OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE NANCY-METZ 2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

NANCY-METZ 2022

Exercice 1 : Fusée Thésée

Partie I : Représentation « petit-boutiste »

1. Il s'agit des entiers 201, 95 et 210.

2. Non, la somme de deux entiers strictement plus petits que 1000 peut être supérieure ou égale à 1000. Un contre-exemple est : $600 + 400 = 1000$.

3. Ci-contre, un exemple d'algorithme Python permettant de tester si une somme s'écrit ou non avec trois chiffres, et son exécution pour tester les sommes $600 + 400$ et $599 + 400$.

```
>>> def troichi(a1,a2,a3,b1,b2,b3):
        x=100*a3+10*a2+a1
        y=100*b3+10*b2+b1
        if x+y<1000:
                print("True")
        else:
                print("False")

>>> troichi(0,0,6,0,0,4)
False
>>> troichi(9,9,5,0,0,4)
True
```

Partie II : Représentation « virgule flottante »

1. Le triplet $(1, 0, 2)$ représente l'entier $(10 \times 1 + 0) \times 10^2 = 1000$.

Le triplet $(0, 9, 5)$ représente l'entier $(10 \times 9 + 5) \times 10^0 = 95$.

Le triplet $(0, 1, 2)$ représente l'entier $(10 \times 0 + 1) \times 10^2 = 100$.

Le triplet $(5, 4, 3)$ représente l'entier $(10 \times 5 + 4) \times 10^3 = 54000$.

2. L'entier 100 par exemple peut s'écrire $(10 \times 1 + 0) \times 10^1 = 100$ et $(10 \times 0 + 1) \times 10^2 = 100$.

100 est représenté aussi bien par le triplet $(1, 0, 1)$ que par le triplet $(0, 1, 2)$.

3.a. L'entier représenté par le triplet (a_1, a_2, a_3) est le produit du nombre qui s'écrit $\overline{a_1 a_2}$ en numération décimale (c'est un entier compris entre 0 et 99) par le nombre 10^{a_3} (qui est une puissance de 10).
Quel que soit ce triplet, d'une part $\overline{a_1 a_2} \leq 99$ et d'autre part $10^{a_3} \leq 10^9$ donc $\overline{a_1 a_2} \times 10^{a_3} \leq 99 \times 10^9$.
Quel que soit le triplet (a_1, a_2, a_3), le nombre qu'il représente est inférieur ou égal au nombre représenté par le triplet $(9, 9, 9)$.

Le plus grand entier exprimable en virgule flottante est l'entier $M = 99 \times 10^9 = 99\,000\,000\,000$.

3.b. Sont exprimables les entiers qui sont produit d'un entier compris entre 0 et 99 et d'une puissance de 10 au plus égale à la puissance neuvième.

- L'entier 121 n'est pas exprimable en virgule flottante car il s'écrit avec trois chiffres non nuls. Or, un entier exprimable en virgule flottante s'écrit avec au plus deux chiffres non nuls, les chiffres a_1 et a_2.
- $12000 = (10 \times 1 + 2) \times 10^3$ est représenté par le triplet $(1, 2, 3)$.
- 100 est représenté par deux triplets différents (voir **question 2**).
- $990\,000\,000\,000 = 10M > M$ est trop grand pour être représenté en virgule flottante.

3.c. Tous les entiers qui s'écrivent avec deux chiffres $\overline{a_1 a_2}$, c'est-à-dire qui sont compris entre 0 et 99 sont exprimables et sont représentés par le triplet $(a_1, a_2, 0)$. L'entier 100 est lui aussi exprimable.
L'entier 101 ne l'est pas car il n'est pas le produit d'un entier compris entre 0 et 99 et d'une puissance de 10.

Le plus petit entier non exprimable en virgule flottante est l'entier $m = 101$.

3.d. Tout triplet (a, b, c) appartenant à $\{0, 1, \ldots, 9\}^3$ représente un entier en virgule flottante. Il y a $10^3 = 1000$ triplets possibles.
Cependant, certains entiers ont deux représentations différentes. Ce sont les 90 entiers $a \times 10^{c+1}$ qui s'écrivent des deux manières suivantes : $(10 \times a + 0) \times 10^c = (10 \times 0 + a) \times 10^{c+1} = a \times 10^{c+1}$ où a prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, 9\}$ et où c prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, 8\}$ (car il faut que $c + 1 \leq 9$).
Ces entiers-là étant représentés deux fois :

Il y a $1000 - 90 = 910$ entiers exprimables en virgule flottante.

