OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE NANTES 2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

CORRECTION OLYMPIADES

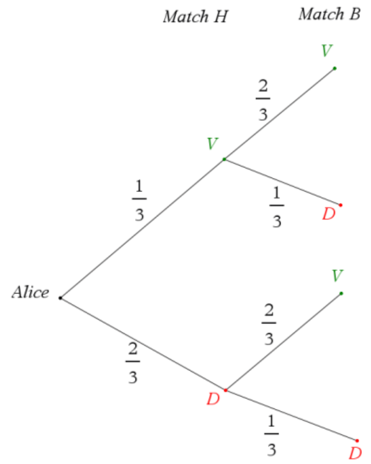
EXERCICES ACADÉMIQUES

NANTES 2022

Exercice 1 : Tournoi de tennis

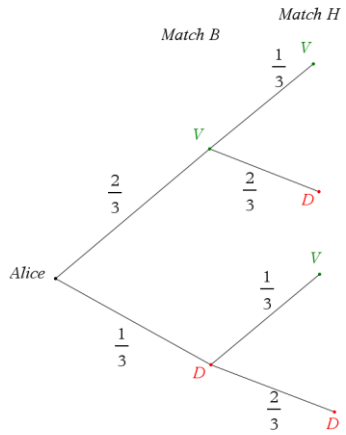
Premier jour du tournoi

NB. Notons que, selon les hypothèses de l'énoncé, le résultat d'un match n'influe pas sur le résultat du match suivant. Les évènements « Alice gagne son premier match » et « Alice gagne son deuxième match » sont indépendants. C'est pourquoi nous pouvons nous aider de l'arbre de probabilité et calculer la probabilité d'un déroulement du tournoi (une branche de l'arbre) en multipliant les probabilités rencontrées sur le chemin, comme le précise l'énoncé.



1. Schéma HB. Alice est éliminée sans même disputer de match de barrage si ses deux matchs se soldent par deux défaites consécutives. La probabilité qu'il en soit ainsi est, en se référant à l'arbre de probabilité : $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

La probabilité qu'Alice soit éliminée sans même jouer de match de barrage est égale à $\frac{2}{9}$.



2. Schéma BH. L'arbre correspondant au schéma BH peut s'obtenir à partir de l'arbre de probabilité précédent en échangeant les rôles des probabilités « $\frac{1}{3}$ » et « $\frac{2}{3}$ ». »

Alice est qualifiée sans même disputer de match de barrage si ses deux matchs se soldent par deux victoires consécutives. L'interversion des rôles fait que la probabilité à calculer est égale à celle de la première question.

La probabilité qu'Alice soit qualifiée sans jouer de match de barrage est égale à $\frac{2}{9}$.

Deuxième jour du tournoi

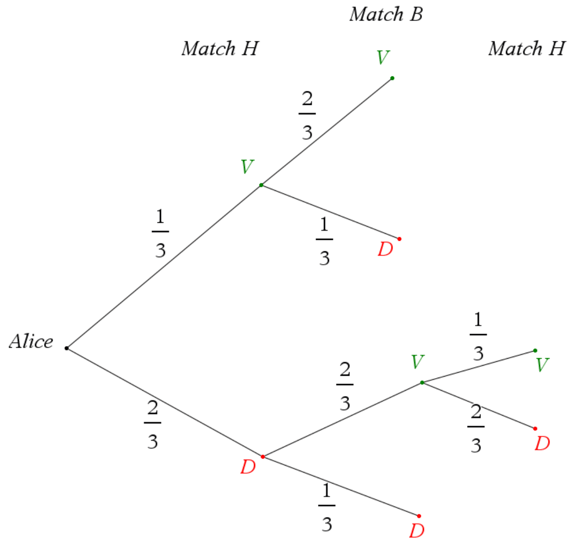
NB. Ce deuxième jour, le deuxième match joué est capital. Si un joueur autre que le moins bien classé perd son deuxième match, alors il est éliminé car il ne peut pas enchaîner deux victoires consécutives.
En particulier, Alice est qualifiée si et seulement si elle gagne ses deux premiers matchs (séquence VV?) ou bien si elle perd le premier match et gagne les deux suivants (séquence DVV).

3. Schéma HBH. Complétons l'arbre de probabilité utilisé dans la question précédente en tenant compte du troisième match seulement lorsque cela est utile.

