OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE NANTES
2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

21^{e} OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

CORRECTION OLYMPIADES

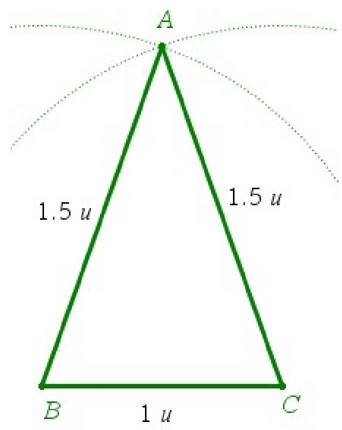
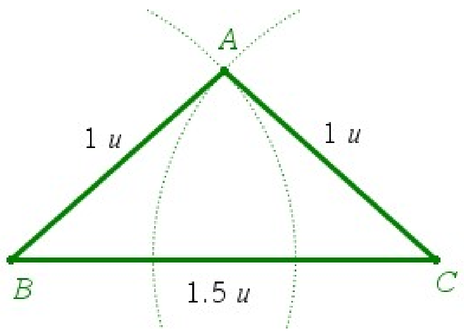
EXERCICES ACADÉMIQUES

NANTES 2021

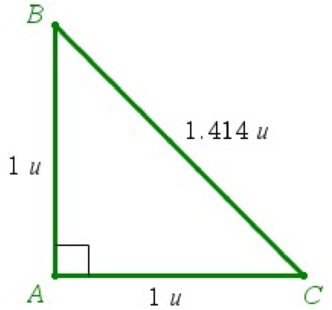
Avertissement : en raison de sa difficulté, nous ne conseillerions pas ce sujet aux candidats ***qui débuteraient*** *une préparation aux Olympiades.*

Exercice 1. Figures (1, *a*)

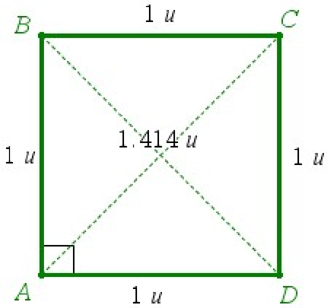
Partie A

1. Deux exemples de triangles isocèles de côtés 1 et $\frac{3}{2}$, qui sont des figures $\left(1\ ;\ \frac{3}{2}\right)$ à trois points.	 	

2. Un triangle ABC rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit $[AB]$ et $[AC]$ ont pour longueur 1 répond à la question puisque, en application du théorème de Pythagore, sa base $[BC]$ a pour longueur $\sqrt{2}$, qui est un nombre strictement plus grand que 1. Il s'agit d'une figure $\left(1\ ;\ \sqrt{2}\right)$ à trois points.



3. Un carré de côté 1 répond à la question car ses deux diagonales ont pour longueur $\sqrt{2}$. Il s'agit d'une figure $\left(1\ ;\ \sqrt{2}\right)$ à quatre points.



4. Pris deux à deux, les trois sommets d'un triangle *ABC* déterminent trois distances : *AB*, *AC* et *BC*. S'il s'agit d'une figure $(1 \,;\, a)$ à trois points, alors ces trois distances ne prennent que deux valeurs différentes : nécessairement au moins deux de ces distances sont égales. Le triangle *ABC* est un triangle isocèle.

Réciproquement, soit *ABC* un triangle isocèle. Sans diminuer la généralité, on peut supposer qu'il s'agit d'un triangle isocèle de sommet *A*. Deux cas se présentent :

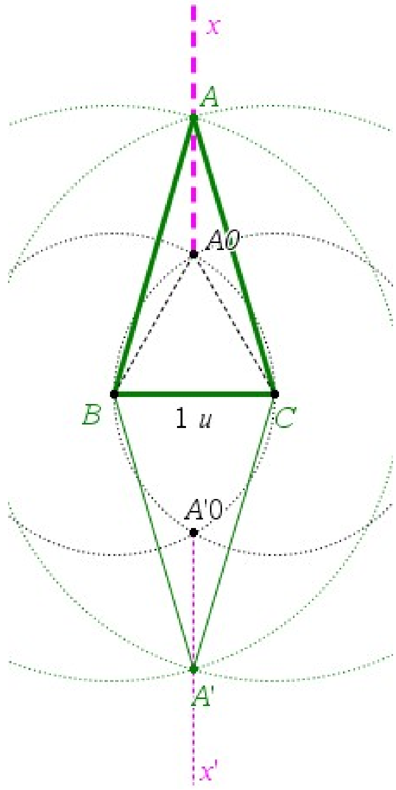
<table>
<tr>
<td>

Premier cas : $BC = 1 \,;\, AB = AC = a > 1$.

Si on trace un segment [*BC*] de longueur 1, compte tenu de l'hypothèse $a > 1$, les cercles de centres respectifs *B* et *C* et de rayon *a* sont sécants en deux points *A* et *A'* puisque le centre de chacun est intérieur à l'autre cercle : il existe toujours deux triangles isocèles *ABC* et *A'BC* de base [*BC*] qui sont des figures $(1 \,;\, a)$.

NB. La figure ci-contre illustre ce cas. Les points *A* et *A'* appartiennent à l'une et l'autre des demi-droites coloriées en magenta, supportées par la médiatrice de [*BC*].