4.a. $T(11) = 11$ car 11 est exprimable comme d'ailleurs tous les entiers < 100.
Si un entier n plus petit que M s'écrit avec c chiffres $(11 \geq c \geq 3)$, on peut écrire sa division euclidienne par 10^{c-2}, soit $n = q \times 10^{c-2} + r$. Le quotient q de cette division euclidienne est un entier qui s'écrit avec deux chiffres et la troncature de n est le nombre $q \times 10^{c-2} = n - r$. Ainsi par exemple :

$105 = 10 \times 10 + 5$ donc $T(105) = 10 \times 10 = 100$.

$4210 = 42 \times 100 + 10$ donc $T(4210) = 42 \times 100 = 4200$.

4.b. La partie entière du logarithme[1] à base 10 d'un entier naturel non nul n donne le nombre de chiffres de cet entier diminué d'une unité. La première ligne de l'algorithme **tronquer** ci-contre calcule ce nombre de chiffres.
Nous calculons ensuite le reste r de la division euclidienne de n par le nombre 10^{c-2}. La troncature de n est le nombre $t = n - r$. Cet algorithme fonctionne pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq M$.
	<pre>>>> from math import log10
	>>> def tronquer(n):
	        c=int(log10(n))+1
	        r=n%(10**(c-2))
	        t=n-r
	        print(t)
	
	>>> tronquer(11)
	11
	>>> tronquer(105)
	100
	>>> tronquer(4210)
	4200
	>>> tronquer(2023)
	2000</pre>

4.c. Voici cependant, par une autre méthode, un algorithme qui a les deux fonctions à la fois de troncature et de représentation. Nous profitons du fait qu'il n'y a « pas beaucoup » d'entiers exprimables pour chercher, exhaustivement, quel est le plus grand qui est inférieur ou égal à n. Avec cette méthode, il n'est pas nécessaire de faire appel à des fonctions mathématiques sophistiquées. Quand n n'est pas exprimable en virgule flottante, l'algorithme en donne la troncature. Il donne ensuite une représentation, soit de n lui-même si cet entier est exprimable, soit de sa troncature.	<pre>>>> def repres(n):
	        t=0
	        r=[0,0,0]
	        for a in range(0,10):
	            for b in range(0,10):
	                for c in range(0,10):
	                    x=(10*a+b)*(10**c)
	                    if x>t and x<=n:
	                        t=x
	                        r=[a,b,c]
	        if t<n:
	            print("La troncature de",n,"est",t)
	        print("Sa représentation est",r)
	
	>>> repres(11)
	Sa représentation est [1, 1, 0]
	>>> repres(105)
	La troncature de 105 est 100
	Sa représentation est [0, 1, 2]
	>>> repres(4210)
	La troncature de 4210 est 4200
	Sa représentation est [4, 2, 2]</pre>

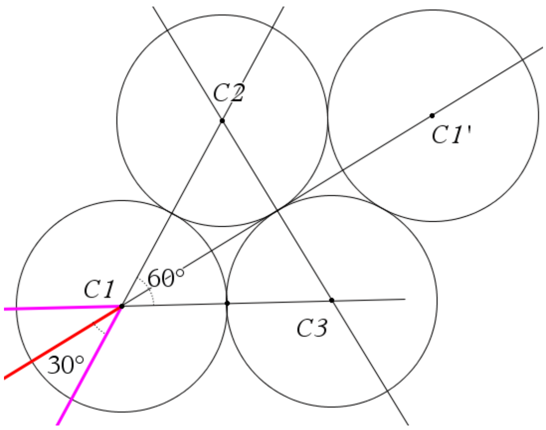
5. Un exemple d'algorithme attendu dans cette question. Nous reprenons la méthode de la question **4.c** pour proposer une représentation de la somme des deux entiers en jeu. Cette somme peut être tronquée ou non tronquée.	<pre>>>> def addition(a1,a2,a3,b1,b2,b3):
	        n=(10*a1+a2)*(10**a3)
	        m=(10*b1+b2)*(10**b3)
	        print("m=",m)
	        print("n=",n)
	        s=n+m
	        print("n+m=",s)
	        repres(s)
	
	>>> addition(5,6,4,3,4,3)
	m= 34000
	n= 560000
	n+m= 594000
	La troncature de 594000 est 590000
	Sa représentation est [5, 9, 4]
	>>> addition(4,1,4,3,7,4)
	m= 370000
	n= 410000
	n+m= 780000
	Sa représentation est [7, 8, 4]</pre>

[1] Voir par exemple l'article Wikipedia https://fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme_d%C3%A9cimal à son propos.

