OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE NICE 2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

CORRECTION INDIVIDUEL

2021

Olympiades : b.a.-ba

Correction

1)

$$M_1 = bab$$
$$M_2 = bababbab$$
$$M_3 = bababbababbabbababbab$$

2)

a) $M_1 = bababbabab$ d'où $M_0 = baba$.

b) Non ce n'est pas possible en considérant les deux premiers caractères de M_1. En effet ces deux caractères sont définis à partir du premier caractère de M_0 :

- Soit le premier caractère de M_0 est a dans ce cas les deux premiers caractères de M_1 sont ab.
- Soit le premier caractère de M_0 est b, dans ce cas les premiers caractères de M_1 sont ba.

Les deux premiers caractères de M_1 ne peuvent pas être bb.

3)

a) $\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1, \\ \ell_0 = 1 \end{cases} \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 2, \\ \ell_1 = 3 \end{cases} \begin{cases} a_2 = 3 \\ b_2 = 5, \\ \ell_2 = 8 \end{cases} \begin{cases} a_3 = 8 \\ b_3 = 13 \\ \ell_3 = 21 \end{cases}$

b) Dans M_n n'importe quelle lettre, que ce soit a ou b engendre un a pour M_{n+1}, le nombre de a dans M_{n+1} est donc égal au nombre de lettres dans M_n d'où $a_{n+1} = \ell_n = a_n + b_n$.

c) $b_{n+1} = a_n + 2b_n$

4)

a) Si $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ alors on doit obtenir, d'après la question 2, $a_3 = 5$ et $b_3 = 8$, ce qui n'est pas la réponse obtenue à partir de `calcul(1, 0, 3)`.

b)

```
def calcul(a0, b0, n):
    a = a0
    b = b0
    for k in range(n):
        c = a
        a = c + b
        b = c + 2 * b
    return a, b
```

5) (Remarque : le mot initial est $M_0 = ab$)

D'après les questions 3.a et 3.b, on a :

$$\begin{cases} a_{10} = a_9 + b_9 \\ b_{10} = a_9 + 2b_9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{10} = \ell_9 \\ \ell_{10} = 2\ell_9 + b_9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{10} = 10946 \\ b_9 = 6765 \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$b_{10} = \ell_{10} - a_{10} = 17711$$
$$a_9 = \ell_9 - b_9 = 4181$$

Le mot M_9 est constitué de 4 181 lettres a et 6 765 lettres b.

Le mot M_{10} est constitué de 10 946 lettres a et 17 711 lettres b.

6) On a vu précédemment que pour tout entier naturel n, on a : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \\ \ell_n = a_n + b_n \end{cases}$

D'une part :

$$\ell_{n+2} = a_{n+2} + b_{n+2} = (a_{n+1} + b_{n+1}) + (a_{n+1} + 2b_{n+1})$$
$$\ell_{n+2} = 2a_{n+1} + 3b_{n+1} = 2(a_n + b_n) + 3(a_n + 2b_n)$$
$$\ell_{n+2} = 5a_n + 8b_n$$

D'autre part :

$$3\ell_{n+1} - \ell_n = 3(a_{n+1} + b_{n+1}) - (a_n + b_n)$$
$$3\ell_{n+1} - \ell_n = 3(a_n + b_n + a_n + 2b_n) - (a_n + b_n)$$
$$3\ell_{n+1} - \ell_n = 5a_n + 8b_n$$

Ainsi $\begin{cases} \ell_{n+2} = 5a_n + 8b_n \\ 3\ell_{n+1} - \ell_n = 5a_n + 8b_n \end{cases} \Rightarrow \ell_{n+2} = 3\ell_{n+1} - \ell_n$.

7)

a) Soient λ et μ des nombres réels. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+2} = \lambda x_1^{n+2} + \mu x_2^{n+2} = \lambda x_1^n x_1^2 + \mu x_2^n x_2^2$$
$$u_{n+2} = \lambda x_1^n(3x_1 - 1) + \mu x_2^n(3x_2 - 1)$$
$$u_{n+2} = 3(\lambda x_1^{n+1} + \mu x_2^{n+1}) - (\lambda x_1^n + \mu x_2^n)$$
$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$$

b) L'énoncé nous incite à chercher ℓ_n sous la forme $\lambda x_1^n + \mu x_2^n$ où λ et μ sont des nombres réels à déterminer et x_1 et x_2 sont des solutions distinctes de $x^2 = 3x - 1$ c'est-à-dire $x^2 - 3x + 1 = 0$.

$$\Delta = 5$$

On peut poser alors $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Comme $M_0 = baba$ et $M_1 = bababbabab$, on a $\begin{cases} \ell_0 = 4 \\ \ell_1 = 10 \end{cases}$ ce qui va nous permettre de déterminer λ et μ :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\lambda + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\mu = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{10 - 4\sqrt{5}}{2} \\ \mu = \dfrac{10 + 4\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$\ell_n = \frac{10 - 4\sqrt{5}}{5} \times \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{10 + 4\sqrt{5}}{5} \times \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Quelques fonctions Python utilisées lors de la conception du sujet

```
def mot(M0, n): # retourne le mot M(n)
    M = M0
    for k in range(n):
        N = ""
        for x in M:
            if x == "a":
                N = N + "ab"
            elif x == "b":
                N = N + "bab"
        M = N
    return M

def motanterieur(M): # Connaissant M(n+1), retourne M(n), vérifie aussi si M(n+1)
est valide
    n = len(M)
    N = ""
    i = 0
    while i < n:
        if M[i] == "a":
            N = N + "a"
            i = i + 2
        elif M[i] == "b":
            N = N + "b"
            i = i + 3
        else:
            return "mot non valide"
    if mot(N,1) == M :
        return N
    else:
        return "mot non valide"
```

Exemples d’interaction :

```
>>> mot("b",3)
'bababbababbabbababbab'
>>> motanterieur("bababbabab")
'baba'
>>> motanterieur("bbaa")
'mot non valide'
```

Corrigé : Exercice 2 -Teneur en or -Voie Générale Individuel

1) $x^2=x+1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0$. On calcule $\Delta=(-1)^2-4(-1)=5>0$

donc deux solutions $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$ .On a alors $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1$.