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

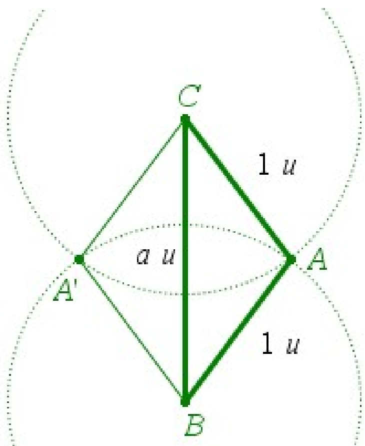
Deuxième cas : $AB = AC = 1 \,;\, BC = a$ avec $a > 1$.

Si on trace un segment [*BC*] de longueur *a*, compte tenu de l'inégalité triangulaire entre les longueurs des côtés d'un triangle, un triangle *ABC* convenable ne peut exister que si l'inégalité $BC \leq AB + AC = 2$ est satisfaite.

Les cercles de centres respectifs *B* et *C* et de rayon 1 sont sécants en deux points lorsque $1 < a < 2$ (deux triangles de base [*BC*] conviennent) et tangents si $a = 2$ (un triangle aplati convient). En revanche, si $a > 2$, ces cercles n'ont aucun point commun, il n'existe pas de triangle de ce type qui soit une figure $(1 \,;\, a)$

La figure ci-contre illustre ce cas, où l'on a choisi $1 < a \leq 2$

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Partie B

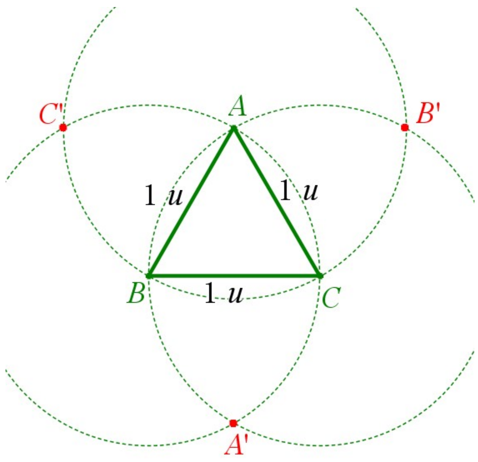
Dans cette partie, on se donne trois points du plan A, B, C tels que $AB = BC = CA = 1$. On envisage diverses façons de placer un quatrième point D permettant d'obtenir une figure $(1, a)$ à quatre points. Il reste à déterminer les trois autres distances DA, DB et DC de D aux points A, B et C.

5. *Dans cette question, on cherche un quatrième point D tel que les six distances soient égales à* 1.

Traçons les cercles de centres respectifs A, B et C et de rayon 1.

- Ceux de centres B et C se coupent en A et en A', symétrique de A par rapport à (BC).
- Ceux de centres C et A se coupent en B et en B', symétrique de B par rapport à (CA).
- Ceux de centres A et B se coupent en C et en C', symétrique de C par rapport à (AB).

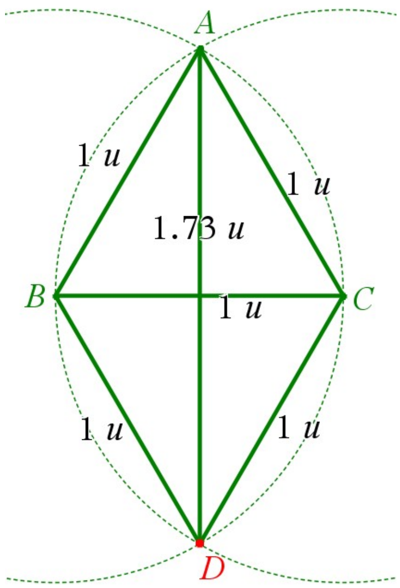
Ces six points sont distincts. Il n'existe donc aucun point qui soit commun aux trois cercles : Il n'existe pas de quatrième point qui soit situé à la distance 1 de A, de B et de C en même temps.



6. *Dans cette question, on cherche un quatrième point D tel que cinq des six distances sont égales à* 1, *et une seule, la distance AD, à a.*

Le triangle BCD doit pour cela être un triangle équilatéral. Or, il n'existe que deux points du plan qui soient à la distance 1 de B et de C : le point A et son symétrique par rapport à la droite (BC). S'il existe un point D répondant à la question, D ne peut être que ce symétrique. Dans ce cas, les triangles équilatéraux ABC et ABD sont symétriques par rapport à (BC) et le quadrilatère $ABCD$ est un losange. Dans cette configuration, la distance AD est égale à deux fois la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1, elle est donc égale à $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, $AD = \sqrt{3}$ et toutes les autres distances sont égales à 1. Le problème a une solution, deux triangles équilatéraux dont un côté est commun et constituant ainsi un losange.

Il s'agit d'une figure $(1 ; \sqrt{3})$ à quatre points.



