OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

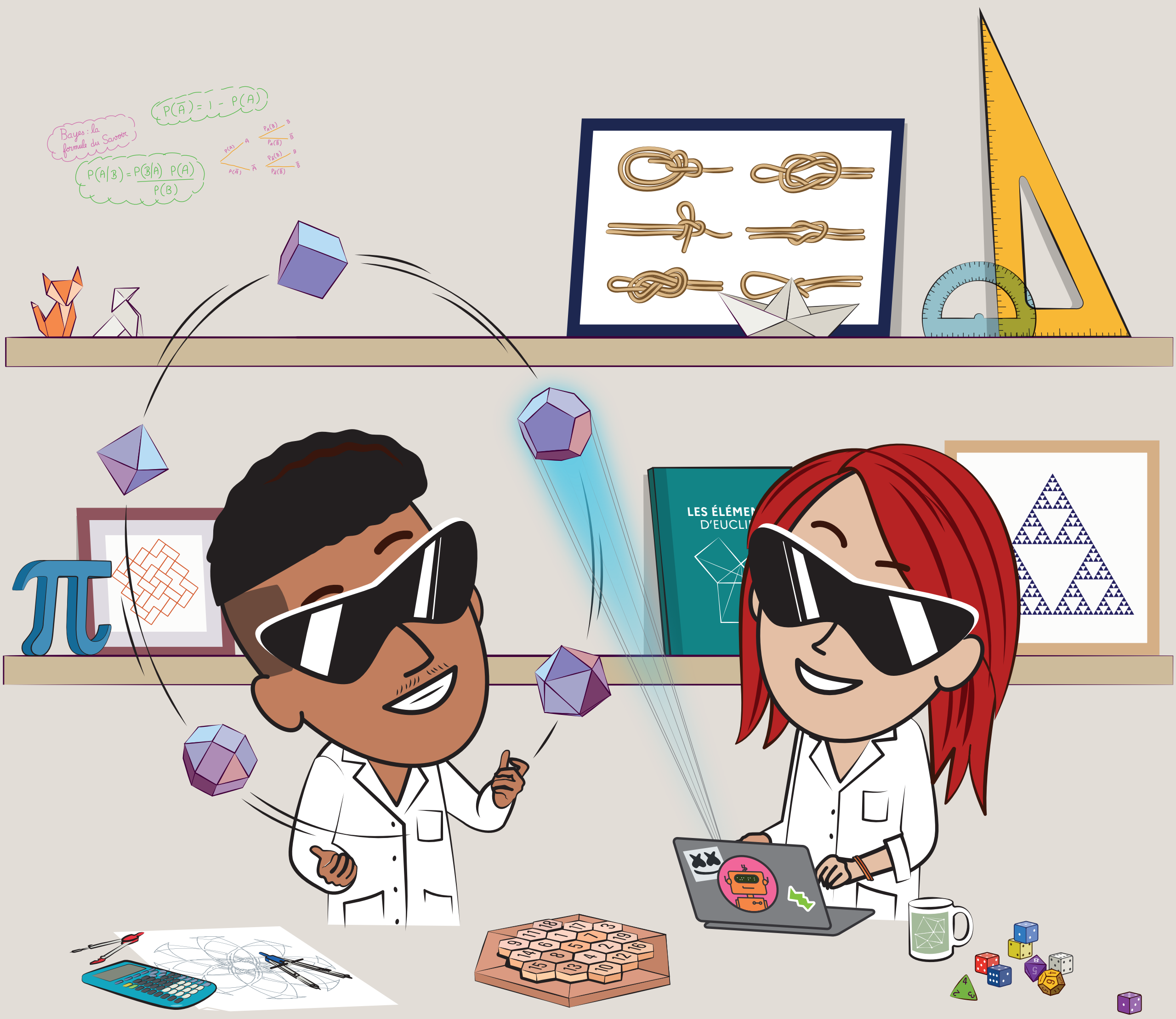
ACADÉMIE DE NANCY-METZ
2023

SUJET DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

ACADÉMIE
DE NANCY-METZ
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Académie de Nancy-Metz

Mardi 15 mars 2023 (matin)
Seconde partie - Exercices académiques
Élèves suivant la spécialité « mathématiques »

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »).
Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.
Les élèves qui travaillent en groupes doivent s'organiser pour rendre une copie commune au groupe.

