www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE MONTPELLIER
2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Olympiades de mathématiques 2022

Sujets académiques – éléments de correction

Exercice 1 : les points baladeurs

Partie 1

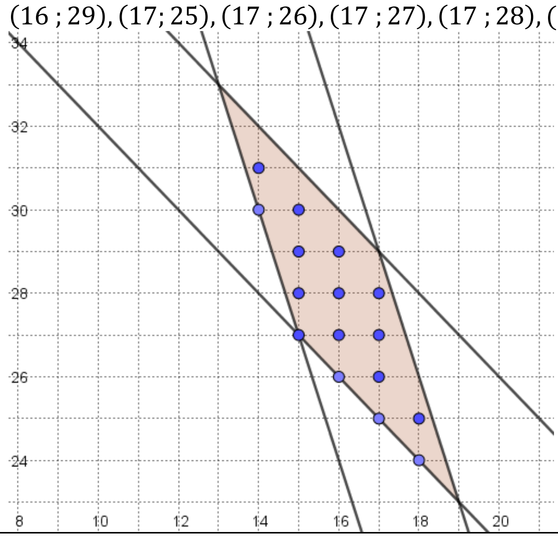
<table>
<tr><td>1.</td><td>
<table>
<tr><td>$y = 5x + 7$</td><td>$x = \frac{1}{2}$</td><td>$y = x\sqrt{2} + \frac{1}{2}$</td><td>$18 = 0{,}75x + 0{,}25y$</td><td>$y - \pi x = 0$</td></tr>
<tr><td>infinité</td><td>0</td><td>0</td><td>infinité</td><td>1</td></tr>
<tr><td>infinité</td><td>infinité</td><td>1</td><td>infinité</td><td>1</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Exemple de droite n’ayant aucun point décimal</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.</td><td>On considère une droite D d’équation $y = ax + b$ où a et b sont des nombres réels.
On suppose de plus que D possède deux points entiers distincts.
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B\ ; y_B)$ deux points entiers appartenant à D et k un nombre entier relatif.
Soit le point $A_k(x_k\ ; y_k)$ avec $x_k = x_A + k(x_B - x_A)$ et $y_k = y_A + k(y_B - y_A)$.
Montrons que le point A_k est un point entier.
Comme x_A et x_B sont deux entiers, $x_A - x_B$ est entier. De plus, k est un nombre entier, donc $k(x_B - x_A)$ est entier.
Puis, $x_k = x_A + k(x_B - x_A)$ est aussi entier.
On fait de même avec y_k.
Montrons que le point $A_k(x_k\ ; y_k)$ est contenu dans D.
On considère la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
$A_k \in D \Leftrightarrow y_k = f(x_k)$
Or, $\begin{aligned} f(x_k) &= a\big(x_A + k(x_B - x_A)\big) + b \\ &= ax_A + b + ak(x_B - x_A + p - p) \\ &= ax_A + b + k(ax_B + p - ax_A - p) \\ &= y_A + k(y_B - y_A) \\ &= y_k \end{aligned}$
Le point A_k appartient à D.
Comme l’ensemble des nombres entiers est infini, il existe une infinité de points entiers A_k contenus dans la droite D.</td><td></td></tr>
<tr><td>On peut en conclure qu’une droite contient soir 0, soit 1 soit une infinité de points entiers.</td><td></td></tr>
</table>

Partie II

1.a.	7 points entiers (0 ;0) ; (2 ;3) ; (4 ;6) ; (6 ;9) ; (8 ;12) ; (10 ;15) ; (12 ;18)	
1.b.	2021 points	
1.c.	53 points	
1.d.	Le nombre de points entiers est PGCD $(\lvert x_B - x_A \rvert\ ; \lvert y_B - y_A \rvert) + 1$.	
2.	On suppose qu’un segment contient deux points décimaux $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$distincts. Soit I_0 le milieu de $[AB]$, alors $I_0(\frac{x_A+x_B}{2}\ ; \frac{y_A+y_B}{2})$. Montrons que I_0 est un point décimal contenu dans le segment $[AB]$. $I_0 \in [AB]$ et I_0 est contenu dans le segment, il faut donc montrer que I_0 est un point décimal. Montrons que la somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal. Soient a, b, n et k quatre nombres entiers. $\frac{a}{10^k} + \frac{b}{10^n} = \frac{a\times10^n + b\times10^k}{10^{n+k}} = \frac{c}{10^m} \in \mathbb{D}$	

