OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE NANCY-METZ 2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

NANCY-METZ 2021

Exercice 1 : Tableaux Harmonieux

NB. On rappelle une propriété des ensembles finis : si un ensemble fini A contient un ensemble B, alors le nombre d'éléments de A est au moins égal au nombre d'éléments de B.

Préliminaires

Exemples de tableaux harmonieux et de tableaux non harmonieux

1. Etude du tableau 2 :

1 et 2 sont satisfaisants car les indices des cases qu'ils occupent sont respectivement (1 ; 2) et (2 ; 1) et on y retrouve les nombres 1 et 2

3 est satisfaisant car les indices des cases qu'il occupe sont (1 ; 1) et (2 ; 2) et on y retrouve les nombres 1 et 2.

Ce tableau est harmonieux car les nombres 1, 2 et 3 qu'il contient sont tous satisfaisants.

2. Etude du tableau 3 :

2 n'est pas satisfaisant car les indices de la case qu'il occupe sont (1 ; 2) et on n'y retrouve pas le nombre 3.

Ce tableau n'est pas harmonieux car au moins un de ses éléments n'est pas satisfaisant.

3. Etude du tableau 4.

5 n'est pas satisfaisant car les indices de la case qu'il occupe sont (2 ; 3) et on n'y retrouve pas le nombre 1.

Ce tableau n'est pas harmonieux car au moins un de ses éléments n'est pas satisfaisant.

Partie 1

1. Tableaux de taille 3.

1.a. Si un nombre occupe une seule case d'un tableau de taille 3, les indices de l'unique case qu'il occupe peuvent prendre au plus deux valeurs différentes. On ne peut donc pas retrouver chacun des trois nombres 1, 2 et 3 parmi ces indices.

Un tel nombre n'est pas satisfaisant.

1.b. Pour être harmonieux, un tableau de taille 3 devrait contenir au moins une fois chacun des nombres 1, 2, 3, 4 et 5. D'après **1.a**, pour être satisfaisant dans un tableau de taille 3, un nombre doit nécessairement occuper au moins deux cases.

Or, un tableau de taille 3 est constitué de 9 cases exactement. Il n'est donc pas possible que les cinq nombres 1, 2, 3, 4 et 5 soient tous à la fois satisfaisants (il faudrait pour cela 10 cases au moins).

Un tel tableau n'est pas harmonieux car au moins un de ses éléments n'est pas satisfaisant.

2. Tableaux de taille impaire.

Soit dans toute cette question n un nombre impair noté $n = 2k+1$ avec k entier strictement positif et considérons un tableau de taille n.

2.a. Considérons un nombre x figurant dans ce tableau. Si m est le nombre de cases occupées par ce nombre, le nombre des indices de ces cases est au plus égal à $2m$. Pour que x soit satisfaisant, il faut que dans l'ensemble des indices des cases occupées ce nombre, on retrouve chacun des entiers de 1 à $n = 2k+1$.

Une condition nécessaire est pour cela est que le nombre d'indices associés à ce nombre x soit au moins égal à $2k+1$. Une condition nécessaire est donc que : $2m \geq 2k+1$ ou aussi bien $m \geq k + \frac{1}{2}$.

Les nombres m et k étant des entiers, la condition $m \geq k + \frac{1}{2}$ implique que : $m \geq k+1$, l'entier $k+1$ étant le plus petit entier supérieur à $k + \frac{1}{2}$.

Un nombre satisfaisant doit occuper au moins $k+1$ cases.

2.b. Pour qu'un tableau de taille $n = 2k+1$ soit harmonieux, il faut que tous les entiers de 1 à $2n-1$, c'est-à-dire tous les nombres de 1 à $4k+1$ (ceci car $2n-1 = 2\times(2k+1)-1 = 4k+1$) soit satisfaisant.

Pour réaliser cette condition, il faut au moins $(k+1)\times(4k+1) = 4k^2+5k+1$ cases disponibles.

Or, un tableau de taille $2k+1$ est constitué de $(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ cases. L'entier k étant strictement positif, le nombre $4k^2+4k+1$ est strictement inférieur au nombre $4k^2+5k+1$. Il n'y a pas assez de cases disponibles pour que les nombres de 1 à $4k+1$ soient tous à la fois satisfaisants.

Un tel tableau ne peut pas être harmonieux.

3. Tableaux de taille paire.

Soit dans toute cette question n un nombre pair noté $n=2k$ avec k entier strictement positif et considérons un tableau de taille n.