C'est de la balle !

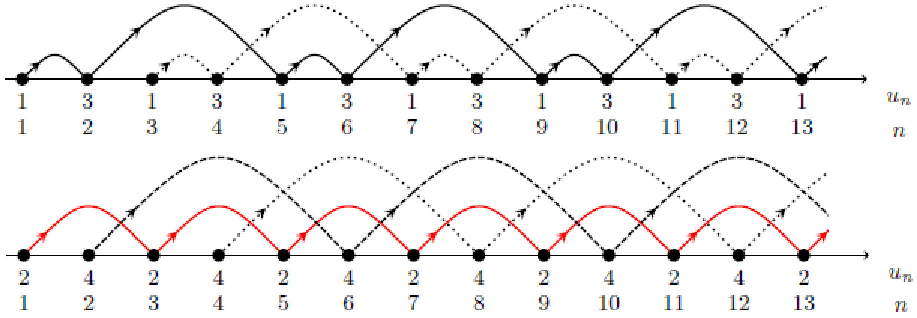
On s'intéresse aux suites d'entiers strictement positifs dites *périodiques*, comme par exemple : $1,2,4,1,2,4,1,2,4,\cdots$ (de période 3), $1,5,1,5,1,5\ \cdots$ (de période 2) ou encore $4,4,1,4,4,4,1,4,\cdots$ (de période 4). Plus précisément, une suite (u_n) est dite de période T si T est le plus petit entier strictement positif tel que pour tout entier $n > 0$, on a : $u_{n+T} = u_n$.

Puisque les termes se répètent, on notera : $1,5,1,5,1,5\ \cdots = \overline{1,5}$, ou encore $1,2,4,1,2,4,1,2,4,\cdots = \overline{1,2,4}$.

Cette écriture n'est pas unique (par exemple $\overline{4,1} = \overline{4,1,4,1}$) mais on utilisera de préférence la plus courte.

1. Déterminer les périodes des suites $\overline{1,3,1,3}$, $\overline{5,5,1}$ et $\overline{2,2,2}$.

2. Les graphiques ci-dessous ont été construit respectivement à partir des suites $\overline{1,3}$ et $\overline{2,4}$.



a) À partir des observations que vous ferez de ce graphique, construire celui de la suite $\overline{4,4,1}$. On utilisera des couleurs pour distinguer les différentes composantes et on placera 15 sommets, donc jusqu'à $n = 15$.

Les points noirs sont appelés les *sommets* du graphique. L'axe horizontal est l'axe du temps. Les courbes sont appelées *trajectoires*. Ainsi le graphique de $\overline{1,3}$ possède deux trajectoires, celui de $\overline{4,4,1}$ en possède trois.

Une suite est dite une *jongle* si les trajectoires n'ont pas de sommets communs.

b) Parmi les suites $\overline{1,2,3}$, $\overline{4,2,4}$ et $\overline{5,5,1}$, deux ne sont pas des jongles. Lesquelles ? Des arguments graphiques seront acceptés pour justifier la réponse.

c) Montrer que si (u_n) est une suite constante qui s'écrit $\overline{k}$, alors (u_n) est une jongle à k trajectoires.

Dans la suite on va établir plusieurs conditions pour qu'une suite périodique donnée soit une jongle.

3. a) Expliquer pourquoi, si dans la suite (u_n), il existe deux termes consécutifs u_k et u_{k+1} qui vérifient l'égalité $u_k = u_{k+1} + 1$, alors (u_n) n'est pas une jongle.

b) Donner un exemple de suite (u_n) périodique qui n'est pas une jongle mais dont les tous termes consécutifs u_k et u_{k+1} vérifient : $u_k \neq u_{k+1} + 1$.

4. a) Comment s'écrit la suite $\overline{1,2,3}$ si on supprime son premier terme ?

b) Supprimer le premier terme d'une suite (ex : $3,4,3,4,3,\cdots$ devient $4,3,4,\cdots$) ne change pas le fait que ce soit une jongle ou pas : expliquer pourquoi.