Exercice 2 : Découper la pièce montée

1. Les trois cercles étant deux à deux tangents, le triangle $C_1C_2C_3$ est un triangle équilatéral de côté $2r$. Ses angles de sommets C_1, C_2 et C_3 ont chacun pour mesure 60°. Si on trace les droites (C_2C_1), (C_3C_1), et (C_2C_3), ces droites déterminent des secteurs circulaires d'angle au centre 60° (à l'exemple du secteur magenta ci-contre, déterminé par les deux droites (C_2C_1) et (C_3C_1) sur le cercle de centre C_1).

Nous pouvons ainsi découper une part représentant un sixième du gâteau.

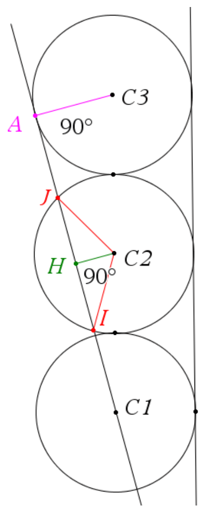


2. Construisons le cercle (C'_1) symétrique du cercle (C_1) par rapport à la droite (C_2C_3). La réflexion d'axe (C_2C_3) laissant les cercles (C_2) et (C_3) globalement invariants et conservant les contacts, ce cercle est un quatrième cercle tangent, comme l'est le cercle (C_1), aux cercles (C_2) et (C_3). Le triangle $C'_1C_2C_3$ est un triangle équilatéral, symétrique de $C_1C_2C_3$ par rapport à la droite (C_2C_3). Dans le triangle $C_1C_2C_3$, la droite $(C_1C'_1)$ est à la fois médiatrice du côté $[C_2C_3]$ et bissectrice de l'angle de sommet C_1. La droite $(C_1C'_1)$ partage le secteur circulaire magenta déterminé dans la question précédente en deux secteurs isométriques d'angle au centre 30°.

Nous pouvons ainsi découper deux parts représentant chacune un douzième du gâteau.

3.a. On sait que la tangente (T) à un cercle de centre O en un point M de ce cercle est la perpendiculaire en M à la droite (OM). Dans notre contexte, la droite (AC_1) étant la tangente en A au cercle (C_3), elle est perpendiculaire en A à (AC_3).

Les droites (HC_2) et (AC_3) sont toutes deux perpendiculaires à une même droite, la droite (AC_1) : elles sont parallèles.



3.b. Le triangle AC_1C_3 est un triangle rectangle en A dans lequel $AC_3 = r$.

Le point C_2 est le milieu du segment $[C_1C_3]$. La droite (C_2H) passe par le milieu de $[C_1C_3]$ et est parallèle au côté $[AC_3]$: c'est une « droite des milieux », le point H est milieu du côté $[AC_1]$.

D'après le « deuxième théorème des milieux[2] », $HC_2 = \frac{1}{2}AC_3 = \frac{r}{2}$.

[2] Deuxième théorème des milieux : « Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté. »

3.c. Le triangle IHC_2 est rectangle en C_2 et son hypoténuse $IC_2 = r$ a une longueur double de la longueur HC_2.

$$\cos\widehat{IC_2H} = \frac{HC_2}{IC_2} = \frac{1}{2}$$

3.d. L'angle $\widehat{IC_2H}$, ayant pour cosinus $\frac{1}{2}$, a pour mesure 60°. Or, dans le triangle isocèle IC_2H, la hauteur (C_2H) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{IC_2J}$ de sommet C_2. Cet angle $\widehat{IC_2J}$ a pour mesure le double de celle de $\widehat{IC_2H}$, soit 120°. Les demi-droites $[C_2I)$ et $[C_2J)$ déterminent sur le cercle (C_2) un secteur circulaire d'angle au centre 120° :

Ce secteur circulaire a pour aire le tiers de l'aire du disque (C_2). Cette construction permet de découper un gâteau en tiers.

4.a. La distance entre deux centres consécutifs des différents cercles (C_k) est égale à la longueur d'un diamètre de l'un de ces cercles, c'est-à-dire à $2r$.

