OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE MONTPELLIER
2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

ACADÉMIE
DE MONTPELLIER

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades académiques de mathématiques 2021

Mardi 23 mars 2021 15h10 – 17h10

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

En raison de la crise sanitaire, la recherche est individuelle et il est attendu que chaque candidat rende deux copies : la première pour les deux exercices nationaux et la seconde pour les deux exercices académiques.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)
Les triplets de Markov

Un triplet de Markov est un triplet $(x; y; z)$ de nombres entiers strictement positifs tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Dans cet exercice, toutes les réponses doivent être justifiées.

Partie A : Triplets de Markov

1. Quelques exemples

a. Vérifier que le triplet $(1\,;2\,;5)$ est un triplet de Markov.

b. Le triplet $(2\,;3\,;5)$ est-il un triplet de Markov ?

c. Le triplet $(0\,;0\,;0)$ est-il un triplet de Markov ?

2. Des triplets singuliers

a. Soit x un nombre entier strictement positif. Déterminer la (ou les) valeur(s) de x telle(s) que le triplet $(x\,;\ x\,;\ x)$ soit un triplet de Markov.

b. On admet la propriété suivante :
Si *a* et *b* sont deux entiers naturels non nuls tels que a^2 divise b^2, alors *a* divise *b*.
Démontrer que le seul triplet de Markov de la forme $(x\,;x\,;z)$ avec $x \neq z$ est le triplet $(1\,;1\,;2)$.

3. Déterminer l'ensemble des triplets $(x; y; z)$ de Markov vérifiant $x \leq y \leq z \leq 5$.

4. Génération de quelques triplets de Markov

a. Démontrer que si les triplets $(x\,;y\,;z)$ et $(x\,;y\,;t)$ sont deux triplets de Markov distincts alors $z + t = 3xy$.

b. En déduire que si le triplet $(x\,;y\,;z)$ est un triplet de Markov alors le triplet $(x\,;y\,;3xy - z)$ est aussi un triplet de Markov.

c. Expliquer pourquoi la fonction MarkovF, écrite en langage Python et donnée ci-dessous, renvoie une liste de triplets distincts de Markov.

```
1 def MarkovF(n):
2     T=(1,1,1)
3     L=[T]
4     for k in range(n):
5         T=(T[0],T[2],T[1])
6         T=(T[0],T[1],3*T[0]*T[1]-T[2])
7         L.append(T)
8     return L
```

Commentaires :
Ligne 2 : affecter à T le triplet $(1\,;1\,;1)$

Ligne 5 : permuter les deux derniers éléments du triplet T

Ligne 7 : ajouter le triplet T à la liste de triplets L

d. En utilisant la fonction de la question précédente, déterminer cinq triplets de Markov.

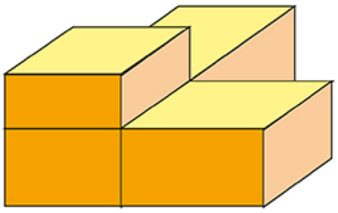
5. Dans cette question, $(x\,;y\,;z)$ est un triplet de Markov tel que $x < y < z$. En utilisant la question 4.a, donner les trois autres triplets de Markov distincts, à une permutation près, ayant deux valeurs communes avec le triplet $(x\,;y\,;z)$.

Partie B : Briques markoviennes

Une brique markovienne est un solide vérifiant les quatre conditions suivantes :

- le solide est un parallélépipède rectangle ;
- aucune des faces du solide n'est carrée ;
- les trois dimensions du solide sont entières ;
- la somme des carrés des trois dimensions du solide est égale au triple de leur produit.

1. Quel est le volume minimal d'une brique markovienne ?



2. Un solide, représenté sur la figure ci-contre, est construit à partir de quatre briques markoviennes différentes les unes des autres. Ces briques sont assemblées en coin. Au niveau des trois surfaces de contact, les dimensions de chacune des briques coïncident exactement.
Quel est le volume minimal de ce solide ?
Indication : On pourra utiliser un programme pour répondre à cette question.

Exercice académique 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi l'enseignement de spécialité mathématiques)

Le facteur sonne toujours une fois (et une seule)

Un facteur doit distribuer le courrier dans une rue. Celle-ci ne comporte qu'une seule rangée de maisons régulièrement espacées et numérotées 1, 2, …, n, où n est un entier supérieur ou égal à 2.

