OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE NANCY-METZ
2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

Olympiades nationales de mathématiques 2021

ACADÉMIE DE NANCY-METZ
Liberté
Égalité
Fraternité

Académie de Nancy-Metz

Mardi 23 mars 2021 (après-midi)
Seconde partie - Exercices académiques
Elèves suivant la spécialité de mathématiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »).

Des consignes spécifiques liées au respect du protocole sanitaire en vigueur peuvent être rappelées.

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Les élèves qui travaillent en groupes doivent s'organiser pour rendre une copie commune au groupe.

Le sujet comporte une annexe à compléter et à rendre avec la copie en respectant l'anonymat.

Tableaux Harmonieux

Pour tout entier naturel n strictement positif, on appelle tableau de taille n, un tableau contenant n lignes et n colonnes numérotées de 1 à n. Par exemple, pour le $Tableau\ 1$, $n = 5$. Chaque case du tableau est soit vide, soit contient un entier compris entre 1 et $2n - 1$. Chaque case est repérée par un couple de nombres entiers appelés *indices de la case* dont la première valeur est le numéro de la ligne et la deuxième est le numéro de la colonne. Par exemple dans le $Tableau\ 1$: une seule case contient un 7. Celle-ci est repérée par les indices $(2; 3)$.

	1	2	3	4	5
1	6	5	1	2	1
2	8		7	1	4
3	3		9	9	9
4	4	9			5
5	4	3		3	1

Tableau 1

On dit qu'un nombre du tableau est *satisfaisant* si l'ensemble des indices des cases qu'il occupe contient au moins une fois, tous les nombres de 1 à n.

Par exemple, dans le $Tableau\ 1$:

- le nombre 3 est *satisfaisant* car les indices des cases qu'il occupe sont $(3; 1)$, $(5; 2)$ et $(5; 4)$ et on y retrouve tous les nombres de 1 à 5.
- Le nombre 9 n'est pas *satisfaisant* car les indices des cases qu'il occupe sont $(4; 2)$, $(3; 3)$, $(3; 4)$ et $(3; 5)$ et ne contiennent pas le nombre 1.

On dit qu'un tableau de taille n est *harmonieux* si tous les nombres de 1 à $2n - 1$ sont satisfaisants.

Préliminaires :

1. Justifier que le $Tableau\ 2$ est harmonieux.
2. Justifier que le $Tableau\ 3$ n'est pas harmonieux.
3. Le $tableau\ 4$ est-il harmonieux ? Justifier la réponse.

3	1
2	3

Tableau 2

1	2
3	3

Tableau 3

4	2	1
1	3	5
3	4	2

Tableau 4

Les parties I et II ci-dessous peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie I :

1. Étude du cas des tableaux de taille 3.

a. Montrer que dans un tableau de taille 3, un nombre ne peut pas être satisfaisant s'il occupe une seule case.

b. En déduire qu'il n'existe pas de tableau harmonieux de taille 3.

2. Soit n un nombre impair noté $2k + 1$ avec $k \geq 1$. On considère un tableau de taille n.

a. Montrer que pour qu'un nombre soit satisfaisant, il doit occuper au moins $k + 1$ cases.

b. En déduire qu'il n'existe pas de tableau harmonieux de taille impaire supérieure ou égale à 3.

3. Soit n un nombre pair noté $2k$ avec $k \geq 1$. On suppose qu'il existe au moins un tableau harmonieux de taille n. On appelle « cases diagonales », les cases d'indices $(j; j)$ pour tout j allant de 1 à n.

a. Montrer qu'il n'existe pas de tableau harmonieux laissant toutes les cases diagonales vides.

Pour tout i entre 1 et $2n - 1$, on note :

d_i le nombre de cases diagonales occupées par i ;
c_i le nombre de cases non diagonales occupées par i.

b. Montrer que pour tout entier i compris entre 1 et $2n - 1$, on a : $2c_i + d_i \geq 2k$.

c. On note $C = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2n-1}$ et $D = d_1 + d_2 + \cdots + d_{2n-1}$. Montrer que : $2C + D \geq 8k^2 - 2k$.

d. En considérant le nombre total de cases du tableau, montrer que : $2C + D \leq 8k^2 - 2k$.

e. En déduire qu'un tableau harmonieux ne peut pas avoir de cases vides.

f. Montrer qu'un nombre ne peut pas occuper un nombre impair de cases diagonales.