	On en déduit que $x_A + x_B$ et $y_A + y_B$ sont deux nombres décimaux. Il reste à montrer que la moitié d'un nombre décimal est un nombre décimal. Soient a et k deux nombres entiers. $\frac{\frac{a}{10^k}}{2} = \frac{a}{10^k} \times \frac{1}{2} = \frac{a}{10^k} \times \frac{5}{10} = \frac{5a}{10^{k+1}} \in \mathbb{D}$. Le milieu I_0 de $[AB]$ est donc un nombre décimal contenu dans le segment contenant les points A et B. On refait le même raisonnement en considérant le milieu I_1 du segment $[AI_0]$, puis le milieu I_2 du segment $[AI_1]$… puis le milieu I_{n+1} du segment $[AI_n]$. Comme cette itération peut être effectuée une infinité de fois, on en déduit que tout segment qui contient deux points décimaux en contient une infinité.	

Partie III

1.a.	Il y a 7 points entiers sur [AB], 3 sur [AC], 9 sur [BC] et 17 à l'intérieur, donc 36 en tout.	
1.b.	Pour (AB) : *x* = 2 Pour (AC) : $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$ Pour (BC) : $y = -x + 11$	
1.c.	Raisonnement argumentant sur le régionnement du plan par une droite On valorisera le candidat qui : - Donnera l'idée que si la droite correspond à l'égalité $y = ax + b$, alors els deux demi-plans correspondants sont associés l'un à $y > ax + b$ et l'autre à $y < ax + b$ - Reconnaîtra par des inéquations les demi-plans définissant le triangle	
1.d.	Le triangle est inclus entre les droites ($x = 2$) et ($x = 10$), d'où la réponse.	
1.e.	Algorithme	
2.	Par le graphique par exemple on trouve 16 points (14 ; 30), (14 ; 31), (15 ; 27), (15 ; 28), (15 ; 29), (15 ; 30), (16 ; 26), (16 ; 27), (16 ; 28) (16 ; 29), (17; 25), (17 ; 26), (17 ; 27), (17 ; 28), (18 ; 24) et (18 ; 25).  	

Exercice 2 : nombres puissants (candidats de voie générale ayant choisi l'enseignement de spécialité mathématiques)

1.a	$16 = 2^4$ donc le seul diviseur premier de 16 est 2. De plus, $16 = 2^2 \times 4$ donc 2^2 divise 16. Par conséquent, 16 est un nombre puissant. $72 = 2^3 \times 3^2$: ses diviseurs premiers sont 2 et 3, et leurs carrés (4 et 9) divisent 72. $18 = 2 \times 3^2$: 2 divise 18, mais pas 4.	
1.b	$144 = 2^4 \times 3^2$. Ses diviseurs premiers sont 2 et 3, et leurs carrés (4 et 9) divisent 144. 144 est donc puissant. $200 = 2^3 \times 5^2$. Ses diviseurs premiers sont 2 et 5, et leurs carrés (4 et 25) divisent 200. 200 est donc puissant. $2022 = 2 \times 3 \times 337$. Par exemple 12 divise 2022 mais pas 4, donc 2022 n'est pas puissant.	
1.c	Par définition on prend les nombres supérieurs ou égaux à 2 : les nombres puissants jusqu'à 10 sont donc : 4 ; 8 ; 9	
1.d	Un nombre premier p ne peut pas être puissant. Le seul diviseur premier de p est p. Or $p \geq 2$ donc $p^2 > p$. Par conséquent, p^2 ne divise pas p.	
1.e	un nombre est puissant si dans sa décomposition en facteurs premiers, aucun des exposants n'est égal à 1 (i.e. est supérieur ou égal à 2)	
2.a	8 et 9 par exemple	
2.b	Soit n un entier tel que n et $n+1$ soient des nombres puissants. Soit p un diviseur premier de $4n(n+1)$. D'après la propriété donnée dans l'énoncé, p divise 4 ou p divise n ou p divise $n+1$. - Comme 4, n et $n+1$ sont des nombres puissants alors p^2 divise 4 ou p^2 divise n ou p^2 divise $n+1$ donc p^2 divise $4n(n+1)$. Ainsi $4n(n+1)$ est un nombre puissant. - Nous avons : $4n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$. Soit p un diviseur premier de $4n(n+1)+1$ c'est-à-dire de $(2n+1)^2$. D'après la propriété donnée dans l'énoncé, p divise $2n+1$ et, par conséquent, p^2 divise $(2n+1)^2$. Ainsi, $4n(n+1)+1$ est un nombre puissant.	
2.c	Comme on connait une paire de nombre puissants consécutifs, on peut donc en construire une infinité.	
2.d	Par exemple, Le couple (332 928 ; 332 929) est un couple de nombres puissants consécutifs qui sont supérieurs à 2 022. Il est obtenu en partant du couple (8 ; 9) : $4 \times 8(8+1) = 288$ et $4 \times 288(288+1) = 332\,928$	
3.a	Soit n un nombre puissant. D'après la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers, il existe des nombres premiers distincts p_1, p_2, ..., p_k et des entiers naturels non nuls α_1 , α_2, ..., α_k tels que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. D'après la définition d'un nombre puissant, si un nombre premier p divise n alors p^2 divise n. Par conséquent, pour tout entier i compris entre 1 et k, $\alpha_i \geq 2$. D'après l'énoncé, pour tout entier i compris entre 1 et k, il existe deux entiers naturels u_i et v_i tels que $\alpha_i = 2u_i + 3v_i$. Nous avons alors $n = \left(p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_k^{u_k}\right)^2 \left(p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_k^{v_k}\right)^3$.	