3.a. Considérons un nombre x figurant dans ce tableau et soit m le nombre de cases qu'il occupe, ce qui mobilise au plus $2m$ indices. Comme dans la question précédente, pour que ce nombre soit satisfaisant, il faut que dans l'ensemble des indices des cases occupées ce nombre, on retrouve chacun des entiers de 1 à $n=2k$.

Une condition nécessaire est pour cela est que $2m \geq 2k$ ou aussi bien $m \geq k$. Pour être satisfaisant, le nombre x doit figurer dans k cases au moins.

Pour que le tableau soit harmonieux**,** il faut que tous les entiers de 1 à $2n-1$, c'est-à-dire tous les nombres de 1 à $4k-1$, soient satisfaisants. Il faut donc au moins $k \times (4k-1) = 4k^2-k$ cases disponibles.

Or, un tableau de taille $n=2k$ est constitué de $4k^2$ cases, dont $2k$ sont situées sur sa diagonale. Ce tableau ne dispose que de $4k^2-2k$ cases non diagonales : au moins k cases (k strictement positif) situées sur la diagonale doivent être occupées.

Il n'y a pas de tableau harmonieux laissant toutes les cases diagonales vides.

3.b. Soit i un entier appartenant à l'ensemble $\{1\,;2\,;...;2n-1\}$. Si cet entier occupe d_i cases diagonales (repérées par un même indice répété) et c_i cases non diagonales (repérées par deux indices distincts), le nombre d'indices des cases occupées par i est égal à $2c_i+d_i$.

Pour que ce nombre x soit satisfaisant, l'ensemble des indices des cases occupées par i doit contenir l'ensemble $\{1\,;2\,;...;2k\}$ qui a $2k$ éléments. Il doit donc avoir au moins autant d'éléments que cet ensemble :

L'inégalité $2c_i+d_i \geq 2k$ doit être vérifiée.

3.c. Nous avons vu dans **3.a** que pour qu'un tableau soit harmonieux, il faut que tous les entiers de 1 à $2n-1$, c'est-à-dire tous les nombres de 1 à $4k-1$, soient satisfaisants. Le nombre d'indices des cases qu'ils occupent est la somme : $(2c_1+d_1)+(2c_2+d_2)+...+(2c_{4k-1}+d_{4k-1})=2(c_1+c_2+...+c_{4k-1})+d_1+d_2+...+d_{4k-1}=2C+D$

Or pour chaque entier i de l'ensemble $\{1 ; 2 ;...; 2n-1=4k-1\}$: $2c_i+d_i \geq 2k$.

On obtient une minoration de la somme précédente en minorant ainsi chacun de ses termes :

$(2c_1+d_1)+(2c_2+d_2)+...+(2c_{4k-1}+d_{4k-1}) \geq (4k-1)\times 2k = 8k^2-2k$

L'inégalité $2C+D \geq 8k^2-2k$ doit être vérifiée.

3.d. Un tableau de taille $n=2k$ est constitué de $(2k)^2=4k^2$ cases.

Parmi ces cases, $2k$ d'entre elles exactement sont des cases situées sur la diagonale. Il y a $2k$ indices (chacun répété deux fois) qui indexent les cases diagonales et $2\times(4k^2-2k)=8k^2-4k$ indices qui indexent les cases non diagonales. Au total, il y a $2k+(8k^2-4k)=8k^2-2k$ indices qui indexent la totalité des cases du tableau.

L'ensemble des indices indexant les cases occupées est contenu dans l'ensemble des indices qui indexent la totalité des cases du tableau et donc a au plus autant d'éléments que lui :

L'inégalité $2C+D \leq 8k^2-2k$ doit être vérifiée.

3.e. Les deux inégalités larges et de sens contraire des questions **3.c** et **3.d** : $2C+D \geq 8k^2-2k$ et $2C+D \leq 8k^2-2k$ impliquent l'égalité $2C+D=8k^2-2k$. L'ensemble des indices indexant les cases occupées a exactement le même nombre d'éléments que l'ensemble des indices qui indexent la totalité des cases du tableau (dans lequel il est contenu). Les deux ensembles sont donc égaux, toutes les cases sont occupées.

Un tableau harmonieux ne peut pas avoir de case vide.

3.f. On a vu que pour chaque entier i de l'ensemble $\{1 ; 2 ;...; 2n-1=4k-1\}$: $2c_i+d_i \geq 2k$.

L'inégalité large $(2c_1+d_1)+(2c_2+d_2)+...+(2c_{4k-1}+d_{4k-1}) \geq 8k^2-2k$ ne peut être une égalité que si chacune des inégalités larges $2c_i+d_i \geq 2k$ est elle-même une égalité, c'est-à-dire que si pour tout i :

$$d_i = 2k-2c_i = 2\times(k-c_i).$$

Le nombre d_i est nécessairement un nombre pair.

