OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE NANTES
2022

SUJET DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

ACADÉMIE DE NANTES
Liberté Égalité Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES DE MATHEMATIQUES 2022

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

L'usage de la calculatrice **avec le mode examen activé** est autorisé.

L'usage de la calculatrice **sans mémoire**, « type collège », est autorisé.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La première partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices nationaux 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices nationaux 1 et 3.

Exercices académiques

Mercredi 9 mars 2022 (10 h 10 – 12 h 10)

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Tournoi de tennis

Alice s'engage dans une compétition de tennis. Cette compétition prend la forme d'un tournoi se déroulant sur trois jours.

Chaque jour, un joueur doit rencontrer au moins un adversaire moins bien classé que lui et un adversaire mieux classé que lui, cette règle ne concerne pas le joueur le mieux classé ni celui le moins bien classé. Les règles de qualification sont précisées chaque journée.

Premier jour du tournoi

Au cours de la première journée, Alice rencontre deux adversaires : l'un classé plus haut qu'elle et l'autre classé plus bas qu'elle. Elle joue deux matchs avec eux.

Si elle gagne les deux matchs joués, elle est qualifiée pour le jour suivant. Si elle gagne un seul match des deux joués, elle doit disputer un match de barrage. Si elle perd les deux matchs joués, elle est éliminée du tournoi.

On suppose dans cette partie que la probabilité de gagner contre un joueur classé plus haut est égale à $\frac{1}{3}$ et que la probabilité de gagner contre un joueur classé plus bas est égale à $\frac{2}{3}$.

Dans le cas où Alice affronte un adversaire classé plus haut en premier puis un adversaire classé plus bas en second, on modélise la situation par l'arbre ci-dessous, appelé **schéma HB** (haut-bas) :

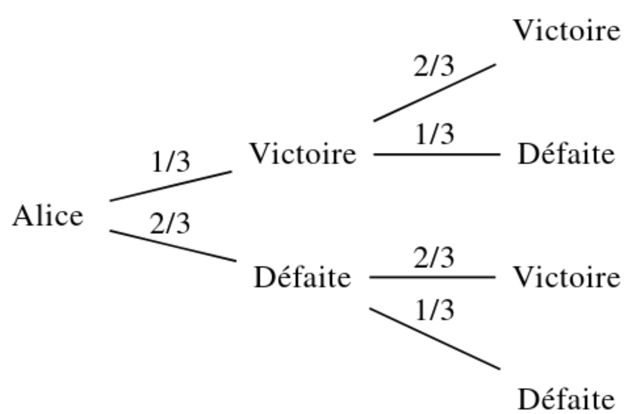

Schéma HB : adversaire classé plus haut puis adversaire classé plus bas

La probabilité de gagner les deux matchs joués s'obtient en calculant le produit $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$; ce qui conduit à une probabilité égale à $\frac{2}{9}$. De manière analogue, la probabilité de gagner exactement un match s'obtient en calculant la somme de deux produits : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ (Alice enchaîne une victoire et une défaite, ou bien, une défaite et une victoire) ; ce qui conduit à la probabilité égale à $\frac{5}{9}$.

1. Calculer la probabilité qu'Alice soit éliminée sans même disputer de match de barrage.
2. Représenter l'arbre correspondant au schéma BH et calculer la probabilité pour Alice de se qualifier sans jouer de match de barrage.

Deuxième jour du tournoi

Au cours de cette deuxième journée, Alice rencontre deux adversaires, l'un classé plus haut qu'elle et l'autre classé plus bas qu'elle. Elle joue trois matchs avec eux ; ces matchs peuvent suivre le schéma HBH ou bien le schéma BHB.

Pour être qualifiée au tour suivant, Alice doit gagner deux matchs consécutifs sur les trois matchs joués.

On suppose que la probabilité de gagner contre un joueur classé plus haut est égale à $\frac{1}{3}$ et que la probabilité de gagner contre un joueur classé plus bas est égale à $\frac{2}{3}$.