La nouvelle suite ainsi obtenue, est appelée un *décalage* de la suite initiale. Plus généralement, on appellera décalage de la suite (u_n) toute suite obtenue par suppression d'un ou de plusieurs termes initiaux : par exemple, les suites $\overline{4,1,4}$ et $\overline{1,4,4}$ sont des décalages de la suite $\overline{4,4,1}$.

c) Écrire tous les décalages possibles des suites $\overline{5,1}$ et $\overline{2,2,3,1}$.

d) En considérant ses décalages, montrer que la suite $\overline{92,57,93}$ n'est pas une jongle.

5. a) On considère une jongle (u_n) non constante. Montrer qu'il existe un décalage de (u_n) de la forme $\overline{a,b,\cdots}$ où a est le plus grand terme de la suite, et où b est strictement inférieur à $a - 1$.

On admet le théorème suivant : $\overline{a,b,\cdots}$ (où a est le plus grand terme de la suite et b est strictement inférieur à $a - 1$) est une jongle si et seulement si $\overline{b + 1, a - 1,\cdots}$ en est une également. Elles ont alors le même nombre de trajectoires. (On précise que les autres termes désignés dans ces expressions par « $\cdots$ » ne changent pas).

b) Prouver que $\overline{51,52,53}$ et $\overline{15,11}$ sont des jongles et calculer combien de trajectoires elles possèdent.

c) Montrer que $\overline{91,92,94}$ n'est pas une jongle.

d) Déterminer une jongle de période 3, à 4 trajectoires, contenant un « 2 ».

Partage équitable

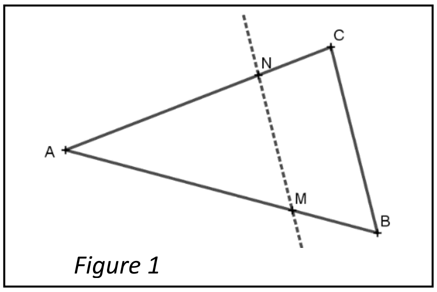


Figure 1

On désire partager un triangle ABC en deux parties de même aire à l'aide d'une droite parallèle à un des côtés, en utilisant **seulement** une règle **non graduée** et un compas.
On considère le point $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$, tels que la droite (MN) soit parallèle au côté $[BC]$, comme sur la *Figure 1* :

Préambule :

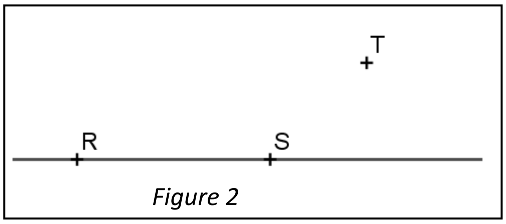


Figure 2

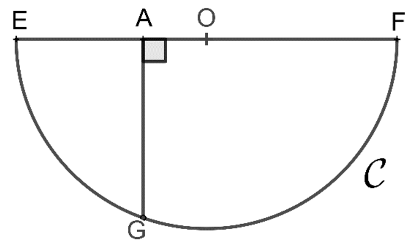
1. Déterminer une méthode pour tracer la droite perpendiculaire à (RS), passant par T, à l'aide des outils à disposition.
2. De même, déterminer une méthode permettant de tracer la parallèle à (RS) passant par T.

Partie A :
Dans toute cette partie, on considère que le triangle est rectangle en B. On note $\mathcal{A}_{AMN}$ l'aire du triangle AMN et $\mathcal{A}_{ABC}$ l'aire du triangle ABC.
1. Montrer que pour partager le triangle ABC avec la droite (MN) en deux parties de même aire, il faut que :
$$\mathcal{A}_{AMN} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC}$$
2. On note $k = \frac{AM}{AB}$. Montrer alors que $MN = kBC$.
3. En déduire que $\mathcal{A}_{AMN} = k^2\mathcal{A}_{ABC}$ et que, pour répondre au problème posé, il faut que $AM = \sqrt{\frac{1}{2}}AB$.

Partie B :

En traçant la hauteur issue de A dans un triangle ABC quelconque, montrer que la condition $AM = \sqrt{\frac{1}{2}}AB$ est suffisante pour s'assurer que la droite $(MN)//(BC)$ réponde au problème posé.