2)

(a) Comme $AB=l$,l'autre côté a nécessairement comme longueur ϕl ou bien $\frac{l}{\phi}$.
Comme $\phi>1$, $\phi l>l$,la seule possibilité pour que le rectangle soit effectivement inclus dans le carré est que l'autre côté du rectangle ait pour longueur $\frac{l}{\phi}$.
Il n'existe donc qu'un seul rectangle R_1 de ce type de côtés de longueurs l et $\frac{l}{\phi}$.

(b) Ainsi, $T_1=\frac{Aire(R_1)}{Aire(ABCD)}=\frac{l\times\frac{l}{\phi}}{l^2}=\frac{1}{\phi}$ et $T\geq T_1$.

3)

(a) On a $0\leq EF\leq l$ et $EF=\phi EH$. Comme $\phi>0$ alors $0\leq\frac{EF}{\phi}\leq\frac{l}{\phi}$.
Ainsi, $0\leq EH\leq\frac{l}{\phi}$

(b) Pour que le rectangle $EFGH$ soit un rectangle d'or, il faut que $EF=\phi x$ où $x=EH$.

L'aire de chacun de ces rectangles vaut donc $A(x)=\phi x^2$,fonction définie sur l'intervalle [0; $\frac{l}{\phi}$].
La fonction carrée étant croissante sur [0; $+\infty$ [et $\phi>0$,le maximum est atteint pour $x=\frac{l}{\phi}$. Le rectangle recherché a donc pour longueur l et pour largeur $\frac{l}{\phi}$.

(c) On a alors $Aire(R_2)=\phi(\frac{l}{\phi})^2=\frac{l^2}{\phi}$.

(d) $T_2=\frac{Aire(R_2)}{Aire(ABCD)}=\frac{\frac{l^2}{\phi}}{l^2}=\frac{1}{\phi}$.

(e) On peut en conclure que $T_1=T_2$ et que la teneur en or du carré $ABCD$ est $T>\frac{1}{\phi}$.

4) (a) i. $EG^2=(x_G-x_E)^2+(y_G-y_E)^2=((l-x)-x)^2+(l-0)^2=(l-2x)^2+l^2$.

ii. $EFGH$ est un rectangle. On se place dans le triangle EGH rectangle en H .

D'après le théorème de Pythagore, on a : $EG^2=EH^2+HG^2$.

$EH^2=(x_H-x_E)^2+(y_H-y_E)^2=(0-x)^2+(y-0)^2=x^2+y^2$.
$HG^2=(x_H-x_G)^2+(y_H-y_G)^2=(0-(l-x))^2+(y-l)^2=(l-x)^2+(l-y)^2$.

Ainsi, $EG^2=x^2+y^2+(l-x)^2+(l-y)^2$.

(b) D'après (a), on peut écrire,
$(l-2x)^2+l^2=x^2+y^2+(l-x)^2+(l-y)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2l^2-4lx+4x^2=2l^2-2xl-2yl+2x^2+2y^2$

$\Leftrightarrow \quad -2lx+2x^2+2yl-2y^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-y^2-l(x-y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)(x+y-l)=0$

c) Les questions précédentes permettent d'écrire que $EFGH$ rectangle d'or inscrit dans $ABCD$ $\Leftrightarrow$ $(x-y)(x+y-l)=0$

Si $x+y=l$ alors $EFGH$ est un carré (en effet, $EH^2=x^2+y^2$ et $HG^2=(x+y-x)^2+(x+y-y)^2=x^2+y^2$) et n'est donc pas un rectangle d'or.

Intéressons-nous au cas où $y=x$.
Dans ce cas, les côtés du rectangle $EFGH$ sont parallèles aux diagonales du carré.

On a alors : $A(x)=Aire(EFGH)=\sqrt{2}x\times\sqrt{2}(l-x)=2x(l-x)$ avec $x\in[0;l]$.

Mais pour que $EFGH$ soit un rectangle d'or, il faut :

$$l-x=\phi x \qquad \text{ou} \qquad x=\phi(l-x)$$

$$x=\frac{l}{\phi+1} \qquad \text{ou} \qquad x=\frac{l\phi}{\phi+1}$$

$$\begin{aligned} Aire(R_3)&=2\left(\frac{l}{\phi+1}\right)\left(l-\frac{l}{\phi+1}\right)\\ &=2\left(\frac{l}{\phi+1}\right)\left(\frac{l\phi}{\phi+1}\right)\\ &=2\frac{l^2\phi}{(\phi+1)^2}\end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} Aire(R_3)&=2\left(\frac{\phi l}{\phi+1}\right)\left(l-\frac{\phi l}{\phi+1}\right)\\ &=2\left(\frac{l\phi}{\phi+1}\right)\left(\frac{l}{\phi+1}\right)\\ &=2\frac{l^2\phi}{(\phi+1)^2}\end{aligned}$$

Donc, dans les deux cas, $T=\frac{Aire(R_3)}{Aire(ABCD)}=\frac{2\phi}{(\phi+1)^2}=\frac{2\phi}{(\phi^2)^2}=\frac{2}{\phi^3}$ ($\phi^2=\phi+1$)

(d) Calculons $\frac{1}{\phi}-\frac{2}{\phi^3}=\frac{\phi^2-2}{\phi^3}$ donc du signe de ϕ^2-2 car $\phi>0$.
$\phi^2=\phi+1$ donc $\phi^2-2=\phi+1-2=\phi-1>0$ car $\phi>1$.

e) Ainsi $T\geq T_1>T_3$ et on peut conclure que la teneur en or d'un carré est d'au moins $\frac{1}{\phi}$.

Olympiades : les nombres multi-puissances

Correction

Partie A : premiers exemples

1) On a $64 = 2^6 = 4^3$ donc 64 est un nombre multi-puissances.
2)
Il suffit de remarquer $a^4 = (a^2)^2 = b^2$ où $b = a^2$.
Remarque : ainsi il existe une infinité de nombres multi-puissances.
3)
$2^4 = 16$ et $3^4 = 81$ sont des nombres multi-puissances.