Partie II :

1. Compléter de deux manières différentes le $Tableau\ 5$ pour qu'il soit harmonieux. Les deux solutions sont à reproduire sur votre copie.

2. Construire, sur votre copie, un tableau harmonieux de taille $n = 6$ tel que : si $i \neq j$; la somme des nombres qui occupent les cases d'indices $(i; j)$ et d'indices $(j; i)$ est toujours égale à $2n - 1$.

1	2	3	4
5			
6			
7			

Tableau 5

Nombres octogonaux

On construit, à l'aide de billes, des octogones, c'est-à-dire des polygones à huit côtés, dont chaque côté contient le même nombre de billes. On construit un premier octogone P_2, dont chaque côté contient deux billes (voir annexe, Fig. 1). En s'appuyant sur cet octogone, on construit un second octogone, dont chaque côté contient trois billes. On note P_3 la construction constituée de deux octogones emboîtés (voir annexe, Fig. 2). On reproduit cette construction ainsi de suite. Par exemple, P_4 comptera trois octogones emboîtés les uns dans les autres.
On note O_n le nombre de billes nécessaires pour obtenir la construction P_n dont chaque côté du plus grand polygone est composé de *n* billes. On dit que O_n est le ***n*-ième nombre octogonal**. On a par exemple : $O_2 = 8$ et $O_3 = 21$.

Les parties II et III du problème peuvent être traitées de manière indépendante en utilisant les résultats de la partie I.

Partie I – Une formule pour déterminer le *n*-ième nombre octogonal

I-1. a) Compléter la représentation de P_4, donnée en annexe (Fig. 3).
b) En déduire O_4, le quatrième nombre octogonal.
c) Combien de billes faut-il ajouter à P_3 pour obtenir P_4 ?

I-2. On se donne un entier *n* supérieur ou égal à 2, et on suppose que la construction P_n est réalisée. Justifier l'égalité $O_{n+1} = O_n + 6n + 1$.

I-3. On admet dans cette question que, pour tout entier $n \geq 2$: $2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{(n-2)(n+1)}{2}$
a) Montrer que pour tout entier pour $n \geq 2$,
$$(6 \times 2 + 1) + (6 \times 3 + 1) + \cdots + (6 \times (n-2) + 1) + (6 \times (n-1) + 1) = 3n^2 - 2n - 8$$
b) On pose, pour tout entier $n \geq 3$, $S_n = O_n - O_{n-1}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$,
$$S_3 + S_4 + \cdots + S_n = O_n - 8.$$
c) En déduire que, pour $n \geq 2$,
$$O_n = n(3n-2). \qquad \textbf{(1)}$$

Partie II – Une équation de Pell-Fermat

On suppose qu'on dispose exactement de c^2 billes, où c est un entier naturel non nul, et on souhaite construire la figure P_n en utilisant toutes les billes. On se demande s'il existe un couple d'entiers $(n\,; c)$ pour lequel c'est possible. On pourra librement utiliser la formule **(1)** de la partie I.

II-1. a) Démontrer que le problème revient à résoudre l'équation suivante, d'inconnue un couple d'entiers $(n\,; c)$:
$$(3n-1)^2 - 3c^2 = 1. \qquad \textbf{(2)}$$
b) Démontrer qu'il est impossible, avec $c^2 = 144$, de réaliser une construction P_n sans laisser de billes de côté.
c) Démontrer qu'il est impossible de construire P_{30} avec exactement c^2 billes.

Dans toute la suite, on considère l'équation suivante, d'inconnue un couple d'entiers positifs $(X\,;\,Y)$:
$$X^2 - 3Y^2 = 1. \qquad \textbf{(3)}$$

II-2. Déterminer les couples qui sont solutions de l'équation **(3)**, parmi les couples : (1 ; 0), (2 ; 1) et (3 ; 4).