Un nombre de l'ensemble $\{1 ; 2 ;...; 2n-1=4k-1\}$ ne peut pas occuper un nombre impair de cases diagonales.

Partie 2

1. Analysons la situation proposée par l'énoncé :

Nombres	Indices de la case occupée	Indices manquants
1	(1 ; 1)	2, 3 et 4
2	(1 ; 2)	3 et 4
3	(1 ; 3)	2 et 4
4	(1 ; 4)	2 et 3
5	(2 ; 1)	3 et 4
6	(3 ; 1)	2 et 4
7	(4 ; 1)	2 et 3

- Pour chaque entier i de 1 à 7, la relation : $2c_i + d_i = 4$ doit être vérifiée. Chacun de ces nombres doit figurer ou bien deux fois ailleurs que sur la diagonale, ou bien deux fois sur la diagonale et une fois ailleurs, ou bien quatre fois sur la diagonale.
- Le nombre 1 figurant une fois sur la diagonale doit y figurer au moins une deuxième fois. On en déduit qu'il y a deux variantes : ou bien il y figure quatre fois ou bien il y figure deux fois et un autre des entiers de 2 à 7 y figure aussi deux fois.
- Compte tenu de la liste des « indices manquants », s'ils ne sont pas sur la diagonale, 2 et 5, de même que 3 et 6, et de même que 4 et 7, doivent être placés symétriquement par rapport à la diagonale.

Ces considérations nous conduisent à proposer deux variantes principales :

Quatre fois « 1 » sur la diagonale			
1	**2**	**3**	**4**
5	**1**	**4**	**3**
6	**7**	**1**	**2**
7	**6**	**5**	**1**

Deux fois 1, et un autre nombre sur la diagonale			
1	**2**	**3**	**4**
5	**1**	**4**	**3**
6	**7**	**2**	**5**
7	**6**	**1**	**2**

2. Construisons un tableau harmonieux de taille 6.

- Doivent figurer dans ce tableau les entiers de 1 à 11.
- A priori, chacun de ces entiers ou bien figure six fois sur la diagonale, ou bien figure quatre fois sur la diagonale et une fois ailleurs, ou bien figure deux fois sur la diagonale et deux fois ailleurs, ou bien figure trois fois en dehors de la diagonale.

Si l'on souhaite en outre que la somme des nombres inscrits sur des cases symétriques soit égale à 11, les entiers 1 et 10, 2 et 9, 3 et 8, 4 et 7 ainsi que 5 et 6 sont jumelés. Le nombre 11 quant à lui n'a pas de nombre jumeau : nous devons écarter le cas où il se trouve en dehors de la diagonale, nécessairement, nous avons une diagonale de « 11 ». Il reste à placer les autres entiers ; nous proposons la méthode qui suit.

L'ensemble $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ contient 15 paires de deux entiers : {1 ; 2}, {1 ; 3}, {1 ; 4}, {1 ; 5}, {1 ; 6}, {2 ; 3}, {2 ; 4}, {2 ; 5}, {2 ; 6}, {3 ; 4}, {3 ; 5}, {3 ; 6}, {4 ; 5}, { 4 ; 6} et {5 ; 6}.

- Choisissons trois paires disjointes que l'on associe aux entiers 1 et 10, par exemple {1 ; 2}, {3 ; 4} et {5, 6}.
- Parmi les 12 paires restantes, choisissons trois paires disjointes que l'on associe aux entiers 2 et 9, par exemple {1 ; 3}, {2 ; 5} et {4, 6}.
- Parmi les 9 paires restantes, choisissons trois paires disjointes que l'on associe aux entiers 3 et 8, par exemple {1 ; 4}, {2 ; 6} et {3, 5}.
- Il reste six paires que l'on peut répartir en deux paquets de trois paires disjointes : {1 ; 5}, {2 ; 4} et {3 ; 6} d'une part et {1 ; 6}, {2 ; 3}, {4 ; 5} d'autre part. On associe le premier paquet aux entiers 4 et 7 et le second aux entiers 5 et 6.

On place alors les entiers jumelés dans les cases désignées, chaque paire {*a, b*} déterminant deux cases symétriques : (*a, b*) et (*b, a*) : un entier dans l'une, son jumeau dans l'autre, à sa propre convenance.