- La probabilité qu'Alice gagne ses deux premiers matchs est : $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.
- La probabilité qu'elle perde son premier match et gagne les deux autres est : $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

La probabilité qu'Alice soit qualifiée est :

$$\left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \frac{10}{27}.$$

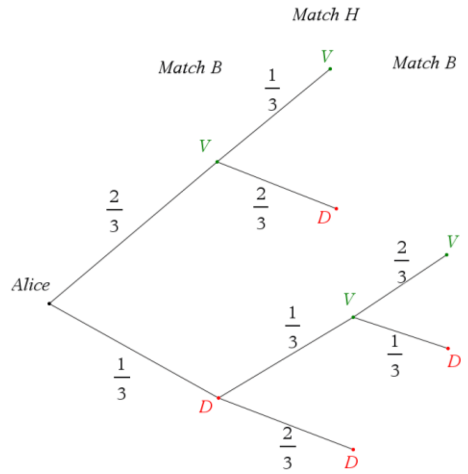


4. Schéma BHB. Procédons de la même façon.

- La probabilité qu'elle gagne ses deux premiers matchs est : $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.
- La probabilité qu'elle perde son premier match et gagne les deux autres est : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$

La probabilité qu'Alice soit qualifiée est :

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{27} = \frac{8}{27}.$$



Ce schéma est moins avantageux.

5. Le joueur le mieux classé doit gagner ses trois matchs pour se qualifier.

La probabilité que le joueur le mieux classé se qualifie est $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.

On remarque que cette probabilité est égale à celle trouvée dans le schéma BHB de la question précédente (résultat que nous devrions retrouver dans la résolution de la **question 9**).

6. Pour le joueur le moins bien classé, le deuxième jour s'assimile à la répétition de 3 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dans lesquelles la probabilité de « Succès » est égale à $\frac{1}{3}$. Le nombre X de matchs gagnés par ce joueur suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3\,;\,\frac{1}{3}\right)$. Il est qualifié si et seulement si $X = 2$ ou bien $X = 3$.

En vertu de ce qu'on sait de la loi binomiale : $P(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ et $P(X = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

La probabilité que le joueur le moins bien classé soit qualifié est :

$$3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}.$$

7. On reprend sans les redémontrer les formules utilisées dans la **question 3** mais en y remplaçant systématiquement la probabilité $\frac{1}{3}$ par p et la probabilité $\frac{2}{3}$ par $(1-p)$.

La probabilité qu'Alice soit qualifiée avec le schéma HBH est maintenant :

$$\big(p \times (1-p)\big) + \big((1-p) \times (1-p) \times p\big) = p \times (1-p) \times \big(1 + (1-p)\big)$$

.

Nous retrouvons bien que la probabilité qu'Alice soit qualifiée est égale à $p \times (1-p) \times (2-p)$.

8. Faisons de même pour le schéma BHB en reprenant les formules de la **question 4**.

La probabilité qu'Alice soit qualifiée avec le schéma BHB est maintenant :

$$(1-p) \times p + p \times p \times (1-p) = p \times (1-p) \times (1+p)$$

Les probabilités obtenues dans les deux schémas HBH et BHB ne diffèrent que par un facteur.

Il est plus avantageux de jouer le schéma HBH que le schéma BHB si et seulement si : $2 - p > 1 + p$ soit si et seulement si : $1 > 2p$.

Compte tenu que, par hypothèse, $0 < p < \frac{1}{2}$:

Il est TOUJOURS plus avantageux de jouer le schéma HBH que le schéma BHB.

NB. C'était à prévoir. Pour se qualifier, Alice doit de toute façon gagner deux matchs consécutivement, face à un mieux classé et à un moins bien classé, et elle peut se permettre de perdre le premier match. Paradoxalement, elle a intérêt à maximiser sa probabilité de perdre le premier match, donc à le jouer contre Bob.

9. Cherchons dans quel cas le joueur le mieux classé a la même probabilité de se qualifier qu'Alice avec BHB.

La probabilité que ce joueur se qualifie est maintenant égale à $(1-p)^3$.

Il a la même probabilité de se qualifier qu'Alice avec le schéma BHB si et seulement si p est une solution de l'équation $p \times (1-p) \times (1+p) = (1-p)^3$ située dans l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$.