Nous en déduisons que pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$, $C_1C_k = (k-1) \times (2r) = 2(k-1)r$.

En particulier : $C_1C_n = 2(n-1)r$.

Toutes les droites (C_kH_k) sont perpendiculaires à la même droite (C_1H_n) : elles sont parallèles entre elles, en particulier elles sont parallèles à la droite (C_nH_n).

(NB. Nous avons noté par souci d'harmonisation des notations $H_n = H$).

Le triangle $C_1C_kH_k$ est une réduction du triangle $C_1C_nH_n$ dans le rapport de leurs côtés homologues

$$\frac{C_1C_k}{C_1C_n} = \frac{2(k-1)r}{2(n-1)r} = \frac{k-1}{n-1}$$

Nous en déduisons que : $\frac{H_kC_k}{H_nC_n} = \frac{H_kC_k}{r} = \frac{k-1}{n-1}$ et par conséquent que : $H_kC_k = \frac{k-1}{n-1} \times r$

Plaçons-nous maintenant dans le triangle rectangle C_kH_kI. Nous connaissons la longueur de son hypoténuse $IC_k = r$ et celle de son côté $[H_kC_k]$. Nous obtenons :

$$\cos\widehat{I_kH_kC_k} = \frac{H_kC_k}{I_kC_k} = \frac{k-1}{n-1}$$

4.b. L'angle au centre $\widehat{I_kH_kJ_k}$ est égal au double de l'angle $\widehat{I_kH_kC_k}$, pour des raisons analogues à celles indiquées à la **question 3.b.** La mesure de cet angle est 2arc cosinus $\left(\frac{k-1}{n-1}\right)$, le tout étant exprimé en degrés. Sachant que $51{,}42 < \frac{360}{7} < 51{,}43$, nous retiendrons à coup sûr les cas où l'angle au centre est entre 50,5 et 52,4.

NB. Nous devrons importer avec Python la fonction « acos » qui renvoie la mesure géométrique en radians de l'angle dont le cosinus est donné. Puis nous devrons convertir en degrés.

Un exemple d'algorithme.

L'algorithme affiche les valeurs :

$k = 10$; $n = 11$

```
>>> from math import acos,pi
>>> def chercherpart():
        for n in range(3,21):
                for k in range(2,n):
                        t=acos((k-1)/(n-1))*180/(pi)
                        if abs(2*t-360/7)<1:
                                print(k,n)

>>> chercherpart()
10 11
```

Une calculatrice nous indique qu'en effet l'angle au centre associé est dans la fourchette prévue :

$51{,}6 < 2\arccos\left(\frac{9}{10}\right) < 51{,}7$. Cette paire (k, n) que l'algorithme a affichée convient.

5. Nous constatons avec les valeurs affichées que : $n \times k = 11 \times 10 = 110.$

Le produit ne pouvait pas être égal à $91 = 7 \times 13$ qui aurait correspondu à $k = 7$; $n = 13$ (ne convient pas) ni à $105 = 7 \times 15$ qui aurait correspondu à $k = 7$; $n = 15$ (ne convient pas non plus).

6. Si 11 gâteaux ont été coupés en 3, il reste à découper 9 gâteaux pour $120 - 33 = 87$ parts.

Si a, b, c désignent les nombres de gâteaux coupés en 6, 12 et 7 parts respectivement, nous devons résoudre en nombres entiers le système de deux équations à trois inconnues : $\begin{cases} a + b + c = 9 \\ 6a + 12b + 7c = 87 \end{cases}$

De la première équation nous déduisons : $c = 9 - a - b$ et la deuxième équation peut être écrite ainsi : $6a + 12b + 7(9 - a - b) = 87$ soit : $-a + 5b = 24$.

Nous obtenons la relation : $5b = 24 + a$, qui nous indique que le nombre entier a doit être choisi de sorte que $24 + a$ soit un multiple de 5. Etudions les valeurs possibles de a :

- Ou bien $a = 1$ et dans ce cas $b = 5$ et $c = 3$.
- Ou bien $a = 6$ mais dans ce cas $b = 6$ (incompatible avec $c = 9 - a - b$ et c entier positif). Aucune autre valeur ne peut convenir.

Il y a une seule solution, 1 gâteau coupé en 6 parts, 5 coupés en 12 parts et 3 coupés en 7 parts.