En l'occurrence, un exemple de tableau qui conviendrait serait celui-ci :

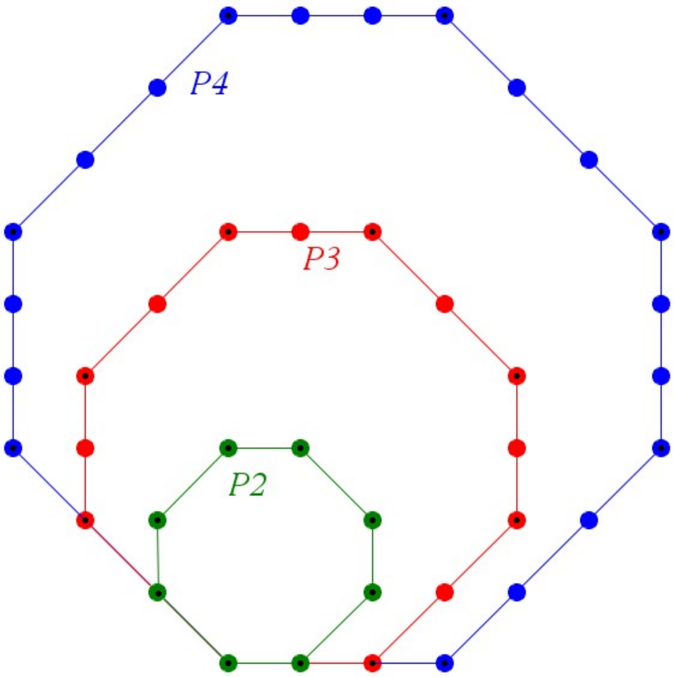
11	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
10	**11**	**5**	**4**	**2**	**3**
9	**6**	**11**	**1**	**3**	**4**
8	**7**	**10**	**11**	**5**	**2**
7	**9**	**8**	**6**	**11**	**1**
6	**8**	**4**	**9**	**10**	**11**

Exercice 2 : Nombres octogonaux

Partie I : une formule pour déterminer le *n*-ième nombre octogonal

<table>
<tr>
<td>

I.1.a. En bleu les billes complémentaires.



</td>
<td>

I.1.b et c.

Par simple comptage sur la représentation ci-contre, on dénombre 8 billes vertes qui constituent l'octogone $P2$, 13 billes rouges qui complètent l'octogone $P2$ pour constituer l'octogone $P3$ et 19 billes bleues qui complètent l'octogone $P3$ pour constituer et l'octogone $P4$.

En conséquence :

$$O_2 = 8$$
$$O_3 = 8 + 13 = 21$$
$$O_4 = 8 + 13 + 19 = 40$$

La réponse à la question **I.1.b** est « $O_4 = 40$ ».

« Il faut ajouter 19 billes » est la réponse à la question **I.1.c**.

</td>
</tr>
</table>

I.2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit P_n l'octogone dont chaque côté contient n billes.

Le nombre de billes que contient cet octogone est égal à la somme $8n$ des nombres de billes que contiennent les huit côtés diminuée du nombre de sommets, car chacun des sommets appartient à deux côtés consécutifs et est dénombré deux fois dans la somme. L'octogone P_n est constitué de $8n - 8$ billes.

Considérons l'octogone P_{n+1} :

- Il est constitué de $8(n+1) - 8 = 8n$ billes.
- Sont communes aux octogones P_n et P_{n+1} les billes disposées sur deux des côtés consécutifs de l'octogone P_n. Or il y a $2n - 1$ billes disposées sur deux côtés consécutifs (on en compte n sur chaque côté, le sommet commun étant alors dénombré deux fois).

Les billes à ajouter à celles déjà en place sont les billes non communes aux octogones P_n et P_{n+1}.

Leur nombre est égal à : $8n-(2n-1)=6n+1$

S'il y a O_n billes déjà placées, le nombre de billes nécessaires pour tous les octogones jusqu'au suivant est :

$$O_{n+1}=O_n+6n+1$$

I.3.a. Considérons la somme : $(6\times 2+1)+(6\times 3+1)+...+(6\times(n-1)+1)$.

Cette écriture est légitime dès lors que $n\geq 3$ mais non pour $n=2$. En effet, le dernier terme cité, à savoir $(6\times(n-1)+1)$, doit avoir un index au moins égal au premier, à savoir $(6\times 2+1)$, et il faut pour cela que $n-1\geq 2$. Moyennant cette réserve, cette somme contient $n-2$ termes.