Partie B : une condition nécessaire

1)
$$D(9) = \{1, 3, 9\}$$
Il n'y a qu'un seul diviseur positif de 9 autre que 1 et 9, 9 n'est donc pas un nombre multi-puissances, il n'y a qu'une seule manière de l'écrire sous la forme d'une puissance non triviale.
2)
$$D(7) = \{1, 7\}$$
Il n'existe pas de diviseur positif de 7 autre que 1 et 7, 7 ne peut pas s'écrire sous la forme d'une puissance non triviale, 7 n'est pas un nombre multi-puissances.
3)
Soit p un nombre premier. On a $D(p) = \{1, p\}$.
Tout comme la question précédente (7 est un nombre premier …), il n'existe pas de diviseur de p autre que 1 et p, un nombre premier p ne peut donc pas être un nombre multi-puissances.
4)
$$D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$$
S'il existe une manière d'écrire 6 sous la forme d'une puissance non triviale a^n, on a nécessairement $a \in \{2, 3\}$.
6 n'est ni une puissance de 2 ni une puissance de 3.
Ainsi 6 n'est pas un nombre multi-puissances, il n'admet même pas une écriture sous forme de puissance non triviale.
Donc $x = 6$ admet deux diviseurs positifs autres que 1 et x et n'est pas un nombre multi-puissances.

La condition énoncée est nécessaire mais pas suffisante …

Partie C : forme irréductible

1)

a) $64 = 8^2 = 4^3 = 2^6$

b) $8 = 2^3$ donc 8^2 n'est pas une puissance irréductible.
$4 = 2^2$ donc 4^3 n'est pas une puissance irréductible.
On en déduit que 2^6 est la puissance irréductible de 64.

2)
Comme a^n est une puissance non triviale, on a $n \geq 2$.
De plus n n'est pas un nombre premier. Or 2 et 3 sont des nombres premiers. On a donc $n \geq 4$.

3)
$16 = 4^2 = 2^4$ est un nombre multi-puissances.
Soit x un nombre multi-puissances dont on note a^n la forme irréductible.
Comme $n \geq 4$, on a $a^n \geq a^4$
Or la fonction carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ d'où

$$a \geq 2 \Longrightarrow a^2 \geq 4 \Longrightarrow (a^2)^2 \geq 4^2 \Longrightarrow a^4 \geq 16$$

Ainsi on a $\begin{cases} x \geq a^4 \\ a^4 \geq 16 \end{cases} \Longrightarrow x \geq 16.$
Il n'existe donc pas de nombres multi-puissances strictement inférieurs à 16.
<u>Alternative de résolution</u> : démontrer que tous les nombres 2, 3, 4, …, 15 ne sont pas des nombres multi-puissances…

Exercice 2 : 2 roues et une boîte

Dans cet exercice, toutes les longueurs sont exprimées en centimètres.
Le but de l'exercice est de remplir une boîte en y plaçant deux roues de rayons respectifs r et R et de centres respectifs A et B. On suppose dans tout l'exercice que $r \leqslant R$.
Il faut que ces roues remplissent entièrement la boîte afin d'éviter les mouvements lors du transport. On ne tient pas compte de l'épaisseur des roues.
On note L la largeur de la boîte.
On note C le point d'intersection de la roue de rayon R avec le fond de la boîte et O le point de la demi-droite $[BC)$ tel que le triangle ABO soit rectangle en O.

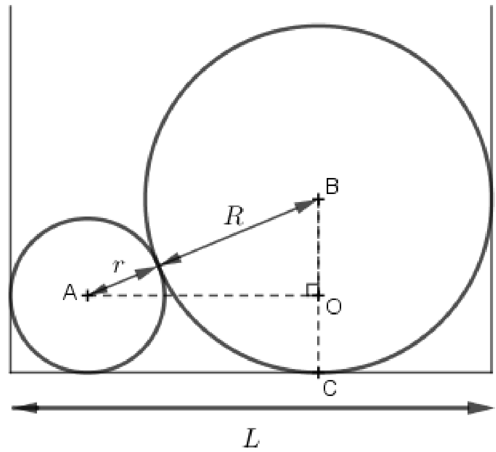


Schéma illustrant la situation

1. Dans cette question, les deux roues ont pour rayons respectifs $r = 4$ cm et $R = 9$ cm.
   (a) Justifier que OB = 5 cm.
   $OB = BC - OC = R - r = 9\text{cm} - 4\text{cm} = 5\text{cm}$
   (b) Calculer la longueur AO.
   Le triangle ABO est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore :
   $AB^2 = AO^2 + OB^2$
   $13^2 = AO^2 + 5^2$
   $AO^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$
   AO étant une longueur, on en déduit que $AO = \sqrt{144} = 12\text{cm}$.
   (c) En déduire la largeur L de la boîte.
   $L = r + AO + R = 4\text{cm} + 12\text{cm} + 9\text{cm} = 25\text{cm}$
2. Deux roues de rayons respectifs 3 cm et 10 cm remplissent-elles entièrement une boîte de largeur 25 cm ? Justifier.
   Si $r = 3$ cm et $R = 10$ cm :
   - $OB = BC - OC = R - r = 10\text{cm} - 3\text{cm} = 7\text{cm}$
   - $AO = \sqrt{13^2 - 7^2} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}\text{cm}$
   - $L = r + AO + R = 3\text{cm} + 2\sqrt{30}\text{cm} + 10\text{cm} \simeq 23,95\text{cm}$

   Par conséquent, deux roues de rayons respectifs 3 cm et 10 cm ne remplissent pas entièrement une boîte de largeur 25 cm.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le cas général où les deux roues ont pour rayons respectifs r et R.

3. Démontrer que $L = r + 2\sqrt{rR} + R$.
   L'utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle ABO rectangle en O permet d'écrire $OA^2 = AB^2 - BO^2 = (r + R)^2 - (R - r)^2 = r^2 + 2rR + R^2 - R^2 + 2rR - r^2 = 4rR$ d'où $OA = 2\sqrt{rR}$. Finalement, on en déduit :
   $$L = r + AO + R = r + 2\sqrt{rR} + R$$
4. Dans cette question, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $r = a^2$ et $R = b^2$.