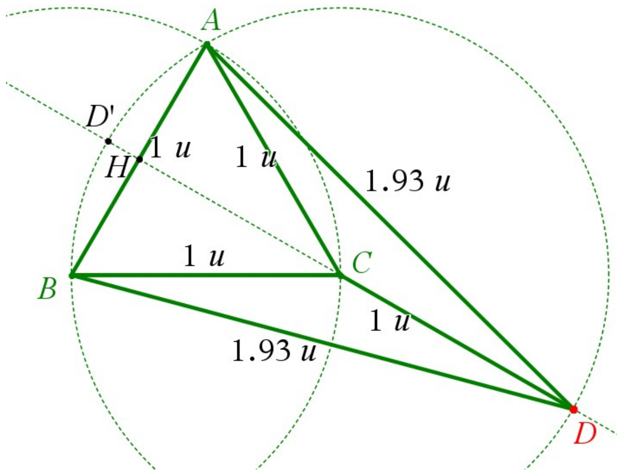
7. *Dans cette question, on cherche un quatrième point D tel que $DB = DA = a > 1$; $DC = 1$: quatre distances égales à* 1 *et deux à a.*

Cet éventuel point D appartient au cercle de centre C et de rayon 1 ainsi qu'à la médiatrice de $[AB]$. Il y a deux points possibles, D et D', mais seul D, situé sur le grand arc AB, est tel que $DA = DB > 1$ (voir figure).

Si H désigne le milieu de $[AB]$, le triangle DHA est un triangle rectangle en H dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur : $HA = \frac{1}{2}$; $HD = HC + CD = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

L'hypoténuse DA est telle que :

$$DA^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$$



$a = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ **(1,93 à 0,01 près).**

Il s'agit d'une figure $\left(1\ ;\ \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$ **à quatre points.**

8. *Dans cette question, on cherche un quatrième point D tel que : $DA = DB = DC = a > 1$: trois distances égales à* 1*, trois autres à a.*

Il existe bien un point, et un seul, qui est équidistant des trois sommets d'un triangle, c'est le centre de son cercle circonscrit. Mais en l'occurrence sa distance a aux sommets du triangle équilatéral ABC est plus petite que 1. Compte tenu de l'hypothèse $a > 1$, il n'existe pas de point D satisfaisant les conditions voulues.

Partie C

9. Dans cette partie : $AB = BC = 1$ et $AC = a$ (ce qui suppose implicitement que $1 < a \leq 2$). Nous devons examiner les diverses possibilités pour les distances DA, DB, DC à un éventuel quatrième point.

Il est inutile d'examiner les cas où $DA = DB = 1$, ni $DB = DC = 1$, car ils se ramènent à la situation de **la partie B** (présence d'un triangle équilatéral de côté 1). Le cas $DA = DB = DC = a$ sera quant à lui envisagé dans la partie suivante, nous prenons l'option de ne pas l'étudier ici.

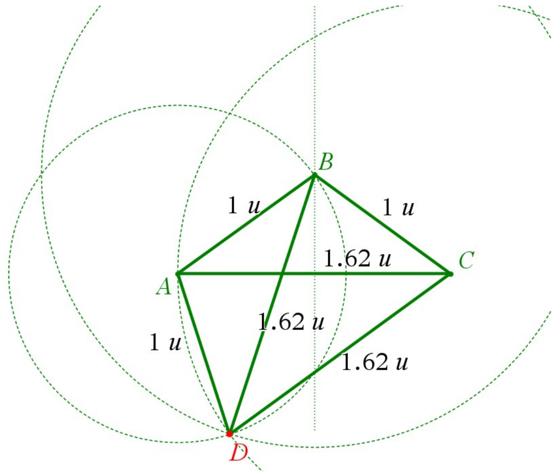
Etudions brièvement le cas : $DA = DC = 1$; $DB = a$**.**

Alors, le quadrilatère *ABCD* est un losange dont les diagonales ont la même longueur : on retrouve un cas déjà étudié en exemple, celui du carré.

Etudions le cas : $DB = DC = a$; $DA = 1$**.**

S'il existe un point *D* convenable, ce point doit être le point de concours de trois cercles, de centres respectifs *A, B* et *C* et de rayons respectifs 1, *a* et *a*. Les triangles *ACD* et *BCD* d'une part et les triangles *ABC* et *ABD* d'autre part sont alors isométriques (côtés homologues de même longueur).

Il existe une même symétrie qui échange *A* et *B*, ainsi que *C* et *D*. De ce fait, le quadrilatère *ABCD* est un trapèze isocèle. Les angles de base des triangles *ABC* et *ABD* sont égaux à l'angle au sommet des triangles *ABD* et *ACD* ($\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACD}$ par exemple sont des angles alternes internes). Soit α cet angle.



Calculons le cosinus de cet angle de deux façons à l'aide de la formule d'Al-Kashi :

Dans le triangle *ABC*, c'est un angle de base : $\cos\alpha = \dfrac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AB \times AC} = \dfrac{a^2 + 1 - 1}{2a} = \dfrac{a}{2}$

Dans le triangle *ACD* c'est l'angle au sommet : $\cos\alpha = \dfrac{AC^2 + CD^2 - AD^2}{2AC \times CD} = \dfrac{a^2 + a^2 - 1}{2a^2} = \dfrac{2a^2 - 1}{2a^2} = 1 - \dfrac{1}{2a^2}$

Le nombre *a* vérifie l'équation : $1 - \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{a}{2}$, ou aussi bien l'équation : $a^3 - 2a^2 + 1 = 0$

Il y a une solution évidente, $a = 1$, ce qui conduit à la factorisation : $(a-1)(a^2 - a - 1) = 0$. L'équation a pour solutions 1, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, dont un seule est entre 1 et 2 : $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nous obtenons un trapèze isocèle dont trois côtés ont pour longueur 1, de grande base de longueur $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, qui est aussi la longueur de ses diagonales, c'est une figure $\left(1 ; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ à quatre points.

