OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

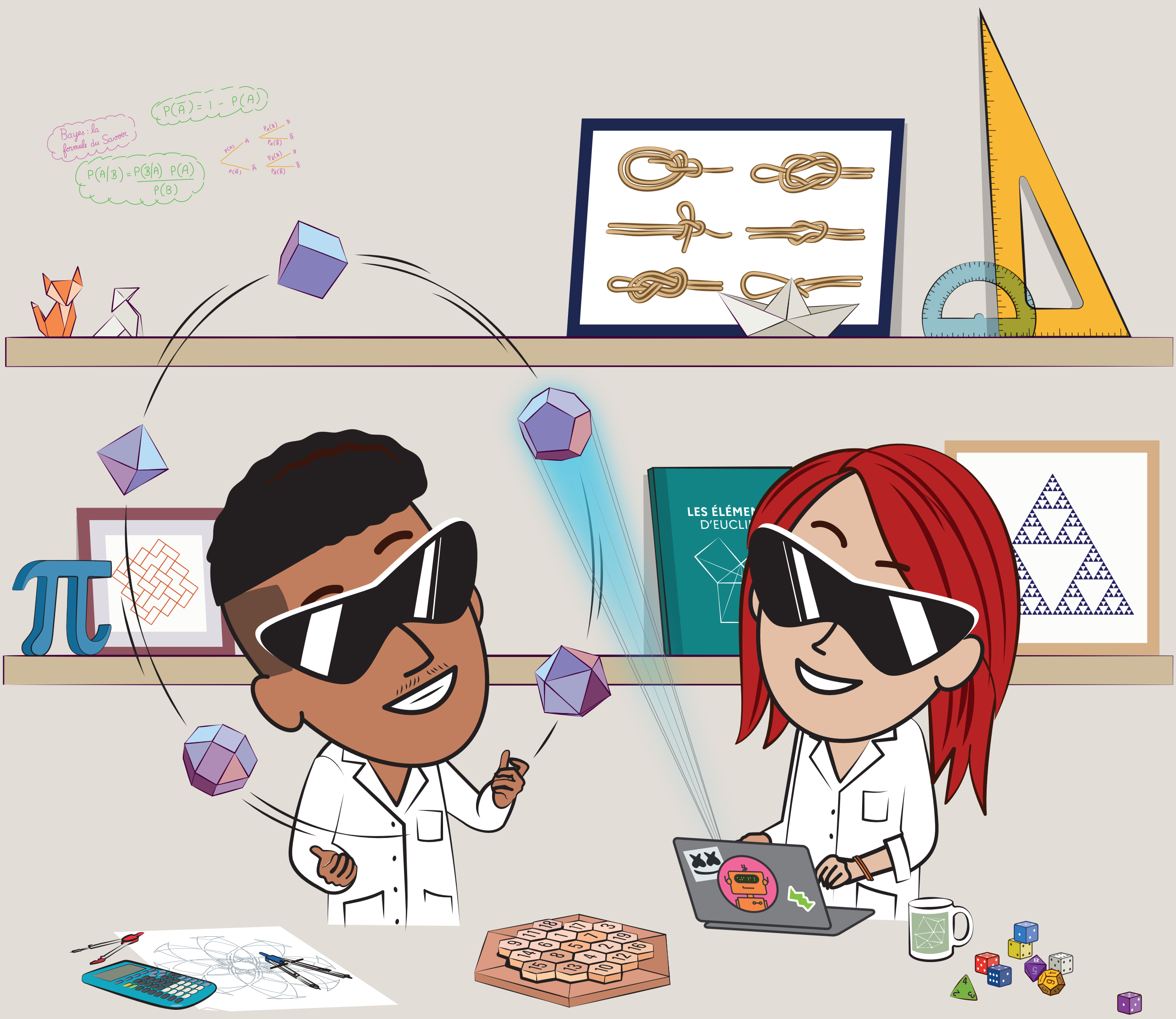
ACADÉMIE DE NANCY-METZ 2023

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

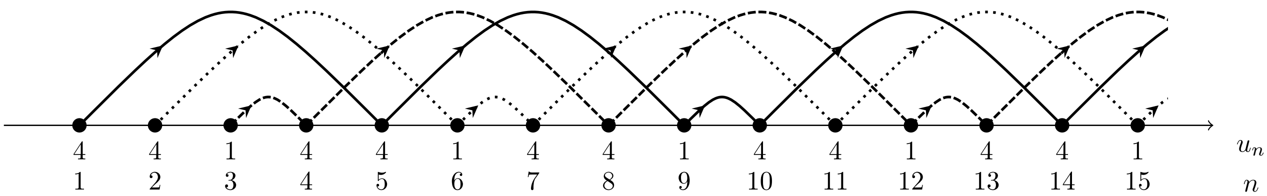
OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

C'est de la balle !