(a) Démontrer que $L = (a+b)^2$.

$$L = r + 2\sqrt{rR} + R = a^2 + 2\sqrt{a^2b^2} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

(b) Dans cette question, on suppose que $L = 25$ cm.

i. Déterminer tous les couples $(a;b)$ vérifiant $L = (a+b)^2$.
Comme $25 = 5^2$, on en déduit que nécessairement $a + b = 5$. Comme a et b sont deux nombres entiers naturels non nuls avec $a < b$, les deux couples possibles sont $(1;4)$ et $(2;3)$.

ii. En déduire tous les rayons possibles des roues qui remplissent entièrement la boîte.

- Si $a = 1$ et $b = 4$ alors $r = 1$ cm et $R = 16$ cm. Dans ce cas, la grande roue a un diamètre de 32 cm et elle ne peut pas être contenue dans la boîte de largeur 25 cm.
- Si $a = 2$ et $b = 3$ alors $r = 4$ cm et $R = 9$ cm. Dans ce cas, on se trouve dans la situation de la question 1 et les deux roues remplissent entièrement la boîte.

On en déduit que seules les roues de rayons respectifs 4 cm et 9 cm remplissent entièrement la boîte.

(c) Déterminer tous les rayons possibles des roues qui remplissent entièrement une boîte de largeur $L = 64$ cm.
Comme $64 = 8^2$, on en déduit que nécessairement $a + b = 8$. Comme a et b sont deux nombres entiers naturels non nuls avec $a < b$, les couples possibles sont $(1;7)$; $(2;6)$; $(3;5)$ et $(4;4)$.

- Si $a = 1$ et $b = 7$ alors $r = 1$ cm et $R = 49$ cm. Dans ce cas, la grande roue a un diamètre de 98 cm et elle ne peut pas être contenue dans la boîte de largeur 64 cm.
- Si $a = 2$ et $b = 6$ alors $r = 4$ cm et $R = 36$ cm. Dans ce cas, la grande roue a un diamètre de 72 cm et elle ne peut pas être contenue dans la boîte de largeur 64 cm.
- Si $a = 3$ et $b = 5$ alors $r = 9$ cm et $R = 25$ cm. Dans ce cas, les roues ont respectivement pour diamètres 18 cm et 50 cm : elles remplissent entièrement la boîte.
- Si $a = 4$ et $b = 4$ alors $r = 16$ cm et $R = 16$ cm. Dans ce cas, les roues ont respectivement pour diamètre 32 cm : elles remplissent entièrement la boîte.

On en déduit que les roues qui remplissent la boîte ont pour rayons respectifs 9 cm et 25 cm, ou 16 cm et 16 cm.

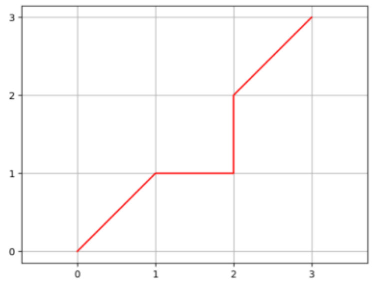
CORRECTION PAR ÉQUIPES

2021

Olympiades : les nombres de Delannoy

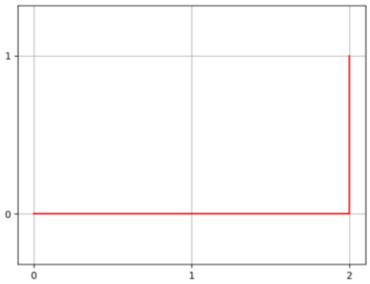
Correction

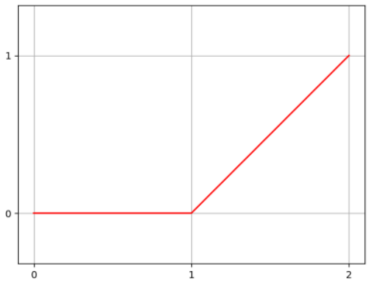
1)

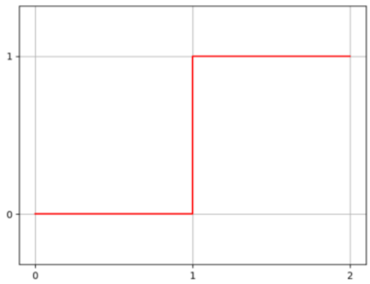


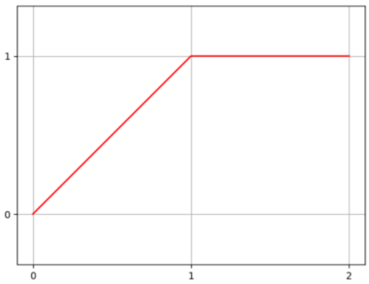
Les coordonnées du point d’arrivée sont $(3; 3)$.

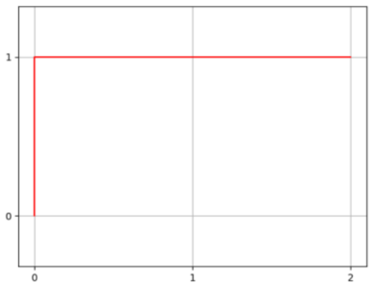
2)











Il y a donc 5 chemins de Delannoy admettant comme point d’arrivée le point de coordonnées $(2; 1)$.