	En posant $a = p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_k^{u_k}$ et $b = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_k^{v_k}$, nous obtenons que $n = a^2 b^3$ où a et b sont des entiers naturels.	
3.b	Soit a et b des entiers naturels. Soit p un diviseur premier de a^2b^3. D'après la propriété donnée dans l'énoncé, p divise a ou p divise b. Par conséquent, p^2 divise a^2 ou p^2 divise b^2. Ainsi, p^2 divise a^2b^3.	Il faut préciser que a et b sont supérieurs ou égaux à 2
3.c	Il existe 79 nombres puissants inférieurs ou égaux à 2 022.	
4.a	Soit n un entier naturel. • Supposons que n est un nombre d'Achille. D'après la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers, il existe des nombres premiers distincts $p_1, p_2, \dots, p_k$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tels que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots\ p_k^{\alpha_k}$. n n'est pas une puissance parfaite donc k$\geq$ 2. n est un nombre puissant donc, pour tout entier i compris entre 1 et k, $\alpha_i \geq 2$. Soit d un diviseur positif commun à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Pour tout entier i compris entre 1 et k, il existe un entier naturel β_i tel que $\alpha_i = \beta_i \times d$. Par conséquent, $n = (p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots\ p_k^{\beta_k})^d$. Or n n'est pas une puissance parfaite donc $d = 1$. • réciproquement : Supposons qu'il existe des nombres premiers distincts $p_1, p_2, \dots, p_k$ et des entiers naturels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ supérieurs ou égaux à 2 tels que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots\ p_k^{\alpha_k}$, $k \geq 2$ et tels que le seul diviseur positif commun à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ soit 1. $k \geq 2$ et le diviseur positif commun à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ est 1 donc n n'est pas une puissance parfaite. Pour tout entier i compris entre 1 et k, $\alpha \geq 2$ donc il existe des entiers naturels u_i et v_i tels que $\alpha_i = 2u_i + 3v_i$. Nous avons alors $n = \left(p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_k^{u_k}\right)^2 \left(p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_k^{v_k}\right)^3$. Or $p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_k^{u_k}$ et $p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_k^{v_k}$ sont des entiers naturels donc d'après la question 3(b), le nombre n est un nombre puissant. Par conséquent, n est un nombre d'Achille.	
4.b	D'après la question précédente, au moins un des facteurs premiers d'un nombre d'Achille est élevé à la puissance 3 donc, pour obtenir un nombre d'Achille inférieur ou égal à 2 022, il faut que son plus grand diviseur premier soit inférieur à $\sqrt{\frac{2\,022}{2^3}}$ donc 13 est le plus grand facteur possible.	
4.c	La liste des nombres d'Achille inférieurs ou égaux à 2 022 est :	

$2^3 \times 3^2 = 72$	$2^3 \times 3^4 = 648$	$2^7 \times 3^2 = 1\,152$
$2^2 \times 3^3 = 108$	$3^3 \times 5^2 = 675$	$3^3 \times 7^2 = 1\,323$
$2^3 \times 5^2 = 200$	$2^5 \times 5^2 = 800$	$2^3 \times 13^2 = 1\,352$
$2^5 \times 3^2 = 288$	$2^5 \times 3^3 = 864$	$2^2 \times 7^3 = 1\,372$
$2^3 \times 7^2 = 392$	$2^3 \times 11^2 = 968$	$2^5 \times 7^2 = 1\,568$
$2^4 \times 3^3 = 432$	$2^2 \times 3^5 = 972$	$2^3 \times 3^2 \times 5^2 = 1\,800$
$2^2 \times 5^3 = 500$	$3^2 \times 5^3 = 1\,125$	$2^3 \times 3^5 = 1\,944$
		$2^4 \times 5^3 = 2\,000$

Exercice 3 : l'art de répéter (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques de voie générale)

Partie I

1.	$\frac{37}{11} = 3,\underline{36}$ et $\frac{5}{13} = 0,\underline{384615}$.	
2.a	$100x = 1\,739,\underline{39}$	
2.b	Donc $100x - x = 1\,739,\underline{39} - 17,\underline{39} = 1\,722$ et $100x - x = 99x$ Par conséquent : $99x = 1\,722$ d'où $x = \frac{1\,722}{99} = \frac{574}{33}$.	