Partie D

10. Dans cette partie, les rôles sont inversés par rapport à la **partie B**: Les distances *AB, BC, CA* relatives au triangle équilatéral *ABC* sont les plus grandes longueurs, tandis que les trois autres distances, *DA, DB, DC* sont des longueurs inférieures ou égales aux trois autres.

Si nous reprenons une classification analogue à celle des questions de la **partie B**, nous obtiendrons les conclusions suivantes, concernant les positions de *D* par rapport aux trois points *A, B, C* :

Hypothèses de la question 5 : Aucun point *D* à une distance égale à *a* des trois autres points.

Hypothèses de la question 6 : Aucun point *D* situé à une distance égale à *a* de deux points et à la distance $1 < a$ du troisième (dans la figure de la question 6, la distance *AD* est plus grande que la distance *AB* et il n'y a pas d'alternative).

Hypothèses de la question 7 : Le point *D* doit être à la distance 1 de deux points (*A* et *B*) et *a* du troisième *C*. *D* est le point d'intersection entre la médiatrice de [*AB*] et le cercle de centre *C* et de rayon *a* situé cette fois sur le petit arc *AB* (voir figure).

Le triangle *DHA* est un triangle rectangle en *H* dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur :

$$HA = \frac{a}{2} \; ; \; HD = CD - HD = a - a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

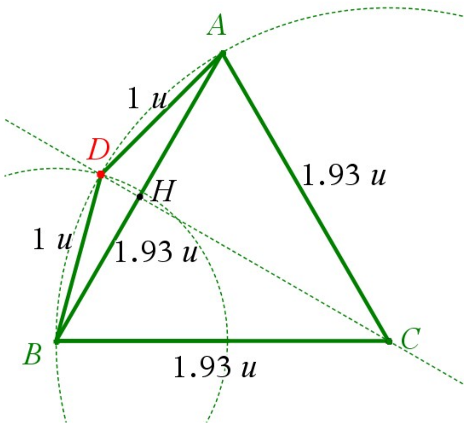
L'hypoténuse *DA* est telle que :

$$DA^2 = a^2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] = \left(2 - \sqrt{3}\right)a^2$$

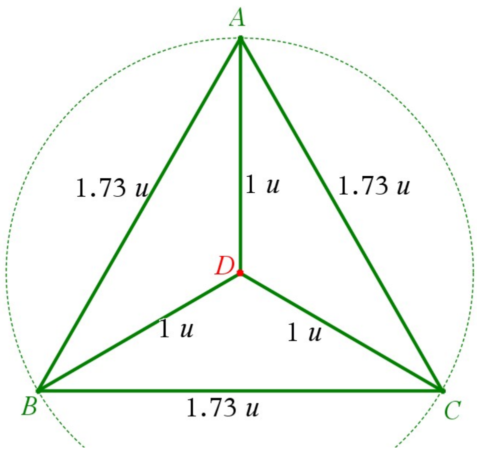
Ainsi : $DA = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

On obtient $DA = 1$ lorsque $a = \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Ce cas de figure complète un cas de la **partie C** que nous avions délibérément laissé de côté : nous avons ici un triangle équilatéral de côté *a* flanqué d'un triangle isocèle.



Il s'agit d'une figure $\left(1 \; ; \; \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$, comme dans la partie B.

Hypothèses de la question 8 : trois distances égales à a, trois distances égales à 1. Le centre D du cercle circonscrit au triangle ABC, rejeté dans la **partie B**, convient dans ce cas de figure. Le triangle ABC étant équilatéral de côté a, la longueur de chaque hauteur est égale à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ et la distance du centre du cercle circonscrit (qui est aussi centre de gravité) aux sommets est égale à $\frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. On obtient $DA = 1$ lorsque $a = \sqrt{3}$. **Il s'agit d'une figure $\left(1\ ;\ \sqrt{3}\right)$.**	

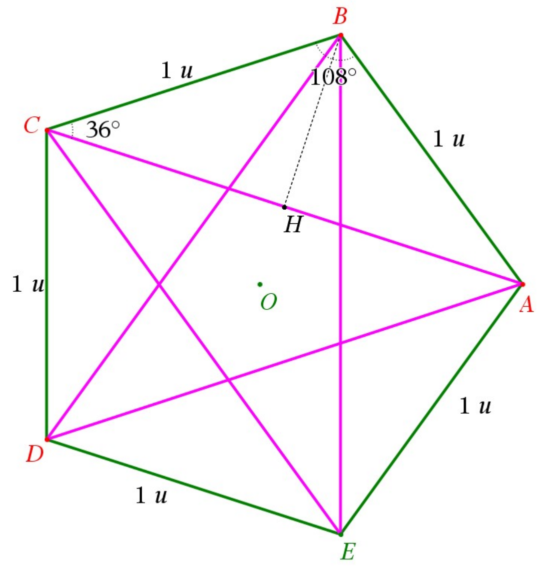
Partie E

11. On cherche cinq points *A, B, C, D, E* dont les 10 distances relatives sont égales soit à 1 soit à un certain nombre a qu'il faut déterminer.