3)

a) Pour obtenir un chemin de Delannoy admettant comme point d’arrivée de coordonnées $(m, 0)$, il ne faut que se déplacer horizontalement, le seul chemin possible est composé des m translations associées au nombre 0.
On en déduit $D(m, 0) = 1$.

b) Si on considère un chemin de Delannoy qui admet le point d’arrivée de coordonnées $(n; m)$, alors il suffit d’intervertir les translations codées par 0 et 2 pour obtenir un chemin de Delannoy admettant le point d’arrivée de coordonnées $(m, ; n)$. On peut appliquer la même procédure pour transformer un chemin de Delannoy admettant le point d’arrivée de coordonnées $(m; n)$ en un chemin qui admet le point d’arrivée de coordonnées $(n; m)$.
On a donc $D(m, n) = D(n, m)$.

c) On considère un chemin reliant l’origine au point de coordonnées $(1010; 1)$.
Un tel chemin nécessite :

- soit une seule translation de vecteur de coordonnées $\binom{0}{1}$ et 1010 translations de vecteurs de coordonnées $\binom{1}{0}$, il existe 1011 tels chemins suivant la position du nombre 2 dans les listes représentant ces chemins : $(2, 0, 0, \dots ,0)$, $(0, 2, 0, 0, \dots , 0)$, …, $(0, 0, \dots , 0, 2)$;
- soit une seule translation de vecteur de coordonnées $\binom{1}{1}$ et 1009 translations de vecteurs de coordonnées $\binom{1}{0}$, il existe 1010 tels chemins suivant la position du nombre 1 dans les listes représentant ces chemins : $(1, 0, 0, \dots , 0)$, $(0, 1, 0, 0, \dots , 0)$, …, $(0, 0, \dots , 0, 1)$.

On a donc $D(1010,1) = 1011 + 1010 = 2021$.

4)

a)

(Analyse)

On suppose qu'il existe un chemin de Delannoy admettant le point $M(1;1)$ comme point d'arrivé représenté par la liste $(a_1, \ldots, a_p)$, on raisonne par disjonction des cas en considérant les trois valeurs que peut avoir a_1 :

- Soit $a_1 = 0$, alors pour atteindre A, on a nécessairement $a_2 = 2$ et $p = 2$. On obtient la liste $(0,2)$.
- Soit $a_1 = 1$, alors pour atteindre A, on a nécessairement $p = 1$ (on est déjà arrivé !). On obtient la liste (1).
- Soit $a_1 = 2$, alors pour atteindre A, on a nécessairement $a_2 = 0$ et $p = 2$. On obtient la liste $(2,0)$.

(Synthèse)

Les trois chemins représentés par les listes $(0,2)$, (1) et $(2,0)$ admettent bien le point $M(1;1)$ comme point d'arrivée.

(Conclusion)

$$D(1,1) = 3$$

b)

Soit un chemin de Delannoy $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ admettant le point d'arrivée de coordonnées $(m;n)$. On raisonne par disjonction des cas en considérant les trois valeurs possibles de a_p :

- Soit $a_p = 0$, dans ce cas là le chemin $(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$ est un chemin de Delannoy qui admet le point de coordonnées $(m-1;n)$ comme point d'arrivé, il en existe donc $D(m-1,n)$;
- Soit $a_p = 1$, dans ce cas là le chemin $(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$ est un chemin de Delannoy qui admet le point de coordonnées $(m-1;n-1)$ comme point d'arrivé, il en existe donc $D(m-1,n-1)$;
- Soit $a_p = 2$, dans ce cas là le chemin $(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$ est un chemin de Delannoy qui admet le point de coordonnées $(m;n-1)$ comme point d'arrivé, il en existe donc $D(m,n-1)$.

On en déduit finalement la relation :

$$D(m,n) = D(m-1,n) + D(m-1,n-1) + D(m,n-1)$$

c)

m\n	0	1	2	3	4
0	1	1	**1**	**1**	**1**
1	1	3	**5**	**7**	**9**
2	**1**	**5**	**13**	**25**	**41**
3	**1**	**7**	**25**	**63**	**129**
4	**1**	**9**	**41**	**129**	**321**

5)

a) On a $N = 3\left(a_2 + a_3 \times 3 + \cdots + a_p \times 3^{p-2}\right) + a_1$ où $0 \leq a_1 < 3$.

On en déduit que le reste dans la division euclidienne de N par 3 est a_1.

b) Le quotient q dans la division euclidienne de N par 3 est :

$$q = a_2 + a_3 \times 3 + \cdots + a_p \times 3^{p-2}$$

$q = 3\left(a_3 + \cdots + a_p \times 3^{p-3}\right) + a_2$ où $0 \leq a_2 < 3$

Le reste dans la division euclidienne de q par 3 est a_2.

6) $N = 2 + 0 \times 3 + 2 \times 3^2 + 1 \times 3^3$

Au chemin $(2, 0, 2, 1)$, on associe le nombre $N = 47$.

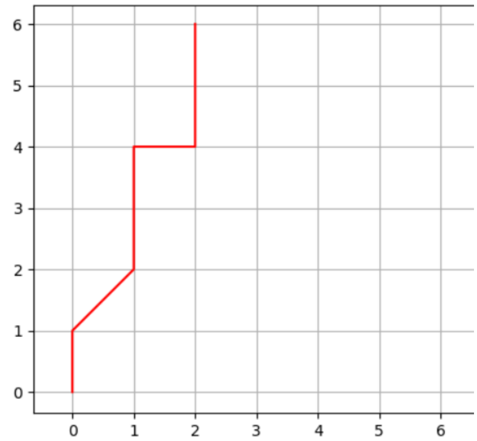
7)

a) On applique le procédé présenté à la question 5 que l'on réitère afin d'obtenir de proche en proche a_1, a_2, a_3, …

```
2021 = 3 * 673 + 2
673 = 3 * 224 + 1
224 = 3 * 74 + 2
74 = 3 * 24 + 2
24 = 3 * 8 + 0
8 = 3 * 2 + 2
2 = 3 * 0 + 2
```

Le chemin qui est donc associé à 2021 est $(2, 1, 2, 2, 0, 2, 2)$

b)



On en déduit que ce chemin de Delannoy admet comme point d'arrivée le point de coordonnées $(2; 6)$.

c)

On étend le tableau proposé à la question 4.c) :

m\n	0	1	2
0	1	1	**1**
1	1	3	**5**
2	**1**	**5**	**13**
3	**1**	**7**	**25**
4	**1**	**9**	**41**
5	**1**	**11**	**61**
6	**1**	**13**	**85**

On en déduit finalement $D(2,6) = 85$.