Résolvons cette équation dans cet intervalle.

$$p \times (1-p) \times (1+p) = (1-p)^3 \iff (1-p) \times \left((p+p^2) - (1-2p+p^2)\right) = 0$$

L'équation à résoudre est équivalente à : $1 - 3p = 0$ et a pour unique solution $p = \frac{1}{3}$.

Le joueur le mieux classé a la même probabilité de se qualifier qu'Alice avec le schéma BHB si et seulement si $p = \frac{1}{3}$.

10. Cherchons dans quel cas le joueur le moins bien classé a la même probabilité de se qualifier qu'Alice avec BHB.

La probabilité que ce joueur se qualifie est maintenant : $3 \times p^2 \times (1-p) + p^3 = p^2 \times (3-2p)$.

Il a la même probabilité de se qualifier qu'Alice avec le schéma BHB si et seulement si p est une solution de l'équation $p \times (1-p) \times (1+p) = p^2 \times (3-2p)$ située dans l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$.

Résolvons cette équation dans cet intervalle.

$$p \times (1-p) \times (1+p) = p^2 \times (3-2p) \iff p \times \left((1-p^2) - (3p-2p^2)\right) = 0$$

L'équation à résoudre est équivalente à l'équation : $1 - 3p + p^2 = 0$.

Exploitons l'indication de l'énoncé. Cette équation s'écrit aussi bien : $\left(p - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ soit $p - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

Dans l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$, nous obtenons une et une seule solution :

$$p = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0{,}382 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Le joueur le moins bien classé a la même probabilité de se qualifier qu'Alice avec le schéma BHB lorsque p est égal au nombre $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Troisième jour du tournoi

11. Listons les compositions envisageables.

Alice rencontre nécessairement Bob en tant que seul joueur mieux classé qu'elle. D'autre part, l'énoncé indique que « *Alice rencontre deux adversaires avec lesquels elle joue trois matchs* ». Donc, elle rencontre deux fois un même adversaire. Nous obtenons quatre compositions, deux « HBH » et deux « BHB » :

- Alice contre Bob, puis Alice contre Carl, puis Alice contre Bob.
- Alice contre Bob, puis Alice contre Diane, puis Alice contre Bob.
- Alice contre Carl, puis Alice contre Bob, puis Alice contre Carl.
- Alice contre Diane, puis Alice contre Bob, puis Alice contre Diane.

12. Proposons empiriquement pour chaque composition un déroulement qui nous semble aboutir à un seul qualifié (le lecteur vérifiera) :

Tour 1	Tour 2	Tour 3	Il semble que :
Alice gagne contre Bob Carl gagne contre Diane	Alice gagne contre Carl Bob gagne contre Diane	Alice gagne contre Bob Carl gagne contre Diane	Alice seule qualifiée
Alice gagne contre Bob Carl gagne contre Diane	Alice gagne contre Diane Bob gagne contre Carl	Alice gagne contre Bob Carl gagne contre Diane	Alice seule qualifiée
Alice gagne contre Carl Diane gagne contre Bob	Alice gagne contre Bob Carl gagne contre Diane	Alice gagne contre Carl Bob gagne contre Diane	Alice seule qualifiée
Alice gagne contre Diane Bob gagne contre Carl	Alice gagne contre Bob Diane gagne contre Carl	Alice gagne contre Diane Carl gagne contre Bob	Alice seule qualifiée

13. Proposons empiriquement un déroulement du tournoi dans lequel il y a trois qualifiés.

- Tour 1 : Alice gagne contre Carl ; Diane gagne contre Bob.
- Tour 2 : Alice gagne contre Bob ; Carl gagne contre Diane.
- Tour 3 : Diane gagne contre Alice ; Carl gagne contre Bob.

Bob est éliminé car il perd au moins un match.

Alice gagne deux matchs consécutifs (les 2 premiers) dans un schéma BHB : elle est qualifiée.

Carl gagne deux matchs consécutifs (les 2 derniers) dans un schéma HBH : il est qualifié.

Diane gagne deux matchs : elle est qualifiée.

Exercice 2 : Machines à sous

1. Il y a $10^3 = 1000$ combinaisons.

2. Il y a 10 listes permettant de gagner le gros lot : les listes $(a\,;a\,;a)$ où $a = 1, 2, \dots, 10$.

3. Les trois combinaisons $(3\,;3\,;5), (3\,;5\,;3), (5\,;3\,;3)$ sont les trois seules combinaisons avec 3 doublé et 5 qui permettent de gagner un petit lot.

