 (et la case 5 par symétrie), 

   donc il y a $D_2(4) = 1$ partie perdante pour IA2.

   Pour la case 3 (et la case 4 par symétrie),  Les 2 premières cases doivent être cochées par IA1 donc il y a $D_1(3) = 2$ parties perdantes pour IA2.

   Donc, au total, il y a 3+1+1+2+2 =9 parties perdantes pour IA2.

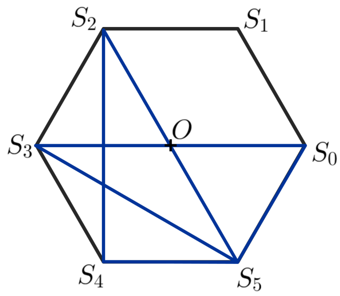
   (d) Qui de IA1 ou IA2 a le plus de chance de gagner ?

   Sur les $D_2(6) \times 6 = 36$ parties possibles, il y a 9+3=12 perdantes pour IA2 qui a donc seulement une chance sur 3 de perdre.

Exercice 2 : Triangles en couleurs

Dans tout l'exercice :

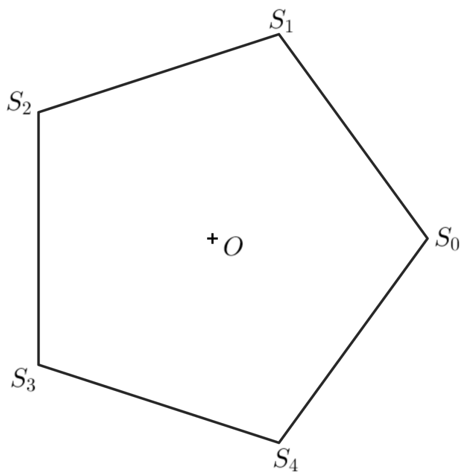
- N est un nombre entier supérieur ou égal à 3.
- a, b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leqslant a < b < c \leqslant N-1$.
- P_N est un polygone régulier à N côtés dont les sommets sont successivement nommés S_0, S_1, ..., S_{N-1} et O son centre.
- $S_aS_bS_c$ est un triangle dont les sommets sont des sommets de P_N.
- Deux triangles sont « de la même famille » s'ils sont superposables.



Par exemple, dans le polygone régulier P_6 ci-contre, sont représentés les triangles $S_2S_4S_5$ et $S_0S_3S_5$. Les triangles $S_2S_4S_5$ et $S_0S_3S_5$ sont superposables : ils sont « de la même famille ».

Partie A : Étude géométrique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$. Pour chaque question, **aucune justification n'est attendue**.



1. Les triangles $S_1S_3S_4$ et $S_0S_2S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
   Oui, le triangle $S_1S_3S_4$ est le triangle $S_0S_2S_3$ sont superposables.
2. Les triangles $S_1S_2S_3$ et $S_0S_2S_3$ sont-ils « de la même famille » ?
   Non, le triangle $S_1S_2S_3$ et le triangle $S_0S_2S_3$ ne sont pas superposables.
3. Citer les triangles « de la même famille » que $S_1S_3S_4$.
   Les triangles de la même famille que $S_1S_3S_4$ sont $S_0S_2S_4$, $S_0S_1S_3$, $S_1S_2S_4$, $S_0S_2S_3$.
4. (a) Combien de triangles peut-on tracer en reliant des sommets de P_5 ?
   On peut tracer $(5 \times 4 \times 3) \div 6 = 10$ triangles en reliant des sommets de P_5.

(b) On souhaite tracer ces triangles en respectant les règles suivantes :

- si deux triangles sont « de la même famille » alors ils sont tracés avec la même couleur ;
- si deux triangles ne sont pas « de la même famille » alors ils sont tracés avec des couleurs différentes.

Combien de couleurs faut-il utiliser pour tracer tous les triangles dont les sommets sont les sommets de P_5 ?
On utilise deux couleurs. Une pour le triangle $S_1S_2S_3$ et les triangles de la même famille. Une autre pour le triangle $S_0S_2S_3$ et les triangles de la même famille.

On rappelle que a, b et c désignent des nombres entiers naturels vérifiant $0 \leqslant a < b < c \leqslant N-1$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la définition suivante.

Le nombre entier $T_{a,b,c}$, appelé N-triplangle, est défini par :

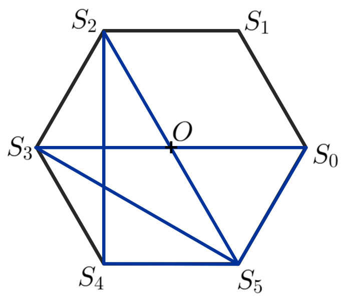
$$T_{a,b,c} = aN^2 + bN + c$$

On admet que :

- à tout triangle $S_aS_bS_c$ on associe l'unique N-triplangle $T_{a,b,c}$;
- réciproquement, tout N-triplangle $T_{a,b,c}$ est associé à un unique triangle $S_aS_bS_c$.