Ainsi on a 85 chemins de Delannoy admettant A comme point d'arrivée.

Complément (l'exercice résolu en langage Python)

```
from matplotlib.pyplot import *

def trace_chemin(L): # trace un chemin de Delannoy à partir de la liste L donnée
en chaîne de caractères
    x = 0
    y = 0
    Lx = [0]
    Ly = [0]
    for t in L:
        if t == "0":
            x = x + 1
        elif t == "1":
            x = x + 1
            y = y + 1
        elif t == "2":
            y = y + 1
        else:
            return False
        Lx.append(x)
        Ly.append(y)
    plot(Lx,Ly,"r-")
    grid()
    xticks(list(range(0, max(x,y)+1)))
    yticks(list(range(0, max(x,y)+1)))
    xlim([-0.5, max(x,y) + 0.5])
    ylim([-0.5, max(x,y) + 0.5])
    axis('equal')
    show()

# exemple : trace_chemin("0021")
```

```python
def arrivee(L): # à partir d'un chemin renvoie les coordonnées du point d'arrivée
    x = 0
    y = 0
    for t in L:
        if t == "0":
            x = x + 1
        elif t == "1":
            x = x + 1
            y = y + 1
        elif t == "2":
            y = y + 1
        else:
            return False
    return x, y

# exemple : arrivee("0021")

def D(m, n): # calcule D(m, n)
    L = [[1]*(n+1) for i in range(m+1)]
    for i in range(1,m+1):
        for j in range(1, n+1):
            L[i][j] = L[i-1][j]+L[i-1][j-1]+L[i][j-1]
    return L[m][n]

# exemple : D(2, 6)

def calcul():
    D = [[1]*5 for i in range(5)]
    for m in range(1,5):
        for n in range(1, 5):
            D[m][n] = D[m-1][n] + D[m-1][n-1] + D[m][n-1]
    return D

def nombre(L): # à partir d'un chemin, calcule le nombre associé N
    N = 0
    i = 1
    for t in L:
        N = N + i * int(t)
        i = i * 3
    return N

# exemple : nombre("0021")

def chemin(N): # à partir d'un nombre, renvoie le chemin associé
    L = ""
    while N>0:
        L += str(N%3)
        N = N // 3
    return L

# exemple : chemin(2021)
```

Exemples d'interaction :

```
>>> arrivee("0021")
(3, 2)
>>> D(2,6)
85
>>> nombre("2021")
47
>>> chemin(2021)
'2122022'
```

Exercice 2 : 2021 en équations

1. Déterminer les deux nombres entiers naturels u et v autres que 1 et 2021 tels que $u \times v = 2021$ et $u < v$.

   La décomposition en produit de facteurs premiers de 2021 est $2021 = 43 \times 47$.
   Ainsi, $u = 43$ et $v = 47$.

2. Déterminer tous les nombres entiers positifs a tels que $a^2 + 2021$ soit le carré d'un entier positif.

   Si a^2+2021 est le carré d'un entier positif, alors il existe un entier naturel b tel que $a^2+2021 = b^2$. Par conséquent, $2021 = b^2-a^2 = (b-a)(b+a)$. On en déduit que $b-a$ et $b+a$ sont deux diviseurs de 2021. D'après la question précédente, on distingue deux cas :

   - Cas 1 : $b - a = 43$ et $b + a = 47$
     On trouve $a = 2$ et $b = 45$. On a bien $a^2 + 2021 = 2^2 + 2021 = 2025 = 45^2 = b^2$.
   - Cas 2 : $b - a = 1$ et $b + a = 2021$
     On trouve $a = 1010$ et $b = 1011$. On a bien $a^2+2021 = 1010^2+2021 = 1022121 = 1011^2 = b^2$.

   Ainsi, il existe deux entiers positifs a tels que a^2+2021 soit le carré d'un entier positif : 2 et 1010.

3. Le but de cette question est de chercher, s'ils existent, des entiers naturels a tels que $a^3 + 2021$ soit le cube d'un entier positif. Cela revient à déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a; b)$ tels que $a^3 + 2021 = b^3$.

   (a) Pour tous nombres entiers naturels a et b, démontrer que $b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$.

   Pour tous nombres entiers naturels a et b :

   $$(b-a)(b^2+ab+a^2) = b^3+ab^2+a^2b-ab^2-a^2b-a^3 = b^3-a^3$$

   (b) On pose $b - a = u$ et $b^2 + ab + a^2 = v$ où u et v sont les entiers trouvés à la question 1. Montrer que $3a^2 + 129a + 1802 = 0$.

   En posant $b - a = 43$ et $b^2 + ab + a^2 = 47$, on a alors :

   - $b = a + 43$
   - $b^2 + ab + a^2 = (a + 43)^2 + a(a + 43) + a^2 = a^2 + 86a + 1849 + a^2 + 43a + a^2 = 3a^2 + 129a + 1849 = 47 \Leftrightarrow 3a^2 + 129a + 1802 = 0$

   (c) On pose $b - a = 1$ et $b^2 + ab + a^2 = 2021$. Montrer que a vérifie une équation du second degré que l'on précisera.

   Si a^3+2021 est le cube d'un entier positif, alors il existe un entier naturel b tel que $a^3+2021 = b^3$. Par conséquent, $2021 = b^3-a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$. On en déduit que $b-a$ et b^2+ab+a^2 sont deux diviseurs de 2021. En posant $b - a = 1$ et $b^2 + ab + a^2 = 2021$, on a alors :

   - $b = a + 1$
   - $b^2+ab+a^2 = (a+1)^2+a(a+1)+a^2 = a^2+2a+1+a^2+a+a^2 = 3a^2+3a+1 = 2021$

   (d) Grâce aux relations obtenues aux questions 3(b) et 3(c), existe-t-il des entiers naturels a tels que $a^3 + 2021$ soit le cube d'un entier positif ?

   Les solutions des deux équations du second degré $3a^2+129a+1802 = 0$ et $3a^2+3a+1 = 2021$ ne sont pas des nombres entiers. Par conséquent, il n'existe pas d'entier naturel a tel que $a^3 + 2021$ soit le cube d'un entier positif.