De façon générale, il existe $10 \times 9 = 90$ façons de choisir deux symboles distincts et ordonnés (l'un pour être doublé l'autre non) et pour chaque choix, trois combinaisons suivant la place du symbole non doublé.

Il y a $90 \times 3 = 270$ combinaisons permettant de gagner un petit lot.

4. Il y a 1000 combinaisons possibles dont 270 permettent de gagner x euros et 10 autres permettent de gagner y euros. En supposant que chaque combinaison apparaisse une fois et une seule, le gain total est égal à $270x + 10y$ et le gain moyen ramené à une partie est égal à $\frac{270x+10y}{1000}$.

Le gain moyen est bien : $G(x\,;\,y) = \frac{27x+y}{100}$, conformément à la prévision de l'énoncé.

5. Un couple $(x\,;y)$ est équitable si et seulement si $G(x\,;y) = 1$.

On vérifie que $G(1\,;\,50) = 0{,}77$ et que $G(2\,;46) = 1$.

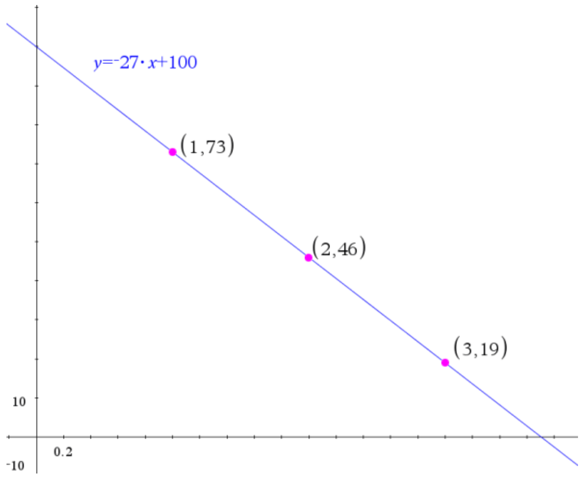
- Le couple $(1\,;50)$ n'est pas équitable (défavorable au joueur puisque le gain moyen est plus petit que 1).
- Le couple $(2\,;46)$ est équitable.

6. Prenons quand même la peine de justifier un minimum.

Un couple $(x\,;y)$ est équitable si et seulement si x et y sont des entiers tels que : $\begin{cases} 27x + y = 100 \\ 1 \leq x < y \end{cases}$. Il y a peu de possibilités pour l'entier x, nous pouvons les énumérer et leur associer l'entier $y = -27x + 100$:

- Si $x = 1$, alors $y = 100 - 27 = 73$. Nous obtenons le couple $(1\,;73)$.
- Si $x = 2$, alors $y = 100 - 54 = 46$. Nous obtenons le couple $(2\,;46)$.
- Si $x = 3$, alors $y = 100 - 81 = 19$. Nous obtenons le couple $(3\,;19)$.

Et c'est tout.



7. Les trois points de coordonnées les couples équitables sont alignés sur la droite d'équation réduite $y = -27x + 100$.

8. Lorsque n est un entier ≥ 3 quelconque, il y a n^3 combinaisons possibles dont n permettent de gagner un gros lot et $3 \times n \times (n-1)$ un petit lot, ce qui justifie la formule : $G(x\,;y) = \frac{3n(n-1)x+ny}{n^3} = \frac{(3n-3)x+y}{n^2}$

8.a. Un couple d'entiers $(x\,;y)$ vérifiant les contraintes $1 \leq x < y$ est équitable si et seulement si

$$G(x\,;y) = \frac{(3n-3)x + y}{n^2} = 1$$

Dans ce cas, et seulement dans ce cas, y s'exprime en fonction de x de la façon suivante :

$$y = -3(n-1)x + n^2.$$

8.b. La condition $y \geq x + 1$ devant être vérifiée, l'expression de *y* en fonction de *x* obtenue implique que : $-3(n-1)x + n^2 \geq x + 1$, c'est-à-dire que : $3(n-1)x + x = (3n-2)x \leq n^2 - 1$.