1. • $\overline{1,3,1,3} = 1,3,1,3,1,3,\ldots$ de période 2
   • $\overline{5,5,1} = 5,5,5,1,5,5,1,5,5,1\ldots$ de période 3
   • $\overline{2,2,2} = 2,2,2,2,2,\ldots$ de période 1
2. a) Graphique de la suite $\overline{4,4,1}$:



   b) • $\overline{4,2,4}$ et $\overline{5,5,1}$ ne sont pas des jongles (collision en $n = 7$)
   • $\overline{1,2,3}$ est une jongle (mais on ne l'a pas démontré)

   c) Soit (u_n) est une suite constante $u_n = k$: supposons que deux trajectoires admettent un sommet commun. En remontant k rang en arrière on voit que ces trajectoires proviennent du même sommet : de proche en proche, elles partent du même sommet initial... C'est contraire aux hypothèses.
   On en déduit que les trajectoires sont deux à deux distinctes et que (u_n) est une jongle à k trajectoires.
3. a) Si $u_k = u_{k+1} + 1$, alors les trajectoires issues des sommets u_k et u_{k+1} sont différentes (car $u_k \neq 1$) et aboutissent au même sommet : ce n'est pas une jongle.

   b) Exemple de suite (u_n) périodique qui n'est pas une jongle mais dont tous les termes consécutifs u_k et u_{k+1} vérifient $u_k \neq u_{k+1} + 1$: $\overline{3,4,1}$.
4. a) Si on supprime son premier terme, la suite $\overline{1,2,3} = 1,2,3,1,2,3,\ldots$ s'écrit $2,3,1,2,3,1,\ldots = \overline{2,3,1}$.

   b) Supprimer le premier terme d'une suite revient graphiquement à supprimer le premier sommet et le premier "saut" mais pas le fait que les trajectoires se rencontrent (ou pas).

   c) Décalages possibles des suites :
   • $\overline{5,1} \mapsto \overline{1,5}$
   • $\overline{2,2,3,1} \mapsto \overline{2,3,1,2} \mapsto \overline{3,1,2,2} \mapsto \overline{1,2,2,3}$

   d) Si $\overline{92,57,93}$ était une jongle, alors ses décalages en seraient aussi.
   Or $\overline{57,93,92}$ n'est pas une jongle d'après 3a donc $\overline{92,57,93}$ non plus.
5. a) Par décalage successifs on place le plus grand terme a au début avec un terme différent en deuxième position (c'est possible vu que (u_n) n'est pas constante). Puisque (u_n) est une jongle ce deuxième terme b est strictement inférieur à $a - 1$.

   b) On notera la notation $\overline{a,b,\ldots} \sim \overline{b+1,a-1,\ldots}$ et $\mapsto$ pour un décalage.
   • $\overline{51,52,53} \mapsto \overline{53,51,52} \sim \overline{52,52,52} = \overline{52}$: jongle à 52 trajectoires (!)
   • $\overline{15,11} \sim \overline{12,14} \mapsto \overline{14,12} \sim \overline{13,13}$: jongle à 13 trajectoires.

   c) $\overline{91,92,94} \mapsto \overline{94,91,92} \sim \overline{92,93,92}$ n'est pas une jongle d'après 3a.

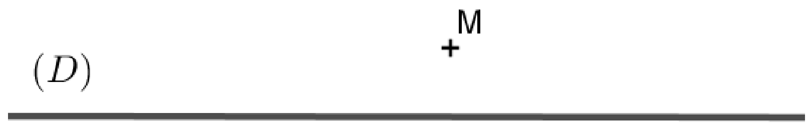
   d) On peut partir de $\overline{4,4,4}$ et procéder "à l'envers" par rapport aux questions précédentes :
   $\overline{4,4,4} \sim \overline{5,3,4} \mapsto \overline{4,5,3} \sim \overline{6,3,3} \mapsto \overline{3,6,3} \sim \overline{7,2,3}$.
   $\overline{7,2,3}$ est donc une jongle à 4 trajectoires, de période 3 et contenant un "2"

Découper un triangle en deux

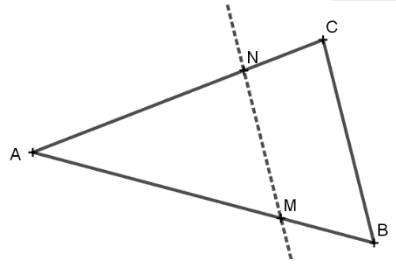
On désire partage un triangle ABC en deux parties de même aire à l'aide d'une droite, en utilisant seulement une règle non graduée et un compas. On admettra dans ce sujet, qu'une telle droite existe.

<u>Préambule :</u>

1. Montrer que si I est le milieu de $[AB]$, alors (CI) partage le triangle en deux parties de même aire.
2. Déterminer une méthode permettant de tracer la parallèle à (D) passant par M à l'aide des outils à disposition.
3. Déterminer également une méthode pour tracer la droite perpendiculaire à (D), passant par M.