4. Le but de cette question est de chercher les entiers naturels a tels que $a^4 + 2021$ soit la puissance quatrième d'un entier positif. En utilisant le résultat de la question 2, déterminer, s'ils existent, les entiers naturels a qui vérifient cette condition.

   Si $a^4 + 2021$ est la quatrième puissance d'un entier positif, alors il existe un entier naturel b tel que $a^4 + 2021 = b^4$. Par conséquent, $2021 = b^4 - a^4 = (b^2 - a^2)(b^2 + a^2) = (B - A)(B + A)$ avec $B = b^2$ et $A = a^2$.

   D'après la question 2, on en déduit que $A = 2$ ou $A = 1010$. Comme 2 et 1010 ne sont pas des carrés parfaits, on en déduit qu'il n'existe pas d'entier naturel a tels que $a^4 + 2021$ soit la quatrième puissance d'un entier positif.

Exercice 1 : Ne pas déranger

Dans cet exercice, on appelle mot une succession de lettres n'ayant pas nécessairement de signification.

Une *anagramme* est un mot obtenu en modifiant l'ordre des lettres d'un autre mot.

Par exemple, les mots HALTES et SETLHA sont deux anagrammes du mot THALES.

Un *dérangement* est une anagramme d'un mot telle qu'aucune de ses lettres ne soit à la même position que dans le mot initial.

Par exemple, HALTES n'est pas un dérangement du mot THALES mais HTLASE est un dérangement du mot THALES.

Le but de l'exercice est de dénombrer des anagrammes et des dérangements à partir d'un mot donné.

Par exemple, à partir du mot LIE, on compte 6 anagrammes (LIE, LEI, ELI, EIL, IEL, ILE) et 2 dérangements (IEL et ELI).

Toute trace de recherche sera valorisée.

Partie 1

Dans cette partie, on forme des mots en utilisant les lettres du mot ABEL.

1. Combien de mots de 3 lettres, avec éventuellement des répétitions, peut-on former ?
   On peut former $4^3 = 64$ mots de trois lettres différents en utilisant les lettres du mot ABEL, avec éventuellement des répétitions.
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ABEL ?
   On peut former $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagrammes du mot ABEL.
   Liste des anagrammes : ABEL, BELA, ELAB, LABE, AELB, ALBE, BLAE, BAEL, EABL, EBLA, LBEA, LEAB, ABLE, BEAL, ELBA, LAEB, AEBL, ALEB, BLEA, BALE, EALB, EBAL, LBAE, LEBA.
3. Quel est le nombre de dérangements du mot ABEL ?
   Les dérangements du mot ABEL sont BELA, ELAB, LABE, BLAE, LEAB, ELBA, BALE, EALB, LEBA. Il y en a 9.

Partie 2

Dans cette partie, on forme des mots en utilisant les lettres du mot GAUSS.

1. Combien de mots de 4 lettres, avec éventuellement des répétitions, peut-on former ?
   On peut former $4^4 = 128$ mots de quatre lettres différents en utilisant les lettres du mot GAUSS, avec éventuellement des répétitions.
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot GAUSS ?
   On peut former $\dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 60$ anagrammes du mot GAUSS.

   Liste des anagrammes : GAUSS, AUSSG, USSGA, SSGAU, SGAUS, GUSSA, GSSAU, GSAUS, ASSGU, ASGUS, AGUSS, USGAS, UGASS, UASSG, SAUSG, SUSGA, GASSU, GASUS, AUSGS, AUGSS, USASG, SSAUG, SSUGA, SGUSA, SGSAU, GUSAS, GUASS, GSUSA, ASUSG, AGSSU, AGSUS, UGSSA, UGSAS, UASGS, UAGSS, SASGU, SAGUS, SUGAS, SUASG, USSAG, SSGUA, SGASU, GSSUA, GSASU, ASSUG, ASGSU, USGSA, SAUGS, SUSAG, USAGS, SSAGU, SSUAG, SGUAS, SGSUA, GSUAS, ASUGS, SASUG, SAGSU, SUGSA, SUAGS.

3. Quel est le nombre de dérangements du mot GAUSS ?
   Les dérangements du mot GAUSS sont USSGA, SSGAU, ASSGU, SUSGA, SSAUG, SGSAU, USSAG, SSGUA, ASSUG, SUSAG, SSAGU, SGSUA. Il y en a 12.

Partie 3

1. Quel est le nombre de dérangements du mot PAPPUS ?
   Les dérangements du mot PAPPUS sont APUSPP, SPUAPP, UPSAPP, SPAUPP, UPASPP, APSUPP. Il y en a 6.
2. Quel est le nombre de dérangements du mot THALES ?
   On peut former $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$ anagrammes du mot THALES.
   Parmi ces anagrammes :
   - 1 a ses six lettres à la même position que le mot THALES.
   - 0 ont cinq de leurs lettres à la même position que dans le mot THALES.
   - $\dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} \times 1 = 15$ ont quatre de leurs lettres à la même position que dans le mot THALES : HTALES, SHALET, TAHLES, TSALEH, AHTLES, LHATES, THLAES, THSLEA, TLAHES, THALSE, EHALTS, TEALHS, THAELS, THASEL, THELAS.
   - $\dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 2 = 40$ ont trois de leurs lettres à la même position que dans le mot THALES : ATHLES, EHALST, HATLES, STALEH, TLHAES, TEALSH, HSALET, LHTAES, THAESL, THASLE, TALHES, TSHLEA, AHLTES, EHATLS, THEALS, THELSA, TASLEH, TEAHLS, HLATES, AHSLET, LTAHES, SHTLEA, LHAETS, SHALTE, THLEAS, THSAEL, TLAEHS, TSALHE, HEALTS, ETALHS, LHASET, SHATEL, THLSEA, THSLAE, TAELHS, TLASEH, TEHLAS, TSAHEL, AHELTS, EHTLAS.
   - $\dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 9 = 135$ ont deux de leurs lettres à la même position que dans le mot THALES.
   - $6 \times 44 = 264$ ont une de leurs lettres à la même position que dans le mot THALES.
     On en déduit qu'il y a $720 - 1 - 0 - 15 - 40 - 135 - 264 = 265$ dérangements du mot Thalès.