Du fait que *n* est au moins égal à 3, le nombre $3n - 2$ est strictement positif et cette inégalité équivaut, en divisant chaque membre par le nombre strictement positif $3n - 2$, à l'inégalité :

$$x \leq \frac{n^2 - 1}{3n - 2}$$

8.c. D'après le résultat de la question précédente, l'entier *x* peut prendre toutes les valeurs entières strictement positives jusqu'au plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2-1}{3n-2}$.

Le nombre de couples équitables est donc égal à la partie entière de $\frac{n^2-1}{3n-2}$.

On obtient exactement 2022 couples équitables lorsque l'entier *n* vérifie la double inégalité $2023 > \frac{n^2-1}{3n-2} \geq 2022$, double inégalité qui est équivalente à : $2023(3n-2) > n^2 - 1 \geq 2022(3n-2)$ ou, aussi bien, à : $n^2 - 6066n + 4043 \geq 0 > n^2 - 6069n + 4045$.

Aidons-nous d'un logiciel de calcul formel (en l'occurrence TI-Nspire CAS) pour résoudre cette double inégalité.

$\text{solve}(n^2-6066\cdot n+4043\geq 0,n)$	$n\leq 0.666575$ or $n\geq 6065.33$
$\text{solve}(n^2-6069\cdot n+4045<0,n)$	$0.666575<n<6068.33$

Il en résulte, *n* étant un entier, que : $6066 \leq n \leq 6068$.

Les valeurs de *n* pour lesquelles le nombre de couples équitables est égal à 2022 sont les trois valeurs :

$n = 6066$, $n = 6067$ et $n = 6068$.

Autre méthode

Cherchons à encadrer le nombre $\frac{n^2-1}{3n-2} = \frac{(n-1)(n+1)}{3n-2}$ par des nombres plus simples.

Des inégalités : $3n - 3 < 3n - 2 < 3n + 3$, nous déduisons :

$$\frac{n-1}{3} = \frac{(n-1)(n+1)}{3n+3} < \frac{(n-1)(n+1)}{3n-2} < \frac{(n-1)(n+1)}{3n-3} = \frac{n+1}{3}$$

La partie entière de $\frac{n^2-1}{3n-2}$ se trouve donc, au sens large, entre celle de $\frac{n-1}{3}$ et celle de $\frac{n+1}{3}$, ce qui situe *n*, nécessairement, au sens large entre 6065 et 6069.

Il reste à tester ces valeurs possibles. Le calcul montre que pour 6066, 6067 et 6068, la partie entière de $\frac{n^2-1}{3n-2}$ est bien 2022, alors que pour 6065 elle est égale à 2021 et que pour 6069 elle est égale à 2023.

Nous retenons donc 6066, 6067 et 6068.

9.a. Le couple $(x\,;2x)$ est équitable si et seulement si l'entier x vérifie l'équation $2x = -3(n-1)x + n^2$, soit aussi bien : $(3n-1)x = n^2$. Il existe donc un entier (l'entier x) dont le produit avec $(3n-1)$ est égal à n^2.

Ceci montre que $(3n-1)$ divise n^2.

9.b. Considérons la relation donnée par l'énoncé : $9n^2 - (3n+1)(3n-1) = 1$.

D'après la **question 9.b**, $(3n-1)x = n^2$.

Nous en déduisons : $9(3n-1)x - (3n+1)(3n-1) = 1$ autrement dit :

$$(3n-1)(9x - 3n - 1) = 1$$

Dans l'hypothèse où il y aurait un couple $(x\,;2x)$ équitable, nous pourrions décomposer 1 en un produit de deux entiers dont l'un au moins, l'entier $(3n-1)$, est strictement plus grand que 1. C'est impossible, L'hypothèse d'existence d'un tel couple équitable est à rejeter.

Il n'existe aucun couple $(x\,;2x)$ équitable.

10. Dans toute cette question : $y = 2022 = -3(n-1)x + n^2$.

10.a. Le couple (1 ; 2022) est équitable si et seulement si l'entier n vérifie la relation :

$2022 = -3(n-1) + n^2$, c'est-à-dire si et seulement si $n \times (n-3) = 2019$.

Or : $2019 = 3 \times 673$. L'entier 2019 n'est pas le produit de deux entiers distants de 3 unités.

Le couple (1 ; 2022) n'est équitable pour aucune valeur de n.