Compte tenu des propriétés usuelles de l'addition et de la multiplication dans l'ensemble des entiers, on peut réorganiser son écriture :

$$(6\times 2+1)+(6\times 3+1)+...+(6\times(n-1)+1)=6\times(2+3+...+(n-1))+(\underbrace{1+1+...+1}_{n-2\ \ fois})$$

Compte tenu de la relation admise dans l'énoncé (qui est elle aussi légitime pour $n\geq 3$ mais non pour $n=2$) :

$$(6\times 2+1)+(6\times 3+1)+...+(6\times(n-1)+1)=6\times\frac{(n-2)(n+1)}{2}+(n-2)=(n-2)(3n+4)$$

En développant cette forme factorisée du résultat, on obtient : $(n-2)\times(3n-4)=3n^2-2n-8$.

Conformément à l'indication de l'énoncé :

$$(6\times 2+1)+(6\times 3+1)+...+(6\times(n-1)+1)=3n^2-2n-8$$

1.3.b et c. Compte tenu du résultat de la question **I.2**, où nous avons obtenu la relation de récurrence $O_{n+1} = O_n + 6 \times n + 1$, poser $S_n = O_n - O_{n-1}$ pour $n \geq 3$ revient à poser : $S_n = 6 \times (n-1) + 1$ pour $n \geq 3$.

Ecrivons ces diverses relations depuis l'index 3 jusqu'à l'index n :

$$\begin{cases} O_3 - O_2 = S_3 = 6 \times 2 + 1 \\ O_4 - O_3 = S_4 = 6 \times 3 + 1 \\ ..... \\ O_n - O_{n-1} = S_n = 6 \times (n-1) + 1 \end{cases}$$

Par addition membre à membre, tous les termes intermédiaires s'éliminent.

Il reste : $O_n - O_2 = S_3 + S_4 + ... + S_n = (6 \times 2 + 1) + (6 \times 3 + 1) + ... + (6 \times (n-1) + 1)$

Le nombre O_2 a été vu précédemment (dès le **I.1.a**) : $O_2 = 8$.

Ainsi : $O_n - 8 = S_3 + S_4 + ... + S_n$ (réponse à la question **I.3.b**)

Nous avons vu dans la question **I.3.a** que $(6 \times 2 + 1) + (6 \times 3 + 1) + ... + (6 \times (n-1) + 1) = 3n^2 - 2n - 8$

Ainsi : $O_n = 8 + (3n^2 - 2n - 8) = 3n^2 - 2n = n \times (3n - 2)$

Nous obtenons bien, conformément à l'attendu de la question **1.3.c** :

$$O_n = n \times (3n - 2) \qquad \textbf{(1)}$$

Partie II : une équation de Pell-Fermat

II.1.a. Initialement, le problème posé est celui de la résolution de l'équation : $O_n = c^2$ dans l'ensemble $\{2 ; 3 ;...; +\infty\}$ des entiers supérieurs ou égaux à 2.

D'après la relation **(1)** de la fin de la première partie : $O_n = n \times (3n-2) = 3n^2 - 2n$

On remarque que : $3O_n = 9n^2 - 6n = (9n^2 - 6n + 1) - 1 = (3n-1)^2 - 1$

Résoudre l'équation $O_n = c^2$ revient ainsi à résoudre l'équation : $3O_n = 3c^2$ ou aussi bien l'équation :

$$(3n-1)^2 - 1 = 3c^2$$

Conformément à l'attendu de l'énoncé, le problème posé revient à celui de la résolution de l'équation

$(3n-1)^2 - 3c^2 = 1$ **(2)** où c est un entier et n est un entier appartenant à $\{2 ; 3 ;...; +\infty\}$.

II.1.b. Lorsque $c^2 = 144$, l'équation **(2)** s'écrit : $(3n-1)^2 - 432 = 1$, soit : $(3n-1)^2 = 433$.

Or, le nombre 433 n'est pas le carré d'un entier (il s'agit en effet d'un nombre premier). *A fortiori,* il n'est pas le carré d'un entier de la forme $3n-1$.

Le problème n'a pas de solution dans cette circonstance.

II.1.c. Lorsque $n = 30$, l'équation **(2)** s'écrit : $7921 - 3c^2 = 1$, équation équivalente à l'équation : $c^2 = 2640$.

Or, le nombre $2640 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 11$ n'est pas le carré d'un entier (il faudrait pour cela que les exposants de tous ses facteurs premiers soient pairs, ce n'est le cas ni de 3 ni de 5 ni de 11).

Le problème n'a pas de solution dans cette circonstance.