Le facteur doit distribuer une lettre par maison. Pour cela, il laisse son vélo à la maison 1, y dépose le courrier correspondant, puis distribue les lettres dans les autres maisons, et enfin, revient à la maison 1 récupérer son vélo. Il effectue ainsi un trajet, représenté par les numéros successifs des maisons où il a déposé le courrier.

Par exemple, si $n = 5$, un trajet possible est $1 \to 4 \to 5 \to 2 \to 3 \to 1$.

Si on note $d(a; b)$ la distance séparant les maisons a et b, alors on a :

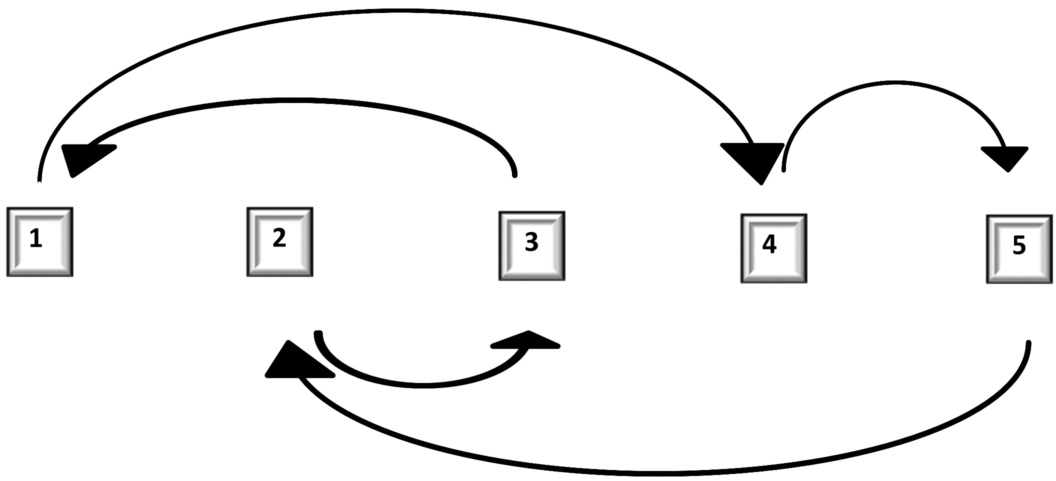
$$d(a\,;b) = \begin{cases} a - b \text{ si } a \geq b \\ b - a \text{ si } a < b \end{cases}$$

Par exemple :

- la distance séparant les maisons 1 et 4 est $d(1\,;4) = 4 - 1 = 3$;
- la distance séparant les maisons 5 et 2 est $d(5\,;2) = 5 - 2 = 3$.

Enfin, la distance totale parcourue, appelée aussi longueur du trajet, est la somme des distances séparant les différentes maisons visitées.

Dans l'exemple du trajet : $1 \to 4 \to 5 \to 2 \to 3 \to 1$, la longueur du trajet est 10 :



$$d(1\,;4) + d(4\,;5) + d(5\,;2) + d(2\,;3) + d(3\,;1) = 3 + 1 + 3 + 1 + 2 = 10.$$

1. Dans cette partie on a $n = 5$.

a. Justifier que le trajet $1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1$ est de longueur 8.

b. Donner un trajet de longueur de longueur 12.

c. Combien y a-t-il de trajets différents possibles ?

d. Quelle est la longueur minimale d'un trajet ?

e. Combien y a-t-il de trajets de longueur minimale ?

2. Dans cette partie n est un entier quelconque, supérieur ou égal à 2.

a. Combien y a-t-il de trajets possibles ?

b. Montrer que la longueur minimale d'un trajet est égale à $2(n-1)$.

c. Combien y a-t-il de trajets de longueur minimale ?

3. Dans cette partie, on s'intéresse à la longueur maximale d'un trajet.

a. Déterminer tous les trajets de longueur maximale dans le cas où $n = 4$.

b. Déterminer la longueur maximale d'un trajet si $n = 5$ puis donner un exemple de trajet de longueur maximale.

c. Montrer que pour tout entier supérieur ou égal à 2, la longueur maximale d'un trajet est inférieure ou égal à $\frac{n^2}{2}$.