3. Montrer que la probabilité pour Alice de se qualifier en jouant le schéma HBH est égale à $\frac{10}{27}$.
4. Quelle est la probabilité pour Alice de se qualifier en jouant le schéma BHB ?
5. Le joueur le mieux classé ne pouvant jouer que contre des joueurs classés plus bas que lui, il doit remporter les trois matchs joués pour se qualifier.
   Quelle est la probabilité pour le joueur le mieux classé de se qualifier ?
6. Le joueur le moins bien classé ne pouvant jouer que contre des joueurs classés plus haut que lui, il sera qualifié s'il remporte deux matchs, pas forcément consécutifs, sur les trois joués.
   Quelle est la probabilité pour le joueur le moins bien classé de se qualifier ?

Soit p un réel tel que $p \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$.

On suppose maintenant que la probabilité de gagner contre un joueur classé plus haut est égale à p et que la probabilité de gagner contre un joueur classé plus bas est alors égale à $q = 1 - p$.

7. Montrer que la probabilité pour Alice de se qualifier après un schéma HBH est égale à :
$$(1-p)p(2-p).$$
8. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles il est plus avantageux pour Alice de jouer le schéma HBH plutôt que le schéma BHB pour se qualifier.
9. Déterminer la valeur de p pour laquelle le joueur le mieux classé a la même probabilité de se qualifier que celle d'Alice de se qualifier avec le schéma BHB.
10. Déterminer la valeur de p pour laquelle le joueur le moins bien classé a la même probabilité de se qualifier que celle d'Alice de se qualifier avec le schéma BHB.
    Indication : $p^2 - 3p + 1 = \left(p - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

Troisième jour du tournoi

Le tournoi est presque terminé, les règles de qualification sont identiques à celles du deuxième jour.

Il reste quatre qualifiés :

- Bob qui est le plus haut classé parmi les quatre
- Alice qui a le deuxième classement parmi les quatre
- Carl qui a le troisième classement parmi les quatre
- Diane qui est classée la plus bas parmi les quatre.

11. Lister toutes les compositions envisageables pour les trois matchs que doit jouer Alice (on distinguera les schémas HBH et BHB).
12. Pour chacune des compositions envisagées, est-il possible qu'un seul joueur se qualifie ?
13. Est-il possible que trois joueurs se qualifient ?

Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Machines à sous

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
On considère une machine à sous comportant trois rouleaux disposés côte à côte ; chacun des rouleaux comporte n symboles distincts numérotés de 1 à n. Lorsque l'on active la machine à sous, chacun des trois rouleaux tourne puis s'arrête sur un symbole.

- On appelle **combinaison** une liste dont les composantes sont les trois numéros des symboles obtenus après activation de la machine à sous. On obtient par exemple la combinaison $(1 ; 3 ; 2)$ si le premier rouleau affiche le symbole 1, le deuxième rouleau le symbole 3 et le troisième rouleau le symbole 2.
- Si exactement deux symboles sont identiques parmi les trois symboles obtenus, on gagne une somme entière x en euros appelée **petit lot**.
- Si les trois symboles obtenus sont identiques, on gagne une somme entière y en euros, cette somme étant strictement supérieure au petit lot et appelée le **gros lot.**
- Dans les autres situations, on ne gagne rien.

Par exemple, la combinaison $(3 ; 3 ; 1)$ permet d'obtenir le petit lot, tandis que la combinaison $(2 ; 2 ; 2)$ permet d'obtenir le gros lot.
Ainsi x et y sont des entiers vérifiant les deux conditions suivantes : $x \geq 1$ et $y \geq x + 1$.
Enfin, on note $G(x ; y)$ la moyenne des gains obtenus en euros après que toutes les combinaisons possibles sont apparues exactement une fois.

Pour les questions 1. à 7., le nombre de symboles par rouleau est $n = 10$.

1. Quel est le nombre total de combinaisons ?
2. Dresser la liste des combinaisons permettant de remporter le gros lot.
3. Donner trois combinaisons réalisant le petit lot avec deux symboles 3 et un symbole 5, puis déterminer le nombre de combinaisons permettant d'obtenir le petit lot.
4. Montrer que $G(x ; y) = \frac{27x+y}{100}$.