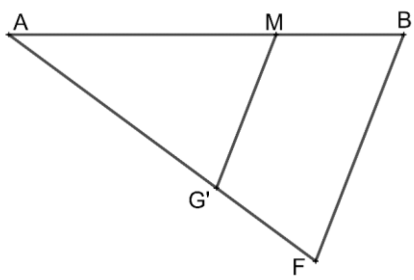
Partie C :



On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de diamètre $[EF]$ avec $A \in [EF]$, et $G \in \mathcal{C}$ tel que $(AG) \perp (EF)$, comme sur la figure ci-contre :
1. Montrer que le triangle EFG est rectangle en G.
2. En exprimant l'aire du triangle EFG de deux manières différentes, montrer que : $EG^2 \times GF^2 = AG^2 \times EF^2$
3. En partant de la relation précédente et en appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles EAG et AGF, montrer que :
$$AG^4 + EA^2 \times AF^2 = 2EA \times AF \times AG^2$$
4. A l'aide de la relation précédente et d'une identité remarquable, montrer que $AG^2 = EA \times AF$.
5. En déduire que, quel que soit la valeur $\alpha > 0$, si $AF = 4\alpha$ et si $EA = 2\alpha$ alors :

   le cercle $\mathcal{C}$ est de rayon 3α et $AG = \sqrt{\frac{1}{2}}AF$.

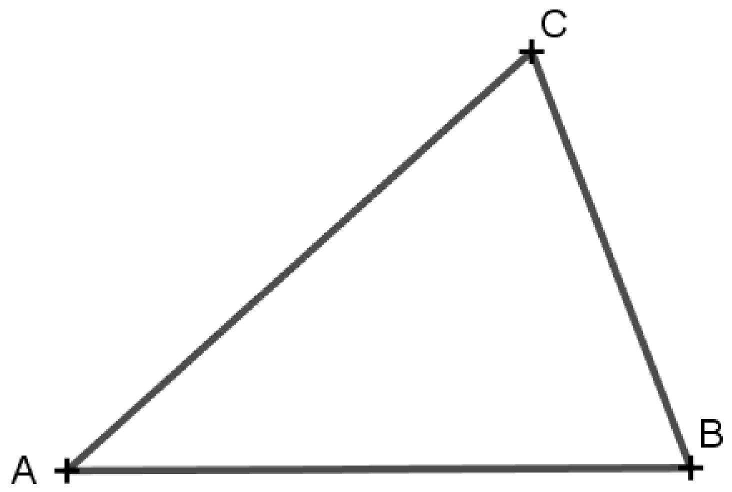
Partie D :



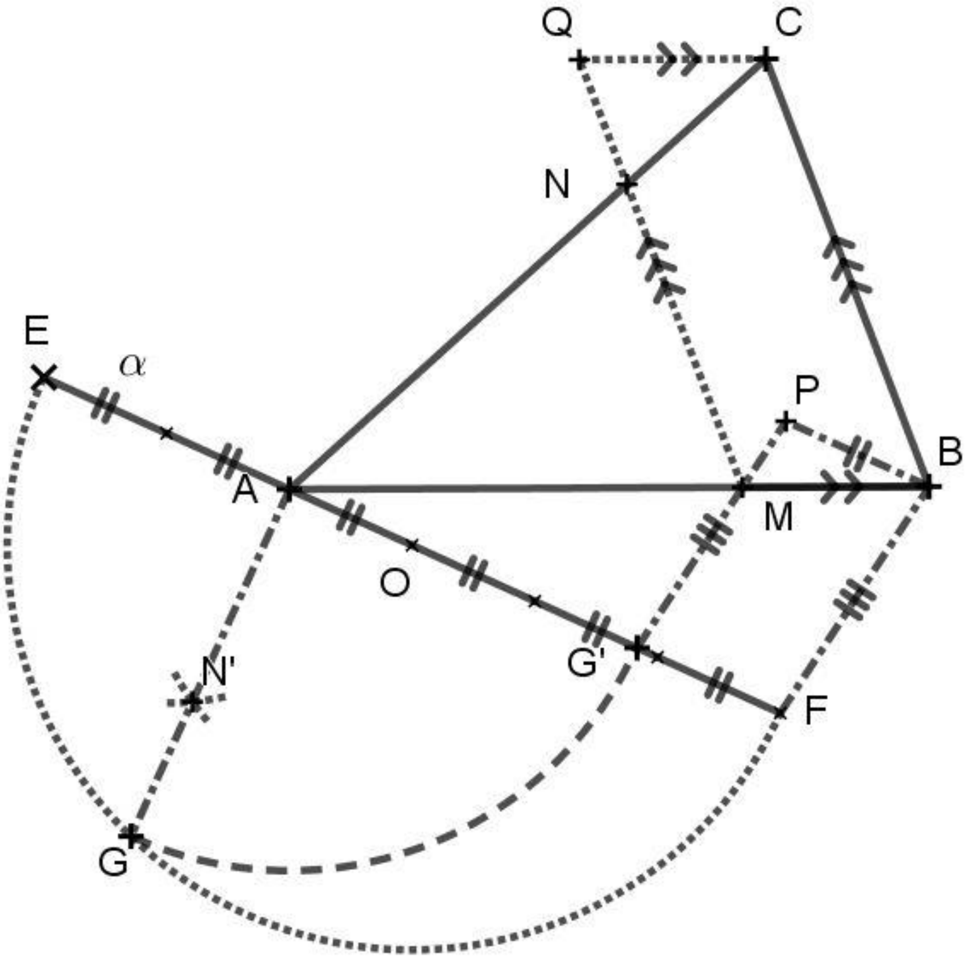
1. Dans la figure ci-contre on considère que les droites (MG') et (BF) sont parallèles. Montrer que si $AG' = xAF$ avec $x \in [0; 1]$, alors $AM = xAB$.
2. En déduire le tracé de la droite (MN) qui partage le triangle ABC fourni en annexe (à rendre avec la copie). On laissera apparent tous les tracés nécessaires à sa construction.