La configuration obtenue à la **question 9**, la figure $\left(1\ ;\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, attire l'attention en ce sens que le quadrilatère obtenu joint quatre des sommets d'un pentagone régulier. Si on considère le pentagone complet, on peut conjecturer que nous allons atteindre notre objectif.

Deux résultats à propos du pentagone régulier et de certains angles remarquables nous seront utiles, nous les admettons sans démonstration :

- Les angles aux sommets d'un pentagone régulier ont pour mesure 108 degrés.
- Soit α un angle dont la mesure en degrés est 36. Alors : $\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Soit $ABCDE$ un pentagone régulier de côté 1. Ses diagonales (en magenta sur la figure ci-contre) sont les bases de triangles isocèles, tous isométriques, de côté 1, d'angles aux sommets de mesure 108 degrés et d'angles de base de mesure 36 degrés. Le triangle ABC est l'un de ces triangles. Calculons la longueur de sa base AC à l'aide du milieu H de $[AC]$ dans le triangle rectangle BCH : $AC = 2CH = 2BC\cos 36° = 2\times\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	

Si on joint deux à deux les sommets de ce pentagone régulier, on obtient cinq côtés de longueur 1 (en vert) et cinq diagonales de longueur $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (en magenta).

Ce pentagone régulier est un exemple de figure $(1,\ a)$ à cinq points avec $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

NB. En même temps, si nous retirons un sommet du pentagone (par exemple le sommet E), nous retrouvons en figure résiduelle la configuration de la **question 9**, en l'occurrence le quadrilatère $ABCD$.

Il s'agit effectivement d'une figure $(1,\ a)$ à quatre points avec $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

La figure annoncée à la **question 9** était bien une solution à cette question.

Exercice 2. *k*-couples

Cet exercice a pour objectif l'étude des couples d'entiers naturels non nuls $(x\ ;\ y)$ dont le produit est un multiple de leur somme.

À cet effet, introduisons la fonction $(x\ ;\ y) \mapsto f(x;y) = \dfrac{x \times y}{x+y}$ définie sur l'ensemble **N*×N*** *qui nous sera utile à plusieurs reprises. L'objectif de l'exercice n'est autre que l'étude des couples d'entiers naturels non nuls $(x\ ;\ y)$ dont l'image par f est un nombre entier.*

Questions préliminaires

1. Chacun des deux couples $(6\ ;\ 30)$ et $(10\ ;\ 10)$ est tel que leur première composante est inférieure ou égale à leur seconde composante.

De plus : $f(6\ ;\ 30) = \dfrac{6 \times 30}{6+30} = \dfrac{180}{36} = 5$ et $f(10\ ;\ 10) = \dfrac{10 \times 10}{10+10} = \dfrac{100}{20} = 5$

L'image par f de chacun de ces deux couples est un nombre entier, et ce nombre est l'entier 5.

$(6\ ;\ 30)$ **et** $(10\ ;\ 10)$ **sont tous deux des 5-couples**.

$(30\ ;\ 6)$ **n'est pas un 5-couple** car $30 > 6$.

$f(5\ ;\ 25) = \dfrac{5 \times 25}{5+25} = \dfrac{125}{30} = \dfrac{25}{6}$ qui n'est pas égal à 25 (ce n'est d'ailleurs pas non plus un nombre entier).

$(5\ ;\ 25)$ **n'est pas un 5-couple**

2. D'une part : $8 \leq 56$.

D'autre part : $f(8\ ;\ 56) = \dfrac{8 \times 56}{8+56} = \dfrac{448}{64} = 7$. L'image par f du couple $(8\ ;\ 56)$ est l'entier 7.

$(8\ ;\ 56)$ **est un 7-couple.**

3. $f(3\ ;\ 5) = \dfrac{3 \times 5}{3+5} = \dfrac{15}{8}$. L'image par f du couple $(3\ ;\ 5)$ n'est pas un nombre entier :

Quel que soit l'entier naturel non nul *k*, $(3\ ;\ 5)$ **n'est pas un *k*-couple.**

NB. Dès lors que les entiers 3 et 5 ont un produit impair et une somme paire, leur somme ne peut pas diviser leur produit. Plus généralement, tout couple formé de deux nombres impairs ne peut pas être un *k*-couple, pour aucune valeur de *k*, pour cette même raison.

4. Montrons que l'affirmation est fausse en étudiant un contre-exemple.

Nous avons vu que $(6\ ;\ 30)$ est un 5-couple. Considérons le couple $(36\ ;\ 900)$ constitué par leurs carrés.

$f(36\ ;\ 900)=\dfrac{36\times 900}{36+900}=\dfrac{32400}{936}=\dfrac{450}{13}$. L'image par f du couple $(36\ ;\ 900)$ n'est pas égale à 25, le couple $(36\ ;\ 900)$ n'est pas un 25-couple.

Il existe au moins un 5-couple $(x\ ;\ y)$ tel que $(x^2\ ;\ y^2)$ n'est pas un 25-couple.