II.2. Les couples (1 ; 0) et (2 ; 1) sont des solutions de l'équation **(3).**

II.3. Remarquons au préalable que, compte tenu de la factorisation $X^2 - 3Y^2 = (X - Y\sqrt{3}) \times (X + Y\sqrt{3})$,

l'équation **(3)** est équivalente à l'équation : $(X - Y\sqrt{3}) \times (X + Y\sqrt{3}) = 1$ ou, aussi bien, à l'équation :

$X - Y\sqrt{3} = \dfrac{1}{X + Y\sqrt{3}}$ **(équation 3').**

II.3.a. Soit $\left(X_1\ ;\ Y_1\right)$ et $\left(X_2\ ;\ Y_2\right)$ deux solutions de l'équation **(3)**.

Le produit $\left(X_1+Y_1\sqrt{3}\right)\times\left(X_2+Y_2\sqrt{3}\right)$ se développe ainsi :

$$\left(X_1+Y_1\sqrt{3}\right)\times\left(X_2+Y_2\sqrt{3}\right)=\left(X_1X_2+3Y_1Y_2\right)+\left(X_1Y_2+X_2Y_1\right)\sqrt{3}$$

Or, l'ensemble des entiers positifs est un « ensemble stable » pour l'addition et la multiplication :

- Les produits X_1X_2, $3Y_1Y_2$, X_1Y_2, X_2Y_1 sont des entiers positifs en tant que produits d'entiers positifs.
- Les sommes $X_1X_2+3Y_1Y_2$, $X_1Y_2+X_2Y_1$ sont des entiers positifs en tant que sommes d'entiers positifs.

C'est pourquoi en posant $\begin{cases} X_3 = X_1X_2+3Y_1Y_2 \\ Y_3 = X_1Y_2+X_2Y_1 \end{cases}$, on forme un nouveau couple d'entiers positifs $\left(X_3\ ;\ Y_3\right)$ vérifiant : $X_3+Y_3\sqrt{3}=\left(X_1+Y_1\sqrt{3}\right)\times\left(X_2+Y_2\sqrt{3}\right)$.

II.3.b. Or : $\dfrac{1}{X_3+Y_3\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\left(X_1+Y_1\sqrt{3}\right)\times\left(X_2+Y_2\sqrt{3}\right)}=\dfrac{1}{\left(X_1+Y_1\sqrt{3}\right)}\times\dfrac{1}{\left(X_2+Y_2\sqrt{3}\right)}$

Puisque $\left(X_1\ ;\ Y_1\right)$ et $\left(X_2\ ;\ Y_2\right)$ sont deux solutions de l'équation **(3)**, ces couples sont solution de solution de l'équation **(3')** : $\dfrac{1}{\left(X_1+Y_1\sqrt{3}\right)}=X_1-Y_1\sqrt{3}$; $\dfrac{1}{\left(X_2+Y_2\sqrt{3}\right)}=X_2-Y_2\sqrt{3}$

Donc : $\dfrac{1}{X_3+Y_3\sqrt{3}}=\left(X_1-Y_1\sqrt{3}\right)\times\left(X_2-Y_2\sqrt{3}\right)=\left(X_1X_2+3Y_1Y_2\right)-\left(X_1Y_2+X_2Y_1\right)\sqrt{3}$

Nous obtenons : $\dfrac{1}{X_3+Y_3\sqrt{3}}=X_3-Y_3\sqrt{3}$. Le couple d'entiers $\left(X_3\ ;\ Y_3\right)$ est solution de **(3')**.

Etant solution de **(3')**, ce couple $\left(X_3\ ;\ Y_3\right)$ est solution de **(3)**.

Si $\left(X_1\ ;\ Y_1\right)$ et $\left(X_2\ ;\ Y_2\right)$ sont deux solutions de l'équation **(3)**, alors le couple $\left(X_1X_2+3Y_1Y_2\ ;\ X_1Y_2+X_2Y_1\right)$ est aussi une solution de l'équation **(3)**.

II.4. Appliquons la question précédente avec $\left(X_1\ ;\ Y_1\right)=\left(X_2\ ;\ Y_2\right)=\left(2\ ;1\right)$.

Nous obtenons avec ces valeurs : $X_3+Y_3\sqrt{3}=7+4\sqrt{3}$.

Le couple $\left(7\ ;\ 4\right)$ est solution de l'équation **(3)**.

II.5. Si le couple $(n\ ;c)$ est solution de l'équation **(2)**, alors le couple $(3n-1\ ;c)$ est solution de l'équation **(3)**. Réciproquement, si $(X\ ;Y)$ est une solution de l'équation **(3)**, on peut lui associer un couple $(n\ ;c)$ solution de l'équation **(2)** à condition qu'il existe un entier n vérifiant : $3n-1=X$, c'est-à-dire à condition que le nombre entier $X+1$ soit un multiple de 3 ou, ce qui revient au même, que X soit de la forme $X=3k+2$.