N° d'anonymat uniquement : ……………………………………

Annexe :



Tracé final possible :



Olympiades nationales de mathématiques 2023

ACADÉMIE DE NANCY-METZ
Liberté
Égalité
Fraternité

Académie de Nancy-Metz

Mardi 15 mars 2023 (matin)
Seconde partie - Exercices académiques
Élèves ne suivant pas la spécialité « mathématiques »

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »).

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

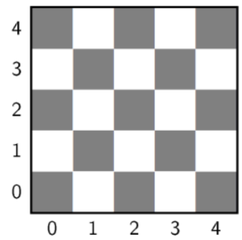
Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.
Les élèves qui travaillent en groupes doivent s'organiser pour rendre une copie commune au groupe.

Le problème des huit dames

On appelle « diagonale d'un échiquier » toute droite qui traverse au moins deux cases suivant la direction d'une diagonale commune à ces cases.
On dit qu'une dame en « menace » une autre lorsqu'elle est située sur la même ligne, sur la même colonne ou sur une même diagonale. Sur l'annexe 1, la dame symbolisée par ♕ menace toute dame qui serait placée sur une case traversée par une flèche.

Partie A : avec 4 dames

Dans cette partie, on considère une partie d'un échiquier constituée d'un carré comportant 16 cases. Les colonnes et les lignes sont numérotées, comme sur la figure ci-contre.



On veut placer 4 dames sur 4 cases différentes de cette partie d'échiquier. On veut de plus qu'aucune d'entre elles n'en menace une autre.

Comme il n'y a qu'une dame par colonne, on va symboliser la position des 4 dames par le quadruplet $(d_0\ ;\ d_1\ ;\ d_2\ ;\ d_3)$, où d_0 est le numéro de la ligne occupée par la dame présente sur la colonne n°0, d_1 est le numéro de la ligne occupée par la dame présente sur la colonne n°1, etc.

1. Dessiner la configuration correspondant au quadruplet $(0\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 2)$. Cette configuration est-elle une solution au problème posé ?

2. Même question avec le quadruplet $(0\ ;\ 1\ ;\ 3\ ;\ 2)$.

3. Prouver qu'aucun des quadruplets $(0\ ;\ d_1\ ;\ d_2\ ;\ d_3)$ n'apporte une solution au problème posé.

4. Trouver une solution au problème posé. Dessiner cette solution.

5. En déduire une deuxième solution au problème posé.

6. Prouver que le problème posé n'admet que les deux solutions trouvées précédemment.

7. On considère maintenant un carré de 25 cases et une cinquième dame. À partir de la réponse à la question 4, trouver un placement des 5 dames répondant aux contraintes.