L'affirmation : « si $(x\ ;\ y)$ est un 5-couple alors $(x^2\ ;\ y^2)$ est un 25-couple » est fausse.

Recherche de certains *k*-couples

5. Si $(x\ ;\ y)$ est un 1-couple, alors x et y sont des entiers naturels non nuls tels que : $x\leq y$ et $\dfrac{x\times y}{x+y}=1$.

Mais la relation : $\dfrac{x\times y}{x+y}=1$ est équivalente à la relation : $x\times(y-1)=y$: Le nombre entier $y-1$ divise son successeur y.

Or, deux entiers consécutifs sont toujours des entiers premiers entre eux (voir note en dernière page de la correction) : $y-1$ ne peut diviser son successeur que si : $y-1=1$, auquel cas $y=2$ et en conséquence $x=2$.

Réciproquement, si on considère le couple $(x\ ;\ y)=(2\ ;\ 2)$, on vérifie bien $x\leq y$ et : $\dfrac{x\times y}{x+y}=1$

Il existe un seul 1-couple qui est le couple $(2\ ;\ 2)$.

6. Pour tout couple d'entiers naturels non nuls $(x\ ;\ y)$, considérons la différence : $(x-2)\times(y-2)-4$.

$(x-2)\times(y-2)-4=(x\times y-2x-2y+4)-4=x\times y-2(x+y)$.

Par conséquent : $(x-2)\times(y-2)-4=0$ si et seulement si : $x\times y-2(x+y)=0$ ou, aussi bien : $(x-2)\times(y-2)=4$ si et seulement si : $x\times y=2(x+y)$

Autrement dit, parmi les couples d'entiers naturels non nuls : $(x\ ;\ y)$ est un 2-couple si et seulement si $x\leq y$ et $(x-2)\times(y-2)=4$. Les deux entiers $x-2$ et $y-2$ sont deux diviseurs complémentaires de 4, le plus petit des deux étant $x-2$.

Ou bien : $\begin{cases}x-2=1\\y-2=4\end{cases}$ auquel cas $x=3$; $y=6$, ou bien $\begin{cases}x-2=2\\y-2=2\end{cases}$ auquel cas $x=y=4$.

Réciproquement, on vérifie sans difficulté que $(3\ ;\ 6)$ et $(4\ ;\ 4)$ sont bien des 2-couples.

Il existe deux 2-couples qui sont $(3\ ;\ 6)$ et $(4\ ;\ 4)$.

7. Soit k un nombre premier. Cherchons les éventuels couples d'entiers naturels non nuls $(x\ ;\ y)$ tels que $x \times y = k \times (x + y)$, pour le moment sans condition d'ordre sur ces deux entiers.

Puisque k est un nombre premier, s'il divise le produit $x \times y$, alors il divise au moins l'un des facteurs de ce produit.

Supposons que k divise y : il existe un entier naturel non nul u tel que $y = k \times u$. La relation $x \times y = k \times (x + y)$ s'écrit : $x \times (k\,u) = k \times (x + k\,u)$. En conséquence : $x \times u = x + k\,u$ ou aussi bien : $(u-1) \times x = k \times u$

L'entier $(u-1)$, en tant que prédécesseur de u, est premier avec u. D'après le théorème de Gauss, puisque $(u-1)$ divise $k \times u$ et qu'il est premier avec u, il divise k.

L'entier k étant premier, il a exactement deux diviseurs, 1 et lui-même :

- Ou bien $\begin{cases} u-1=1 \\ x = k \times u \end{cases}$ auquel cas : $u = 2$; $x = y = 2\,k$, on obtient le couple $(2k\ ;\ 2k)$
- Ou bien $\begin{cases} u-1=k \\ x = u \end{cases}$ auquel cas : $x = u = k+1$; $y = k \times (k+1)$, on obtient le couple $(k+1\ ;\ k \times (k+1))$.

L'hypothèse « k divise x » conduirait aux couples $(2k\ ;\ 2k)$ et $(k \times (k+1)\ ;\ k+1)$.

Cependant, du fait que pour tout entier premier k : $k+1 < k \times (k+1)$, le couple $(k+1\ ;\ k \times (k+1))$ est un k-couple et $(k \times (k+1)\ ;\ k+1)$ n'en est pas un.

Si k est un nombre premier, il existe deux k-couples qui sont $(2k\ ;\ 2k)$ et $(k+1\ ;\ k \times (k+1))$.

Par exemple, si $k = 7$, il s'agit de $(14\ ;\ 14)$ et de $(8\ ;\ 56)$.

8. Cherchons les éventuels couples d'entiers naturels non nuls $(x\ ;\ y)$ tels que $x \leq y$ et $\dfrac{x \times y}{x + y} = 2021$:

Si $\dfrac{x \times y}{x + y} = 2021$, le nombre y peut s'exprimer en fonction de x : $y = \dfrac{2021x}{x - 2021}$.

L'entier y devant être un entier positif, le nombre $x - 2021$ doit être strictement positif et pour cela l'entier x doit être au moins égal à 2022.

Sachant aussi que $y \geq x$, l'entier x doit vérifier l'inéquation : $\dfrac{2021x}{x - 2021} \geq x$ soit : $2021x \geq x^2 - 2021x$, ce qui conduit, puisque x est strictement positif, à l'inéquation : $4042 \geq x$.