Correction de l'exercice académique n°2 VT équipe

La rumeur

Soit n un entier naturel non nul. Une rumeur circule entre n propagateurs de cette rumeur. Chaque propagateur ne connaît au départ qu'une partie de cette rumeur et aucun d'entre eux ne connaît la même partie qu'un autre propagateur. En rassemblant les n parties de la rumeur, on reconstitue la rumeur en entier.

Ces propagateurs s'appellent au téléphone entre eux et se disent, à cette occasion, tout ce qu'ils savent. Un appel n'est possible qu'entre deux propagateurs.

Afin de justifier les résultats, on pourra noter P_1, P_2, … P_n les propagateurs et, par exemple, $P_1 \leftrightarrow P_2$ un appel entre les propagateurs P_1 et P_2. A l'issue de cet appel, P_2 reçoit toute l'information de P_1 qui s'ajoute à sa propre information, et réciproquement pour P_1.

On prendra soin de préciser l'ordre dans lequel sont effectués les appels successifs entre deux propagateurs.

1) Déterminer le nombre minimum d'appels nécessaires afin que les n propagateurs connaissent entièrement la rumeur lorsque :
   a. $n = 2$:

      Il est évident que le nombre minimum d'appels entre 2 personnes est de 1.

   b. $n = 3$:

      Il est évident qu'il faut au moins 3 appels. Démontrons que 3 appels suffisent.

      1er appel : $P_1 \leftrightarrow P_2$

      2ème appel : $P_2 \leftrightarrow P_3$. Les propagateurs P_2 et P_3 connaissent alors toute la rumeur

      3ème appel : $P_3 \leftrightarrow P_1$ ou $P_2 \leftrightarrow P_1$, ainsi le propagateur P_1 connaît toute la rumeur.

2) Justifier que 4 appels suffisent entre 4 propagateurs pour que chacun connaisse entièrement la rumeur.

   Premiers appels : $P_1 \leftrightarrow P_2$ et $P_3 \leftrightarrow P_4$.

   Puis : $P_2 \leftrightarrow P_3$ et $P_1 \leftrightarrow P_4$.

   Donc 4 appels suffisent entre 4 propagateurs pour que chacun connaisse entièrement la rumeur.

3) Trouver une répartition des appels permettant de prouver que 8 appels suffisent entre 6 propagateurs pour que chacun connaisse entièrement la rumeur.

   Premiers appels : $P_1 \leftrightarrow P_2$ et $P_4 \leftrightarrow P_5$. Ainsi, P_1 et P_2 connaissent les parties 1 et 2, P_4 et P_5 les parties 4 et 5

   Puis : $P_2 \leftrightarrow P_3$ et $P_5 \leftrightarrow P_6$. Ainsi, P_2 et P_3 connaissent les parties 1, 2 et 3, P_6 et P_5 les parties 4, 5 et 6.

   Puis : $P_2 \leftrightarrow P_5$et $P_3 \leftrightarrow P_6$. Ainsi, P_2, P_3, P_5 et P_6 connaissent tout.

   Enfin, par exemple, P_2 dit tout à P_1 et P_3 à P_4.

4) Soit $n > 4$. En imaginant qu'un propagateur appelle $n - 4$ autres propagateurs, démontrer que $2n - 4$ appels suffisent pour que les n propagateurs connaissent toute la rumeur. On pourra se servir du résultat de la question 2).

1 propagateur P appelle $n - 4$ autres propagateurs, cela fait $n - 4$ appels et ce propagateur P connaît alors $n - 3$ « parties » de la rumeur.
D'après le résultat de la question 2), 4 appels suffisent ensuite entre P et les 3 derniers propagateurs pour que ces 4 propagateurs connaissent tout ce que sait P et ce que savent les 3 derniers propagateurs, c'est-à-dire toute la rumeur !
Ensuite, P appelle chacune des $n - 4$ propagateurs du départ pour leur communiquer toute la rumeur.
Au total, il y a eu $n - 4 + 4 + n - 4 = 2n - 4$ appels. Donc $2n - 4$ appels suffisent pour que chacun des n propagateurs connaissent entièrement la rumeur.

5) a. Soit i un entier naturel non nul, $i \leq n$. Combien faut-il au minimum d'appels pour qu'un propagateur connaisse i nouvelles parties de la rumeur ? Combien de parties connaît alors ce propagateur ?

Il faut au moins i appels pour que chacun des i propagateurs connaissant les i nouvelles parties de la rumeur propage la partie qu'il connaît.
Le propagateur connaitra alors $i + 1$ parties de la rumeur (les i nouvelles parties ajoutées à la sienne).

b. On suppose dans cette question qu'un des propagateurs n'effectue qu'un seul appel pour apprendre entièrement la rumeur. Prouver alors que le nombre d'appels nécessaires entre les n propagateurs est supérieur ou égal à $2n - 3$.

Supposons qu'un des propagateurs P connaisse toute la rumeur qu'en un appel. Il est alors nécessaire qu'il y ait eu auparavant au moins $n - 1$ appels (pour avoir les $n - 1$ autres parties de la rumeur). Au dernier appel, P et son interlocuteur connaissent tous les deux entièrement la rumeur.
Il faut ensuite que les $n - 2$ autres propagateurs connaissent entièrement la rumeur, donc il faut au moins $n - 2$ appels. On en déduit qu'il y a eu alors au moins $n - 1 + n - 2 = 2n - 3$ appels.

c. En déduire que lorsque tous les propagateurs connaissent la rumeur en un nombre minimum d'appels, chacun a au moins deux conversations.

Dans la question 4), on a prouvé que $2n - 4$ appels suffisent entre les n propagateurs
et $2n - 4 < 2n - 3$. Si un des propagateurs ne connaît la rumeur qu'en un appel, il y a donc une contradiction. On en déduit que chacun des propagateurs effectue au moins deux appels.