Le couple (2 ; 2022) est équitable si et seulement si l'entier n vérifie la relation :

$2022 = -6(n-1) + n^2$, c'est-à-dire si et seulement si $n \times (n-6) = 2016$.

Or : $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7 = 42 \times 48$. L'entier 2016 est le produit de deux entiers distants de 6 unités.

Le couple (2 ; 2022) est équitable pour la valeur $n = 48$.

10.b. Supposons que le couple $(x\,;2022)$ soit équitable. Alors, la relation $2022 = -3(n-1)x + n^2$ est vérifiée, c'est-à-dire que : $n^2 - 2022 = 3(n-1)x$.

- D'une part, les deux entiers $(n-1)$ et x étant par hypothèse des entiers strictement positifs, $n^2 - 2022$ est nécessairement un entier strictement positif. Nous avons par conséquent : $n > \sqrt{2022}$.

Une calculatrice indique que $44{,}96 < \sqrt{2022} < 44{,}97$ donc l'inégalité $n > \sqrt{2022}$ implique, puisque n est un entier, l'inégalité large $n \geq 45$.

- D'autre part, l'entier $(n-1)$ divise $3(n-1)x$, donc $(n-1)$ divise $n^2 - 2022$.

Si $(x\,;2022)$ est équitable, alors l'entier n est un entier supérieur ou égal à 45
et tel que $(n-1)$ divise $n^2 - 2022$.

10.c. Nous pouvons écrire : $n^2 - 2022 = (n^2 - 1) - 2021 = (n-1)(n+1) - 2021$

Ainsi : $2021 = (n-1)(n+1) - (n^2 - 2022)$.

L'entier $(n-1)$ divise les deux termes du second membre, il divise leur différence. Il s'agit d'un diviseur de 2021.

Les entiers $(n-1)$ convenables sont les diviseurs de 2021supérieurs ou égaux à 44.

Or : $2021 = 43 \times 47 = 1 \times 2021$.

Nous en déduisons que les seuls diviseurs de 2021 aboutissant à une solution sont :

$n - 1 = 47$ soit $n = 48$ et $x = 2$ comme nous l'avons déjà vu.

$n - 1 = 2021$ soit $n = 2022$ et $x = \frac{2022^2 - 2022}{3 \times 2021} = 674$.

11. Dans toute cette question : $y = x^2 = -3(n-1)x + n^2$.

Déterminons à l'aide d'un algorithme d'investigation exhaustif Python les valeurs de n inférieures à 200 pour lesquelles il existe un couple $(x\ ;\ x^2)$ équitable. Cet algorithme teste tous les entiers n de 3 à 200 et sélectionne ceux pour lesquels il trouve un entier x plus petit que $\frac{n^2-1}{3n-2}$ qui vérifie la relation $x^2 = -3(n-1)x + n^2$. Il affiche alors n et x.

L'algorithme **machisou** sélectionne trois valeurs de n et trois seulement :

$n = 9\ ;x = 3$

$n = 52\ ;\ x = 16$

$n = 161\ ;x = 49$

```
>>> from math import floor
>>> def machisou():
        for n in range(3,201):
                a=floor((n*n-1)/(3*n-2))
                for x in range(1,a+1):
                        if x*x==n*n-3*(n-1)*x:
                                print([n,x])


>>> machisou()
[9, 3]
[52, 16]
[161, 49]
```

Autre méthode (prérequis : savoir résoudre une équation de second degré)

La relation entre x et n s'écrit aussi bien $n^2 - 3nx + (3x - x^2) = 0$ et peut s'interpréter comme une équation (E) au second degré en n dont le discriminant est : $\Delta = 13x^2 - 12x$.

Une condition nécessaire pour que (E) ait des solutions entières est que ce discriminant soit le carré d'un nombre entier. Aidons-nous d'un algorithme Python pour repérer les valeurs de x pour lesquelles $13x^2 - 12x$ est le carré d'un nombre entier.

D'après une question précédente, nous savons que $x < \frac{n+1}{3}$; si n est inférieur ou égal à 200, x est au plus égal à 66. Nous testerons donc les entiers entre 2 et 66.