Dans l'exercice, on imagine qu'il faille insérer une pièce de 1 € dans la machine à sous pour pouvoir jouer.
*Dire que le couple $(x ; y)$ est **équitable** signifie que $G(x ; y) = 1$.*

5. Les couples $(1 ; 50)$ et $(2 ; 46)$ sont-ils équitables? Justifier.
6. Dresser, sans justifier, la liste de tous les couples équitables.
7. Dans un repère orthogonal, placer chaque point dont le couple de coordonnées est un couple équitable. Vérifier que ces points appartiennent à une même droite dont on donnera l'équation réduite.

Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 3 quelconque et on admet que la moyenne des gains obtenus en euros est donnée par la formule : $G(x ; y) = \frac{(3n-3)x+y}{n^2}$.

8. Soit $(x ; y)$ un couple équitable.
   a) Exprimer y en fonction de n et x.
   b) Montrer que $x \leq \frac{n^2-1}{3n-2}$.
   c) Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles le nombre de couples équitables est égal à 2022.

9. *Dans cette question, on suppose que le gros lot vaut le double du petit lot ; on a donc* $y = 2x$.

a) Montrer que si le couple $(x\,;2x)$ est équitable alors $3n - 1$ divise n^2.

b) En remarquant que $1 = 9n^2 - (3n + 1)(3n - 1)$, montrer qu'il n'existe pas de couple $(x\,;2x)$ équitable.

10. *Dans cette question, on suppose que le gros lot vaut* 2022 *euros ; on a donc* $y = 2022$.

a) Existe-t-il une valeur de n pour laquelle le couple $(1\,;2022)$ est équitable ? Même question pour le couple $(2\,;2022)$.

b) Montrer que si le couple $(x\,;2022)$ est équitable alors $n - 1$ divise $n^2 - 2022$ et $n \geq 45$.

c) En déduire les seules valeurs de n pour lesquelles il existe un couple $(x\,;2022)$ équitable et préciser, pour chacune d'elles, la valeur de x correspondante.

11. *Dans cette question, on suppose que le gros lot vaut le carré du petit lot ; on a donc* $y = x^2$.

Déterminer les seules valeurs de n inférieures à 200 pour lesquelles il existe un couple $(x\,;x^2)$ équitable et préciser, pour chacune d'elles, la valeur de x correspondante. Décrire précisément la démarche.

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Nombres polis

Un **nombre poli** est un nombre entier naturel qui peut s'écrire sous la forme d'une somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs non nuls.

Quelques exemples :

- 15 est un nombre trois fois poli. En effet :

$$\begin{aligned} 15 &= 7+8 \\ 15 &= 4+5+6 \\ 15 &= 1+2+3+4+5 \end{aligned}$$

- 2 n'est pas un nombre poli. En effet, la somme d'au moins deux entiers consécutifs non nuls est supérieure ou égale à 3.

1. Montrer que 9 est un nombre deux fois poli.

2. Montrer que tout nombre impair supérieur ou égal à 3 est un nombre poli.

3. Montrer que tout multiple de 3, supérieur ou égal à 3, est un nombre poli.

4. Montrer que 8 n'est pas un nombre poli.

5. Soit k un entier naturel non nul.
Démontrer que pour tout entier naturel a,

$$a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+k)=\frac{(k+1)(k+2a)}{2}.$$

On pourra utiliser le résultat suivant : pour tout entier naturel k non nul, on a : $1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

6. Montrer que tous les nombres de la forme 2^n, avec n entier naturel non nul, ne sont pas des nombres polis.

7. On admet la propriété suivante :

> **Propriété :**
> *Le nombre d'écritures en somme d'entiers consécutifs d'un entier naturel n est égal au nombre de ses diviseurs impairs différents de 1.*

Vérifier la propriété pour $n=10$ et $n=15$.

8. Quel est le plus grand entier naturel inférieur à 2022 qui n'est pas un nombre poli ?

9. Déterminer toutes les écritures de 2022 comme somme d'entiers consécutifs.

10. Parmi les entiers naturels inférieurs à 2022, lesquels sont les plus polis ?