Partie B : avec 8 dames

On veut maintenant placer huit dames sur un échiquier (qui comporte 64 cases), de façon à ce qu'aucune d'entre elles n'en menace une autre.

On représente une configuration des 8 dames par un 8-uplet $(d_0\ ;\ d_1\ ;\ d_2\ ;\ d_3\ ;\ d_4\ ;\ d_5\ ;\ d_6\ ;\ d_7)$.

1. Expliquer pourquoi on a $d_j \neq d_k$, pour $j \neq k$.

On superpose un repère orthonormé à l'échiquier, comme l'indique la figure de l'annexe 2.

On identifie la position de chaque dame au centre de la case qu'elle occupe.

2. Donner les coordonnées dans ce repère des 8 dames de la configuration codée par $(7\,;5\,;6\,;1\,;3\,;2\,;4\,;0)$. Cette configuration est-elle une solution au problème posé ?

3. Donner les coordonnées dans ce repère des 8 dames de la configuration codée par $(d_0\ ;\ d_1\ ;\ d_2\ ;\ d_3\ ;\ d_4\ ;\ d_5\ ;\ d_6\ ;\ d_7)$.

4. Une dame a pour coordonnées $(5\,;3)$. Donner l'équation réduite de chacune des 4 droites que les autres dames doivent éviter pour ne pas être menacées.

5. Donner les valeurs possibles de la pente de chacune des diagonales de l'échiquier.

6. On considère deux dames placées dans les colonnes j et k, avec $j \neq k$.

a) On cherche une condition nécessaire et suffisante sur les nombres j, k, d_j et d_k pour que ces dames soient sur une même diagonale de pente négative. Compléter l'égalité « $d_j + j = \cdots$ » pour exprimer cette condition.

b) De même, trouver une condition nécessaire et suffisante sur les nombres j, k, dj et d_k pour que ces dames soient sur une même diagonale de pente positive.

7. Utiliser la question précédente pour expliquer pourquoi $(5\,;0\,;4\,;1\,;7\,;2\,;6\,;3)$ est une solution au problème posé, puis pour expliquer pourquoi $(6\,;4\,;5\,;0\,;2\,;1\,;3\,;7)$ ne l'est pas.

8. En utilisant les symétries de la figure, déduire d'autres solutions au problème posé à partir de la solution $(5\,;0\,;4\,;1\,;7\,;2\,;6\,;3)$.

C’est de la balle !

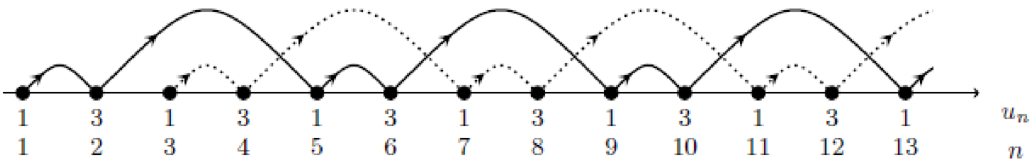
On s’intéresse aux suites d’entiers strictement positifs dites *périodiques*, comme par exemple : $1,2,4,1,2,4,1,2,4,\cdots$ (de période 3), $1,5,1,5,1,5\ \cdots$ (de période 2) ou encore $4,4,1,4,4,4,1,4,\cdots$ (de période 4). Plus précisément, une suite (u_n) est dite de période T si T est le plus petit entier strictement positif tel que pour tout entier $n > 0$, on a : $u_{n+T} = u_n$.

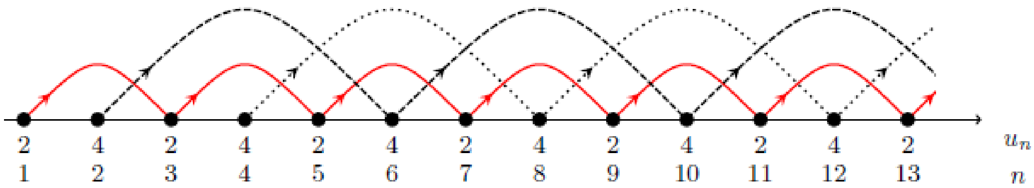
Puisque les termes se répètent, on notera : $1,5,1,5,1,5\ \cdots = \overline{1,5}$, ou encore $1,2,4,1,2,4,1,2,4,\cdots = \overline{1,2,4}$.