II-3. On considère $(X_1\,;\,Y_1)$ et $(X_2\,;\,Y_2)$ deux couples de solutions de **(3)**.
a) Déterminer un couple d'entiers $(X_3\,;\,Y_3)$ tel que $(X_1 + Y_1\sqrt{3})(X_2 + Y_2\sqrt{3}) = (X_3 + Y_3\sqrt{3})$.
b) Montrer que le couple $(X_3\,;\,Y_3)$ ainsi obtenu est une solution de l'équation **(3)**.

II-4. En vous aidant des questions précédentes, déterminer un nouveau couple solution de l'équation **(3)**.

II-5. Donner un couple d'entiers non nuls $(n\,; c)$ solution de l'équation **(2).**

II-6. Démontrer que l'équation **(2)** admet une infinité de solutions.

Partie III – Un algorithme

Écrire un algorithme, en langage naturel ou en Python, qui affiche tous les nombres octogonaux inférieurs ou égaux à un entier *M* donné. On pourra librement utiliser la relation **(1)** de la partie I.

Annexe

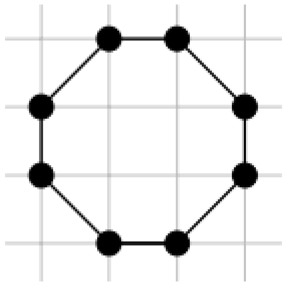

Fig. 1 : représentation de P_2

$O_2 = 8$

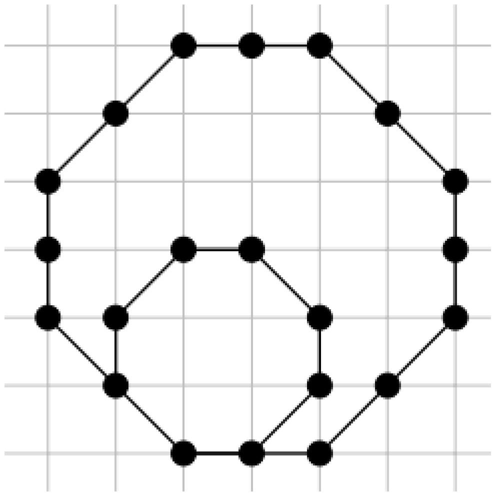

Fig. 2 : représentation de P_3

$O_3 = 21$

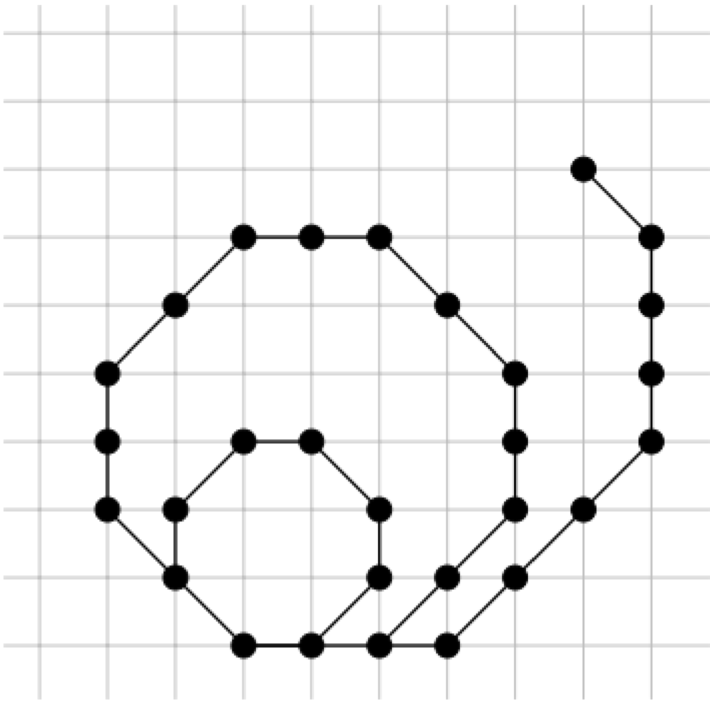

Fig. 3 : représentation de P_4 (à compléter)