Ce qui nous conduit à rechercher, empiriquement pour le moment, un couple $(X\ ;Y)$ solution de l'équation **(3)** qui soit de cette forme. Appliquons à cet effet la question **II.3** avec $(X_1\ ;Y_1)=(7\ ;4)$, $(X_2\ ;Y_2)=(2\ ;1)$.

Nous obtenons avec ces valeurs : $X_3+Y_3\sqrt{3}=26+15\sqrt{3}$. Le couple $(26\ ;15)$ est une solution de l'équation **(3)** et le nombre $26=3\times 8+2$ est adéquat. Toutes les conditions requises sont satisfaites.

Le couple $\left(n=\dfrac{26+1}{3}=9\ ;c=15\right)$ est solution de l'équation **(2)**.

Vérification : $O_9=9\times(27-2)=9\times 25=225=15^2$

II.6. Nous sommes amenés à examiner s'il est possible de trouver une infinité de solutions $(X\ ;Y)$ de l'équation **(2)** telles que l'entier X soit de la forme $X=3k+2$.

Observons que, si on applique le résultat de la question **II.3** avec $(X_1\ ;Y_1)=(2\ ;1)$ et $(X_2\ ;Y_2)$ une solution de **(2)** autre que (1 ; 0), on obtient comme solution : $\begin{cases} X_3=2X_2+3Y_2 \\ Y_3=\ X_2+2Y_2 \end{cases}$. Cette solution est formée de deux nombres X_3 et Y_3 strictement plus grands que leurs homologues X_2 et Y_2 puisqu'ils sont plus grands que leurs doubles. Il s'agit donc d'une nouvelle solution.

- Si X_2 est de la forme $X_2=3k+2$, alors : $X_3=2\times(3k+2)+3Y_2=6k+4+3Y_2=3(2k+1+Y_2)+1$ et X_3 est de la forme $X_2=3k+1$.
- Si X_2 est de la forme $X_2=3k+1$, alors : $X_3=2\times(3k+1)+3Y_2=6k+2+3Y_2=3(2k+Y_2)+2$ et X_3 est de la forme $X_2=3k+2$.

Ainsi, cette construction de couples solutions de **(3)** fournit, alternativement, un couple solution de **(3)** où X est de la forme $X=3k+1$ puis un couple solution de **(3)** où X est de la forme $X=3k+2$ (donc de la forme adéquate, couple auquel on peut associer un couple solution de **(2)**).
On peut construire par cette méthode une infinité de solutions de **(3)** et parmi elles, une sur deux (donc une infinité ...) amène à un couple solution de **(2)**.

Complément (non demandé par l'énoncé) :

Par exemple, à partir de (26 ;15) on construit $\begin{cases} X = 2\times 26 + 3\times 15 = 97 \\ Y = \ 2\times 15 + 26 = 56 \end{cases}$ qui ne convient pas puis à partir de (97 ;56) on construit $\begin{cases} X = 2\times 97 + 3\times 56 = 362 \\ Y = \ 2\times 15 + 26 = 209 \end{cases}$, couple adéquat qui donne le couple $(n = 121 \,;\, c = 209)$.

L'algorithme **pellfermat** ci-contre construit les n premiers couples solutions de l'équation **(3)**. Parmi eux, un sur deux amène à un couple solution de **(2)**.

```
>>> def pellfermat(n):
        x=1
        y=0
        for k in range(1,n+1):
                a=x
                b=y
                x=2*a+3*b
                y=a+2*b
                print(x,y)
```

L'algorithme a été exécuté avec $n = 10$. Les couples $(5042 \,;\, 2911)$, $(70226 \,;\, 40545)$ amènent eux aussi à un couple solution de **(2)**.

```
>>> pellfermat(10)
2 1
7 4
26 15
97 56
362 209
1351 780
5042 2911
18817 10864
70226 40545
262087 151316
```

Fin du complément.

Partie III : un algorithme

Un exemple d'algorithme répondant à la question posée, à l'aide d'une boucle « **while** ».

```
>>> def octog(M):
        n=2
        o=8
        while o<M:
                print(o)
                n=n+1
                o=n*(3*n-2)
```

```
>>> octog(100)
8
21
40
65
96
```

Fin de la correction

Complément : deux autres algorithmes avec Python

Pour le lecteur qui souhaite aller un peu plus loin avec Python

On se propose dans ce complément de construire à l'aide de Python les octogones P_n successifs.