Par conséquent, si $(x\ ;\ y)$ est un couple convenable, alors x est un entier situé entre 2022 et 4042. Il s'agit de déterminer les valeurs entières de x de cet intervalle pour lesquelles $y = \dfrac{2021x}{x - 2021}$ est un nombre entier.

À cet effet, posons : $u = x - 2021$, ce qui fait que cette nouvelle variable u prend ses valeurs entre 1 et 2021.

Exprimons y en fonction de u : $y = \dfrac{2021(u + 2021)}{u} = 2021 + \dfrac{2021^2}{u}$.

Le nombre y est un entier si et seulement si $\dfrac{2021^2}{u}$ est un entier, c'est-à-dire si et seulement si u est un diviseur de 2021^2. Nous devons chercher quels sont les diviseurs de 2021^2 qui sont situés entre 1 et 2021.

Or : $2021 = 43 \times 47$ et $2021^2 = 43^2 \times 47^2$, ce qui nous conduit à la liste suivante :

- $u = 1$ donc $x = 2022$; $y = 2021 \times 2022 = 4086462$
- $u = 43$ donc $x = 2021 + 43 = 2064$; $y = \dfrac{2021 \times 2064}{43} = 97008$
- $u = 47$ donc $x = 2021 + 47 = 2068$; $y = \dfrac{2021 \times 2068}{47} = 88924$
- $u = 43^2 = 1849$ donc $x = 2021 + 1849 = 3870$; $y = \dfrac{2021 \times 3870}{1849} = 4230$
- $u = 43 \times 47 = 2021$ donc $x = 2021 + 2021 = 4042$; $y = \dfrac{2021 \times 4042}{2021} = 4042$

Les autres diviseurs sont plus grands que 2021.

Il y a cinq 2021-couples :

$(2022\ ;\ 4\,086\,462)$, $(2064\ ;\ 97008)$, $(2068\ ;\ 88924)$, $(3870\ ;\ 4230)$, $(4042\ ;\ 4042)$.

Complément : une solution de cette question 8 avec Python

Dès lors que nous avons pu localiser que pour tout couple $(x\ ;\ y)$ convenable sa composante x est un entier situé entre 2022 et 4042, il nous est possible de construire une solution exhaustive en balayant la totalité de l'ensemble $\{2022,\ 2023,...,4042\}$ et en repérant les cas où le nombre $\dfrac{2021x}{x-2021}$ est un entier.

C'est le rôle du programme **couples()** ci-dessous. En exécutant ce programme, nous retrouvons nos cinq couples.

```
>>> def couples():
        for x in range(2022,4043):
                if (2021*x)%(x-2021)==0:
                        print(x,int(2021*x/(x-2021)))
```

```
>>> couples()
2022 4086462
2064 97008
2068 88924
3870 4230
4042 4042
>>>
```

Fin du « complément ».

k-points et croix

9. La fonction Python « croix » complétée et quelques exemples d'application

```
>>> def croix(x,y):
        if (x*y)%(x+y)==0:
                return True
        else:
                return False
```

```
>>> croix(6,30)
True
>>> croix(8,56)
True
>>> croix(5,125)
False
>>> croix(36,900
False
>>> croix(12,60)
True
```

En raison de leur ressemblance, nous avons cru bon de présenter ces deux algorithmes Python sur une même page…

10. Etudions l'image par f des points à coordonnées entières de la droite D, c'est-à-dire des points de coordonnées de la forme $(x\ ;\ y = x)$ où x est un entier (notons au passage que pour un tel point, la condition $x \le y$ est vérifiée) :

Quel que soit l'entier naturel x non nul : $f(x\ ;\ x) = \dfrac{x \times x}{x + x} = \dfrac{x}{2}$. Ce nombre est un entier, et le point de cordonnées $(x\ ;\ x)$ est une croix, lorsque x est un nombre pair. En particulier, pour tout entier naturel non nul k : $f(2k\ ;\ 2k) = k$. Le point de coordonnées $(2k\ ;\ 2k)$ est un k-point situé sur D.

Etudions de même l'image par f des points à coordonnées entières de la parabole P, c'est-à-dire des points de coordonnées de la forme $(x\ ;\ y = x^2 - x)$ où x est un entier (notons au passage que pour un tel point, la condition $x \le y$ est vérifiée si $2x \le x^2$ c'est-à-dire si $x \ge 2$) :

Quel que soit l'entier naturel $x \ge 2$: $f(x\ ;\ x^2 - x) = \dfrac{x \times (x^2 - x)}{x + (x^2 - x)} = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2} = x - 1$. Ce nombre est un entier, et le point de cordonnées $(x\ ;\ x^2 - x)$ est une croix.

En particulier, pour tout entier naturel non nul k : $k + 1 \ge 2$ et $f\left(k+1\ ;\ (k+1)^2 - (k+1)\right) = k$. Le point de coordonnées $\left(k+1\ ;\ (k+1)^2 - (k+1)\right)$, c'est-à-dire de coordonnées $(k+1\ ;\ k^2 + k)$, est un k-point situé sur P.

Pour tout entier naturel non nul *k*, la droite D et la parabole P contiennent chacune un *k*-point.