Partie II

1.	$[0,3,6] = \frac{1}{3+\frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{19}{6}} = \frac{6}{19}$ $[1,3,2,2,4] = 1 + \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}}} = 1 + \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{4}{9}}} = 1 + \frac{1}{3+\frac{9}{22}} = 1 + \frac{22}{75} = \frac{97}{75}$	
2.a	$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} = [3,7] = [3,6,1]$ $\frac{19}{12} = 1 + \frac{7}{12} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{7}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{5}{7}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{5}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{5}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{5}{2}}}} = 1 +$ $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = [1,1,1,2,2] = [1,1,1,2,1,1]$	
2.b	Supposons $[a_1, a_2] = [b_1, b_2]$ Autrement dit : $a_1 + \frac{1}{a_2} = b_1 + \frac{1}{b_2}$ où $a_1$et b_1 sont dans $\mathbb{Z}$ et $a_2$et b_2 sont dans $\mathbb{N}^*$. Alors : $\lvert a_1 - b_1 \rvert \in \mathbb{N}$ et $\lvert a_1 - b_1 \rvert = \left\lvert \frac{1}{b_2} - \frac{1}{a_2} \right\rvert < 1$ car $\left(\frac{1}{b_2}; \frac{1}{a_2}\right) \in]0\,;1] \times]0\,;1]$ Donc $\lvert a_1 - b_1 \rvert = 0 = \left\lvert \frac{1}{b_2} - \frac{1}{a_2} \right\rvert$ d'où $a_1 = b_1$ et $\frac{1}{b_2} = \frac{1}{a_2}$ donc $a_2 = b_2$. L'écriture est unique.	

2.c

```
def fractionContinue(a,b):
    L=[]
    while b!=1:
        q=a//b
        r=a%b
        L.append(q)
        if r==0:
            return L
        else :
            a=b
            b=r
    L.append(a)
    return L
```

3.a	$\sqrt{5} = 2 + (\sqrt{5} - 2) = 2 + \frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}+2} = 2 + \frac{1}{2+\sqrt{5}} = 2 + \frac{1}{2+2+\frac{1}{2+\sqrt{5}}} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{2+\sqrt{5}}} =$ $2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\sqrt{5}}}}$ Ainsi : $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\cdots}} = [2,4,4,\ldots]$ soit $\sqrt{5} = [2, \overline{4}]$.	
3.b	$x = 1 + \frac{1}{y}$ donc $\frac{1}{y} = x - 1 \neq 0$ d'où $y = \frac{1}{x-1}$	

	Or $y = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{y}}$ donc $\frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{2+(x-1)} = 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{x+1}$ D'où $(x-1)(x+2) = x+1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 = 3$ Puisque $x > 0$, on obtient $x = \sqrt{3}$.	
4.a	$\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi + 1$ Comme $\Phi > 0$, on en déduit $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}} = [\overline{1}]$.	
4.b	$[\overline{2}] = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}} = 1 + 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}$; autrement dit $[\overline{2}] = 1 + [1, \overline{2}]$ Par conséquent : $[\overline{2}] = 1 + \sqrt{2}$.	
4.c	$[\overline{3}] = 3 + \frac{1}{3+\frac{1}{3+\cdots}}$; autrement dit $[\overline{3}] = 3 + \frac{1}{x}$ avec $x = 3 + \frac{1}{x}$ donc $x^2 = 3x + 1$ Le nombre $[3]$ est une solution de l'équation $x^2 - 3x - 1 = 0$ dont les solutions sont les nombres $\frac{3-\sqrt{13}}{2} < 0$ et $\frac{3+\sqrt{13}}{2} > 0$; donc $[\overline{3}] = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.	
4.d	$x = [\overline{n}] \Leftrightarrow \left(x > 0 \; et \; x = n + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow (x > 0 \; et \; x^2 - nx - 1 = 0)$ Ainsi : $[\overline{n}]$ est la solution positive de l'équation $x^2 - nx - 1 = 0$; on en déduit : $[\overline{n}] = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$.	