L'algorithme **picsou** sélectionne les valeurs de x convenables. L'équation (E) admettant pour solutions $\frac{3x\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, nous faisons afficher x et uniquement la solution n strictement positive (il y en a une seule lorsque $x \geq 3$). Les résultats affichés concordent avec ceux de la première méthode.	<pre>>>> from math import floor,sqrt
	>>> def picsou():
	        for x in range(2,67):
	                d=13*x*x-12*x
	                u=sqrt(d)
	                if floor(u)==u:
	                        print([x,(3*x+u)/2])
	
	>>> picsou()
	[3, 9.0]
	[16, 52.0]
	[49, 161.0]</pre>

Exercice 3 : Nombres polis

1. $9 = 4 + 5$ et $9 = 2 + 3 + 4$.

2. Un entier n est impair et supérieur ou égal à 3 si et seulement s'il existe un entier p strictement positif tel que : $n = 2p + 1$. L'entier n s'écrit alors sous la forme d'une somme de deux entiers non nuls consécutifs :

$$n = p + (p + 1)$$

Tout entier impair et supérieur ou égal à 3 est poli.

3. Un entier n est multiple de 3 et supérieur ou égal à 3 si et seulement s'il existe un entier p strictement positif tel que : $n = 3p$. L'entier n s'écrit alors sous la forme d'une somme de trois entiers positifs consécutifs :

$$n = (p - 1) + p + (p + 1)$$

Lorsque $n = 3$, l'entier $(p - 1)$ est nul, nous obtenons la décomposition : $3 = 1 + 2$. Pour les autres multiples de 3, nous obtenons une décomposition en somme de trois entiers consécutifs non nuls.

Tout entier multiple de 3 et supérieur ou égal à 3 est poli.

4. L'entier 8 n'est pas la somme de deux entiers consécutifs car $3 + 4 < 8 < 4 + 5$ ni non plus de trois entiers consécutifs car $1 + 2 + 3 < 8 < 2 + 3 + 4$. Il ne peut pas non plus être la somme d'un plus grand nombre d'entiers consécutifs car $1 + 2 + 3 + 4 > 8$.

L'entier 8 n'est pas un nombre poli.

5. La somme $S(a, k) = a + (a + 1) + \cdots + (a + k)$ est la somme de $(k + 1)$ entiers consécutifs, l'entier a (strictement positif dans notre contexte) y figure $(k + 1)$ fois ; on peut écrire cette somme en notation sigma sous la forme :

$$S(a, k) = \sum_{j=0}^{j=k} (a + j)$$

En séparant cette somme en deux sommes distinctes et en exploitant l'indication de l'énoncé donnant la somme des k premiers entiers non nuls, nous obtenons :

$$S(a,k) = \sum_{j=0}^{j=k}(a) + \sum_{j=0}^{j=k}(j) = (k+1)a + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2a)}{2}$$

Un nombre N est poli si et seulement s'il existe deux entiers strictement positifs a et k tels que $S(a,k) = N$, autrement dit tels que : $(k+1)(k+2a) = 2N$.

Notons que les deux entiers $(k+1)$ et $(k+2a)$ dont le produit est égal à $2N$ sont de parités différentes (car 1 est impair et $2a$ est pair). Notons aussi que des deux entiers, $(k+2a)$ est le plus grand.

6. Montrons qu'un entier de la forme 2^n n'est pas un nombre poli.

Emettons l'hypothèse qu'il existe un entier de la forme 2^n qui soit poli. Alors il existe deux entiers strictement positifs a et k tels que : $\frac{(k+1)(k+2a)}{2} = 2^n$ donc tels que : $(k+1)(k+2a) = 2^{n+1}$.

Or, les deux entiers $(k+1)$ et $(k+2a)$ sont de parités différentes. Nous aurions une puissance de 2 qui aurait un diviseur impair au moins égal à 3, c'est impossible. L'hypothèse « il existe un entier de la forme 2^n qui est poli » est à rejeter.

Les puissances de 2 ne sont pas des nombres polis.

7. 10 a un diviseur impair autre que 1, l'entier 5 et il est une fois poli : $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.

15 a trois diviseurs impairs, 3, 5 et 15 et, comme le remarque l'énoncé, il est trois fois poli.

8. D'après la propriété admise, les nombres polis sont les nombres qui ont au moins un diviseur impair. Les nombres non polis sont ceux qui n'ont aucun diviseur impair, c'est-à-dire les puissances de 2. Le plus grand nombre non poli qui est plus petit que 2022 est la plus grande puissance de 2 plus petite que 2022, autrement dit le nombre $1024 = 2^{10}$.