Pour votre culture générale, sachez qu'on peut démontrer que la longueur maximale d'un trajet est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n^2}{2}$.

Exercice académique 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques de voie générale)

Une somme de produits

Soit n un entier naturel non nul.

1. Multiplication scolaire

On appelle ***multiplication élémentaire*** une multiplication entre deux chiffres : par exemple, 0×9 et 2×5 sont des multiplications élémentaires.
Lorsqu'un écolier pose une multiplication de deux entiers, il effectue, entre autres calculs, un certain nombre de multiplications élémentaires.
Par exemple, le produit 32×65 comporte 4 multiplications élémentaires : 2×5, 2×6, 3×5 et 3×6.

$$\begin{array}{ccccc} & & & 3 & 2 \\ & & \times & 6 & 5 \\ \hline & & 1 & 6 & 0 \\ + & 1 & 9 & 2 & . \\ \hline & 2 & 0 & 8 & 0 \end{array}$$

On s'intéresse au nombre de multiplications élémentaires nécessaires pour effectuer une multiplication entre deux entiers, et l'objectif de l'exercice est de réduire ce nombre afin de diminuer le temps de calcul d'un ordinateur.

a. Combien de multiplications élémentaires sont nécessaires pour effectuer les produits 3×95 et 12345×6789 en posant l'opération ?

b. Soit m un entier naturel non nul. On considère x et y deux entiers naturels comportant respectivement n et m chiffres.
Déterminer le nombre de multiplications élémentaires à faire pour effectuer le produit xy en posant l'opération.

2. Algorithme de Karatsuba

Soit x et y deux nombres entiers à 2 chiffres :

On note $x = \overline{ab}$ et $y = \overline{cd}$, où *a*, *b*, *c* et *d* sont des nombres entiers entre 0 et 9. Ainsi, on a : $x = 10 \times a + b$ et $y = 10 \times c + d$.

a. Montrer que $xy = ac \times 100 + \big(ac + bd - (a-b)(c-d)\big) \times 10 + bd$.

b. En déduire qu'on peut calculer 12×34 avec seulement 3 multiplications élémentaires (on ne compte pas le nombre d'additions et de soustractions nécessaires).

c. Expliquer comment on peut effectuer le calcul 1234×5678 avec moins de 10 multiplications élémentaires.

Les nombres x et y sont maintenant deux nombres entiers à 2^n chiffres, où n est un entier naturel.

d. Démontrer que le nombre de multiplications élémentaires pour effectuer le produit xy peut être réduit à 3^n.

e. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle on peut réduire le nombre de multiplications élémentaires du produit xy de 90 % par rapport à la multiplication de l'écolier.

3. Multiplication à la russe.

On définit la fonction RUSSE dont on donne l'algorithme écrit en langage naturel et le code écrit en langage Python :

```
Fonction RUSSE(x,y)
   p ← 0
   Tant que x est différent de 0
      Si x est impair alors
         p ← p + y
      fin si
      x ← partie entière de x/2
      y ← y*2
   Fin tant que
   Renvoyer p
Fin fonction
```

```python
def RUSSE(x,y) :
    p=0
    while x!=0:
        if x%2==1 :
            p=p+y
        x=x//2
        y=y*2
    return p
```

La partie entière d'un nombre décimal est le plus grand entier inférieur ou égal à ce nombre.

a. Justifier que RUSSE (3,5) = 15 et RUSSE (32, 13) = 416 en détaillant les calculs.

b. Soit N un nombre entier naturel non nul. Montrer qu'il existe au plus 4 puissances de 2 parmi les entiers naturels qui ont N chiffres.

c. En déduire que $N \geq \frac{n}{4}$

d. On admet dans cette question que pour tous entiers naturels x et y, la fonction RUSSE (x, y) retourne le produit xy. Pour un ordinateur, la multiplication ou la division par 2 ont des durées comparables.

Montrer que le calcul de RUSSE (x, x) est plus rapide que la multiplication de l'écolier à partir d'une certaine valeur de x.

e. On exécute la fonction RUSSE (x, y) avec $x = 12$ et $y = 13$.
Recopier et compléter le tableau suivant.

x	y	p	$p + xy$
12	13	0	156

f. Démontrer que pour tout entier naturel x et y, RUSSE$(x, y) = xy$.