11. Si $(x\ ;\ y)$ est un k-couple, alors $x \le y$ et $f(x\ ;\ y) = \dfrac{x \times y}{x + y} = k$.

Pour tout entier naturel m non nul : $m\,x \le m\,y$ et $f(m\,x\ ;\ m\,y) = \dfrac{(m\,x) \times (m\,y)}{(m\,x) + (m\,y)} = m \times \dfrac{x \times y}{x + y} = m \times k$.

Ce qui montre que $(m\,x\ ;\ m\,y)$ est un $(m \times k)$-couple.

NB. Pour les questions **12** et **13**, remarquons que si A est un point quelconque du plan distinct de l'origine, de coordonnées $(x\ ;\ y)$, alors, pour tout entier naturel non nul m, le point A_m de coordonnées $(m\,x\ ;\ m\,y)$ est tel que : $\overrightarrow{OA_m} = m\,\overrightarrow{OA}$, les vecteurs $\overrightarrow{OA_m}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires. Le point A_m se déduit du point A par l'homothétie de centre O et de rapport m, il appartient à la droite (OA).

12. Si un point $A(x\ ;\ y)$ est une croix, il est distinct de l'origine et il existe un entier naturel k non nul tel que $(x\ ;\ y)$ soit un k-couple. Pour tout entier naturel m non nul, $(m\,x\ ;\ m\,y)$ est un $(m\times k)$-couple, donc le point $A_m\,(m\,x\ ;\ m\,y)$ est une croix. D'après la remarque que nous venons de faire, pour tout m ce point A_m est une croix qui appartient à la droite (OA). Ces points A_m sont tous distincts les uns des autres.

La droite (*OA*) contient une infinité de croix.

13. Soit r un nombre rationnel au moins égal à 1. Ce rationnel est un quotient de deux entiers strictement positifs p et q : $r=\dfrac{p}{q}$.

La droite D_r passant par O et de coefficient directeur r a pour équation cartésienne l'équation : $y=\dfrac{p}{q}x$ et pour équations paramétriques les équations : $\begin{cases} x=q\,u \\ y=p\,u \end{cases}$; $u\in\mathbf{R}$

Cherchons s'il existe des paramètres entiers naturels u non nuls tel que $(q\,u\ ;\ p\,u)$ soit un k-couple pour certaines valeurs de k à déterminer.

- D'une part, l'hypothèse « $r\geq 1$ » implique que $p\geq q$, donc que $q\,u\leq p\,u$.
- D'autre part : $f(q\,u\ ;\ p\,u)=\dfrac{(q\,u)\times(p\,u)}{p\,u+qu}=\dfrac{p\,q\,u}{p+q}$.

Si u est un multiple du nombre entier $(p+q)$, alors $\dfrac{p\,q\,u}{p+q}$ est un nombre entier.

Plus précisément, pour tout entier naturel k non nul, choisissons : $u=k(p+q)$.

Pour cette valeur de u : $f(q\,u\ ;\ p\,u)=k\,p\,q$.

Ainsi, pour tout entier naturel k non nul, le couple $(k\,q(p+q)\,;\,k\,q(p+q))$ est un kpq-couple et le point M_k de coordonnées $(k\,q(p+q)\,;\,k\,p(p+q))$ est une croix appartenant à la droite D_r.

La droite D_r contient une infinité de croix.

Par exemple, la droite d'équation $y=\dfrac{17}{12}x$ passe par les points de coordonnées $(348k\ ;\ 493k)$ qui sont des croix. En effet : $f(348k\,;493k)=204k$.

14. Etudions l'image par f des points de coordonnées de la forme $(x\ ;\ y = x+1)$ où x est un entier naturel non nul : $f(x\ ;\ x+1) = \dfrac{x \times (x+1)}{x+(x+1)} = \dfrac{x \times (x+1)}{2x+1}$.

On sait que deux entiers naturels non nuls consécutifs, comme le sont x et $(x+1)$, sont toujours des entiers premiers entre eux[1].

On sait aussi que, si deux entiers sont premiers entre eux, chacun d'eux est premier avec leur somme.

Dans le présent contexte, le nombre $x+(x+1) = 2x+1$ est premier avec chacun des deux nombres x et $(x+1)$. Il est donc premier avec leur produit $x \times (x+1)$. En conséquence, $2x+1$ ne peut être en aucun cas un diviseur de $x \times (x+1)$ et $\dfrac{x \times (x+1)}{2x+1}$ ne peut être en aucun cas un nombre entier :

La droite d'équation $y = x+1$ ne contient aucune croix.

[1] Deux entiers sont dits « premiers entre eux » lorsque leur PGCD est égal à 1. La propriété « deux entiers naturels non nuls consécutifs sont premiers entre eux » a été utilisée plusieurs fois dans la correction. Donnons-en pour mémoire une démonstration (que le sujet n'exigeait pas) :
Soit x un entier naturel non nul, et soit $x+1$ son successeur. Soit d un diviseur positif commun à ces deux nombres. Alors d divise leur différence $(x+1)-x$: d divise 1. Il en résulte que 1 est le seul diviseur positif commun aux deux nombres : leur PGCD est égal à 1, ces deux entiers consécutifs sont premiers entre eux.