Par exemple, pour $N = 6$:

- le 6-triplangle associé au triangle $S_2S_4S_5$ est $T_{2,4,5} = 2 \times 6^2 + 4 \times 6 + 5 = 101$.
- le 6-triplangle associé au triangle $S_0S_3S_5$ est $T_{0,3,5} = 0 \times 6^2 + 3 \times 6 + 5 = 23$.



Partie B : Étude numérique de P_5

Dans cette partie, on considère $N = 5$.

1. Calculer le 5-triplangle $T_{1,2,3}$.
   $T_{1,2,3} = 1 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 = 38$
2. Quel 5-triplangle est associé au triangle de l'annexe 1 ?
   Le triangle $S_0S_2S_3$ est associé au triplangle $T_{0,2,3} = 0 \times 5^2 + 2 \times 5 + 3 = 13$.
3. (a) Quel triangle est associé au 5-triplangle 44 ?
   Comme 44 peut s'écrire sous la forme $a \times 5^2 + b \times 5 + c$ avec $a = 1$, $b = 3$ et $c = 4$, 44 est le 5-triplangle associé au triangle $S_1S_3S_4$.

   (b) Tracer ce triangle sur l'annexe 1 à rendre avec la copie.
   Tracer le triangle $S_1S_3S_4$.

   (c) Quelle est la nature de ce triangle ?
   P_5 est un polygone régulier, par conséquent tous ses angles sont égaux et tous ses côtés ont la même longueur. On en déduit que les triangles $S_1S_2S_3$ et $S_1S_0S_4$ sont égaux. Par conséquent, les côtés homologues $[S_1S_3]$ et $[S_1S_4]$ ont la même longueur. Le triangle $S_1S_3S_4$ est donc isocèle.

4. Le nombre 73 est-il un 5-triplangle ? Justifier.

   Par l'absurde, supposons qu'il existe trois nombres entiers a, b, c vérifiant $0 \leq a < b < c < 5$ et $73 = a \times 5^2 + b \times 5 + c$.

   Si $a < 2$, alors $-a \times 25 > -50$ et donc $73 - a \times 25 = b \times 5 + c > 23$. Or $b \times 5 + c$ est majoré par $3 \times 5 + 4 = 19$. Donc $b \times 5 + c$ ne peut être strictement supérieur à 23. Par conséquent, comme $0 \leq a < b < c < 5$, on en déduit que $a = 2$, $b = 3$ et $c = 4$.

   Or $2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4 = 69 \neq 73$, on aboutit donc à une contradiction.

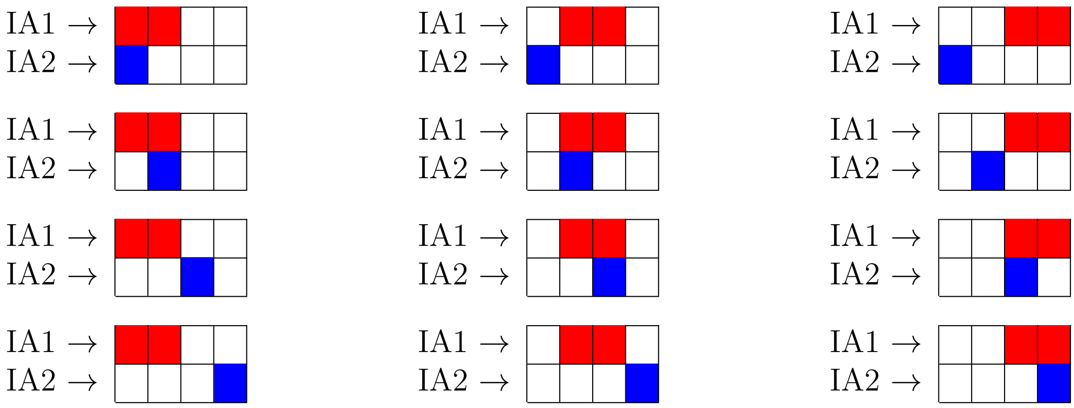
   Il n'existe pas trois nombres entiers a, b, c vérifiant $0 \leq a < b < c < 5$ et $73 = a \times 5^2 + b \times 5 + c$: le nombre 73 n'est pas un 5-triplangle.

5. Déterminer tous les 5-triplangles.

   L'ensemble des 5-triplangles est $\{7, 8, 9, 13, 14, 19, 38, 39, 44, 69\}$: il en existe 10. Ils sont associés aux 10 triangles que l'on peut tracer en reliant des sommets de P_5.

Annexes - À rendre avec la copie

Annexe - Exercice 1 - Partie B, question 1.(b)



Annexe - Exercice 2 - Partie B, question 2 et question 3. (b)