1024 est le plus grand nombre non poli plus petit que 2022.

9. Factorisons le nombre 2022 pour déterminer ses diviseurs impairs : $2022 = 2 \times 3 \times 337$, donc 2022 a trois diviseurs impairs, 3, 337 et 1011. Il est trois fois poli.

Nous devons avoir : $4044 = (k+1)(k+2a)$.

- Ou bien : $4044 = 3 \times 1348$, ce qui nous amène à identifier, avec $\begin{cases} k+1 = 3 \\ k+2a = 1348 \end{cases}$, que nous avons $\begin{cases} k = 2 \\ a = \frac{1346}{2} = 673 \end{cases}$.

  Nous aboutissons à la décomposition : $2022 = 673 + 674 + 675$ (décomposition caractéristique d'un multiple de 3, comme l'est le nombre 2022).

- Ou bien : $4044 = 12 \times 337$, ce qui nous amène à identifier, avec $\begin{cases} k+1 = 12 \\ k+2a = 337 \end{cases}$, que nous avons $\begin{cases} k = 11 \\ a = \frac{337-11}{2} = 163 \end{cases}$.

  Nous aboutissons à la décomposition : $2022 = 163 + 164 + \cdots + 173 + 174$.

- Ou bien : $4044 = 4 \times 1011$, ce qui nous amène à identifier, avec $\begin{cases} k+1 = 4 \\ k+2a = 1011 \end{cases}$, que nous avons $\begin{cases} k = 3 \\ a = \frac{1011-3}{2} = 504 \end{cases}$.

  Nous aboutissons à la décomposition : $2022 = 504 + 505 + 506 + 507$.

10. Cherchons quel est l'entier plus petit que 2022 qui est « le plus poli ». Cet entier doit avoir le plus possible de diviseurs impairs. Pour obtenir le plus possible de diviseurs impairs, nous pouvons utiliser les plus petits nombres premiers impairs et essayer de les combiner de diverses façons :

- Des cocktails puissances de 3 et de 5, comme $675 = 3^3 \times 5^2$ qui a 11 diviseurs[1] impairs distincts de 1.
- Des cocktails puissances de 3, de 5 et de 7 comme $945 = 3^3 \times 5 \times 7$ qui a 15 diviseurs impairs distincts de 1 ou plus fort $1575 = 3^2 \times 5^2 \times 7$ qui en a 17. C'est mieux !
- Les cocktails puissances de 3, 5, 7 et 11 ne font pas mieux car le seul possible est leur produit 1155 qui a 15 diviseurs impairs autres que 1. Inutile d'aller plus loin.

Parmi les entiers plus petits que 2022, le plus poli est 1575, qui est 17 fois poli.

Retrouvons le résultat à l'aide d'un algorithme Python :

<table>
<tr>
<td>L'algorithme poli() recherche exhaustivement tous les entiers plus petits que 2022 qui sont « très polis ». Pour tout $n \leq 2022$, l'algorithme dénombre les couples $k \leq \sqrt{2n}$ et $a \leq \frac{n}{k}$ convenables et sélectionne les entiers n qui sont au moins 12 fois polis.
Il trouve plusieurs entiers qui sont 15 fois polis et un seul entier qui est 17 fois poli, notre ami l'entier 1575.</td>
<td>

```
>>> from math import sqrt,floor
>>> def poli():
        for n in range(3,2023):
                p=0
                for k in range(1,floor(sqrt(2*n))+1):
                        for a in range(1,floor(n/k)+1):
                                if (k+1)*(k+2*a)==2*n:
                                        p=p+1
                if p>11:
                        print(p,n)


>>> poli()
15 945
15 1155
15 1365
15 1485
17 1575
15 1755
15 1785
15 1890
15 1995
```

</td>
</tr>
</table>

[1] Nous utilisons une propriété de la décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre entier strictement positif : si un entier N admet comme décomposition en produit de facteurs premiers : $N = {p_1}^{a_1} \times {p_2}^{a_2} \times \ldots \times {p_k}^{a_k}$, alors le nombre de diviseurs de N (y compris 1 et lui-même) est $(a_1+1) \times (a_2+1) \times \ldots \times (a_k+1)$.