Dans tout la suite du sujet, la droite utilisée est notée (MN), le point $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$, et doit être parallèle au côté $[BC]$, comme sur la figure ci-contre :



<u>Partie A :</u>

Dans toute cette partie, on considère que le triangle est rectangle en B. On note $\mathcal{A}_{AMN}$ l'aire du triangle AMN et $\mathcal{A}_{ABC}$ l'aire du triangle ABC.

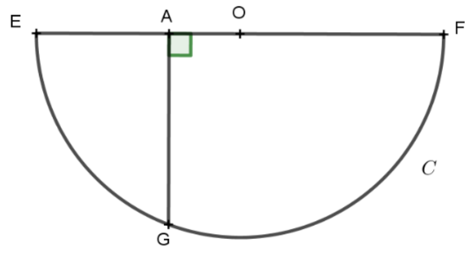
1. Montrer que : partager le triangle ABC avec la droite (MN) en deux parties de même aire est équivalent à :
$$\mathcal{A}_{AMN} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC}$$
2. On note $\lambda = \frac{AM}{AB}$. Montrer alors que $MN = \lambda BC$.
3. En déduire que $\mathcal{A}_{AMN} = \lambda^2 \mathcal{A}_{ABC}$ puis que, pour répondre au problème posé, il faut et il suffit que :
$$AM = \sqrt{\frac{1}{2}}AB$$

<u>Partie B :</u>

En traçant la hauteur issue de A dans un triangle ABC quelconque, montrer que la condition $AM = \sqrt{\frac{1}{2}}AB$ est suffisante pour s'assurer que la droite $(MN)//(BC)$ réponde au problème posé.

<u>Partie C :</u>

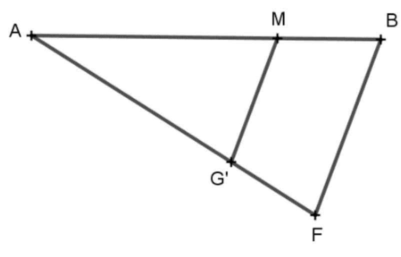
On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de diamètre $[EF]$ avec $A \in [EF]$, et $G \in \mathcal{C}$ tel que $(AG) \perp (EF)$, comme sur la figure ci-contre :



1. Montrer que le triangle EFG est rectangle en G.
2. En exprimant l'aire du triangle EFG de deux manières différentes, montrer que : $EG^2 \times GF^2 = AG^2 \times EF^2$
3. En partant de la relation précédente et en appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles EAG et AGF, montrer que :
$$AG^4 + EA^2 \times AF^2 = 2EA \times AF \times AG^2$$
4. A l'aide de la relation précédente et d'une identité remarquable, montrer que $AG^2 = EA \times AF$.
5. En déduire que, quelque soit la valeur $\alpha > 0$, si $AF = 4\alpha$ et si $EA = 2\alpha$ alors :

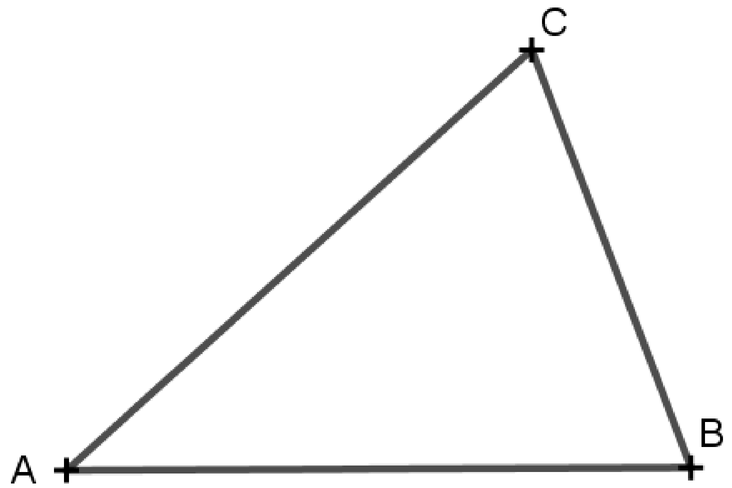
   le cercle $\mathcal{C}$ est de rayon 3α et $AG = \sqrt{\frac{1}{2}}AF$.

<u>Partie D :</u>



1. Dans la figure ci-contre on considère que les droites (MG') et (BF) sont parallèles. Montrer que si $AG' = xAF$ avec $x \in [0;1]$, alors $AM = xAB$
2. En déduire le tracé de la droite (MN) qui partage le triangle ABC fourni en annexe (à rendre avec la copie). On laissera apparent tous les tracés nécessaires à sa construction.

Annexe :



Tracé final possible :