Cette écriture n’est pas unique (par exemple $\overline{4,1} = \overline{4,1,4,1}$) mais on utilisera de préférence la plus courte.

1. Déterminer les périodes des suites $\overline{1,3,1,3}$, $\overline{5,5,1}$ et $\overline{2,2,2}$.

2. Les graphiques ci-dessous ont été construit respectivement à partir des suites $\overline{1,3}$ et $\overline{2,4}$.





a) À partir des observations que vous ferez de ce graphique, construire celui de la suite $\overline{4,4,1}$. On utilisera des couleurs pour distinguer les différentes composantes et on placera 15 sommets, donc jusqu’à $n = 15$.

Les points noirs sont appelés les *sommets* du graphique. L’axe horizontal est l’axe du temps. Les courbes sont appelées *trajectoires*. Ainsi le graphique de $\overline{1,3}$ possède deux trajectoires, celui de $\overline{4,4,1}$ en possède trois.

Une suite est dite une *jongle* si les trajectoires n’ont pas de sommets communs.

b) Parmi les suites $\overline{1,2,3}$, $\overline{4,2,4}$ et $\overline{5,5,1}$, deux ne sont pas des jongles. Lesquelles ? Des arguments graphiques seront acceptés pour justifier la réponse.

c) Montrer que si (u_n) est une suite constante qui s’écrit $\overline{k}$, alors (u_n) est une jongle à k trajectoires.

Dans la suite on va établir plusieurs conditions pour qu’une suite périodique donnée soit une jongle.

3. a) Expliquer pourquoi, si dans la suite (u_n), il existe deux termes consécutifs u_k et u_{k+1} qui vérifient l’égalité $u_k = u_{k+1} + 1$, alors (u_n) n’est pas une jongle.

b) Donner un exemple de suite (u_n) périodique qui n’est pas une jongle mais dont les tous termes consécutifs u_k et u_{k+1} vérifient : $u_k \neq u_{k+1} + 1$.

4. a) Comment s’écrit la suite $\overline{1,2,3}$ si on supprime son premier terme ?

b) Supprimer le premier terme d’une suite (ex : $3,4,3,4,3,\cdots$ devient $4,3,4,\cdots$) ne change pas le fait que ce soit une jongle ou pas : expliquer pourquoi.

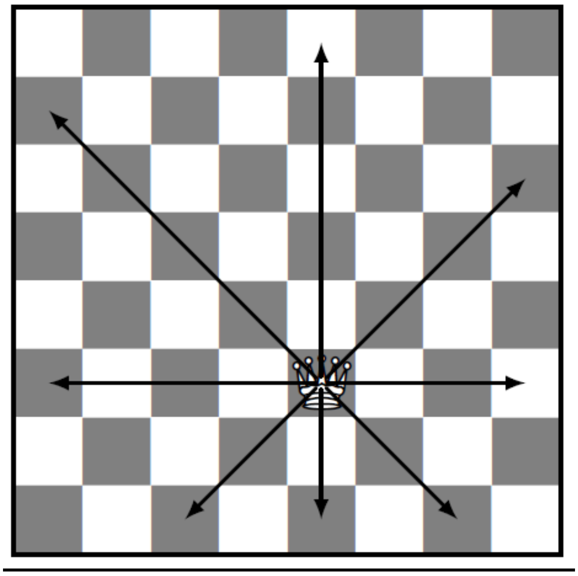
La nouvelle suite ainsi obtenue, est appelée un *décalage* de la suite initiale. Plus généralement, on appellera décalage de la suite (u_n) toute suite obtenue par suppression d’un ou de plusieurs termes initiaux : par exemple, les suites $\overline{4,1,4}$ et $\overline{1,4,4}$ sont des décalages de la suite $\overline{4,4,1}$.

c) Écrire tous les décalages possibles des suites $\overline{5,1}$ et $\overline{2,2,3,1}$.

d) En considérant ses décalages, montrer que la suite $\overline{92,57,93}$ n’est pas une jongle.

N° d'anonymat uniquement : ……………………………………

Annexe 1



Annexe 2 :