On suppose le plan rapporté à un repère orthonormé dont l'origine est le sommet commun, l'octogone P_n étant construit de sorte que des billes soient placées aux points de coordonnées : $(0\,;0)$, $(1\,;0)$,..., $(n-1\,;0)$.

1. Construction des points à adjoindre à un octogone pour obtenir l'octogone suivant.

Considérons les sommets de l'octogone P_{n+1}. Outre l'origine du repère, ce sont les points de coordonnées :

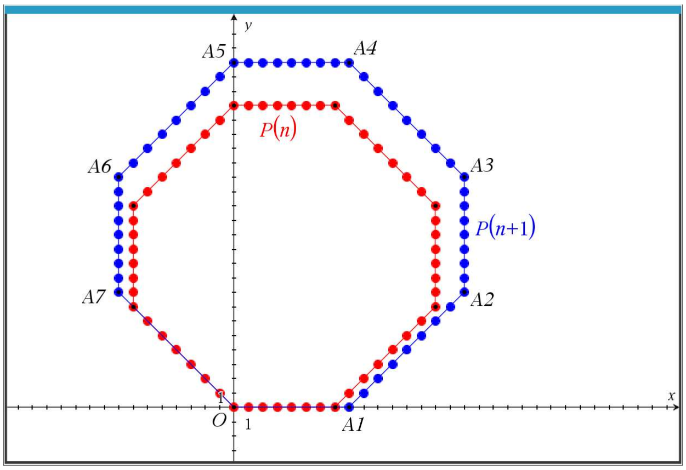
$(n\,;0)\,;(2n\,;n)\,;(2n\,;2n)\,;\ (3n\,;n)\,;(3n\,;0)\ \ ;\ (2n\,;-n)\ ;(n\,;-n)$.

En supposant l'octogone P_n déjà construit, on peut obtenir toutes les boules complémentaires permettant de construire l'octogone P_{n+1} en procédant de la façon qui suit.

- La première bille complémentaire est placée au sommet A_1 de coordonnées $(n\,;0)$.
- Pour k entier allant de 1 à n, on place une boule en chacun des six points de coordonnées : $(n+k\,;k)\,;(2n\,;n+k)\,;(2n-k\,;2n+k)\,;\ (n-k\,;3n)\,;(-k\,;3n-k)\ \ ;\ (-n\,;2n-k)$

On parcourt ainsi, à l'aide de ces listes de six points, à raison d'un point sur chacun des six segments $]A_1A_2]$, $]A_2A_3]$, $]A_3A_4]$, $]A_4A_5]$, $]A_5A_6]$ et $]A_6A_7]$, tous les emplacements où doit se trouver une bille.

Avec la bille « initiale » placée au point A_1, on retrouve bien $6n+1$ billes complémentaires.



L'algorithme « **octoplus** » détermine les coordonnées des billes complémentaires permettant de construire l'octogone P_{n+1} à partir de son précédent P_n et visualise le résultat à l'écran :

```
>>> from matplotlib import pyplot as plt
>>> def octoplus(n):
        x=[n]
        y=[0]
        for k in range(1,n+1):
                x=x+[n+k,2*n,2*n-k,n-k,-k,-n]
                y=y+[k,n+k,2*n+k,3*n,3*n-k,2*n-k]
        plt.scatter(x,y)
        plt.show()
```

2. Construction de tous les octogones jusqu'au *n*_ième

L'algorithme « **octogones »,** inspiré du précédent, construit tous les octogones, de proche en proche, jusqu'au *n*_ième, et visualise le résultat à l'écran :

```
>>> from matplotlib import pyplot as plt
>>> def octogones(n):
        u=[0]
        v=[0]
        for m in range(1,n):
                x=[m]
                y=[0]
                for k in range(1,m+1):
                        x=x+[m+k,2*m,2*m-k,m-k,-k,-m]
                        y=y+[k,m+k,2*m+k,3*m,3*m-k,2*m-k]
                u=u+x
                v=v+y
        plt.scatter(u,v)
        plt.show()
```

Les listes **u** et **v** contiennent respectivement les abscisses et les ordonnées de tous les points où doit se trouver une bille.

Pour les valeurs de m allant de 1 à $n-1$, on reprend l'exécution du programme précédent « **octoplus** ». Ce dernier crée deux listes **x** et **y** qui contiennent les coordonnées des nouveaux points où va se trouver une bille. Après l'exécution de ce programme, pour chaque valeur de m, on ajoute ces listes aux listes **u** et **v**.

Exemple de résultat avec l'algorithme « **octoplus** »	Exemple de résultat avec l'algorithme « **octogones** »