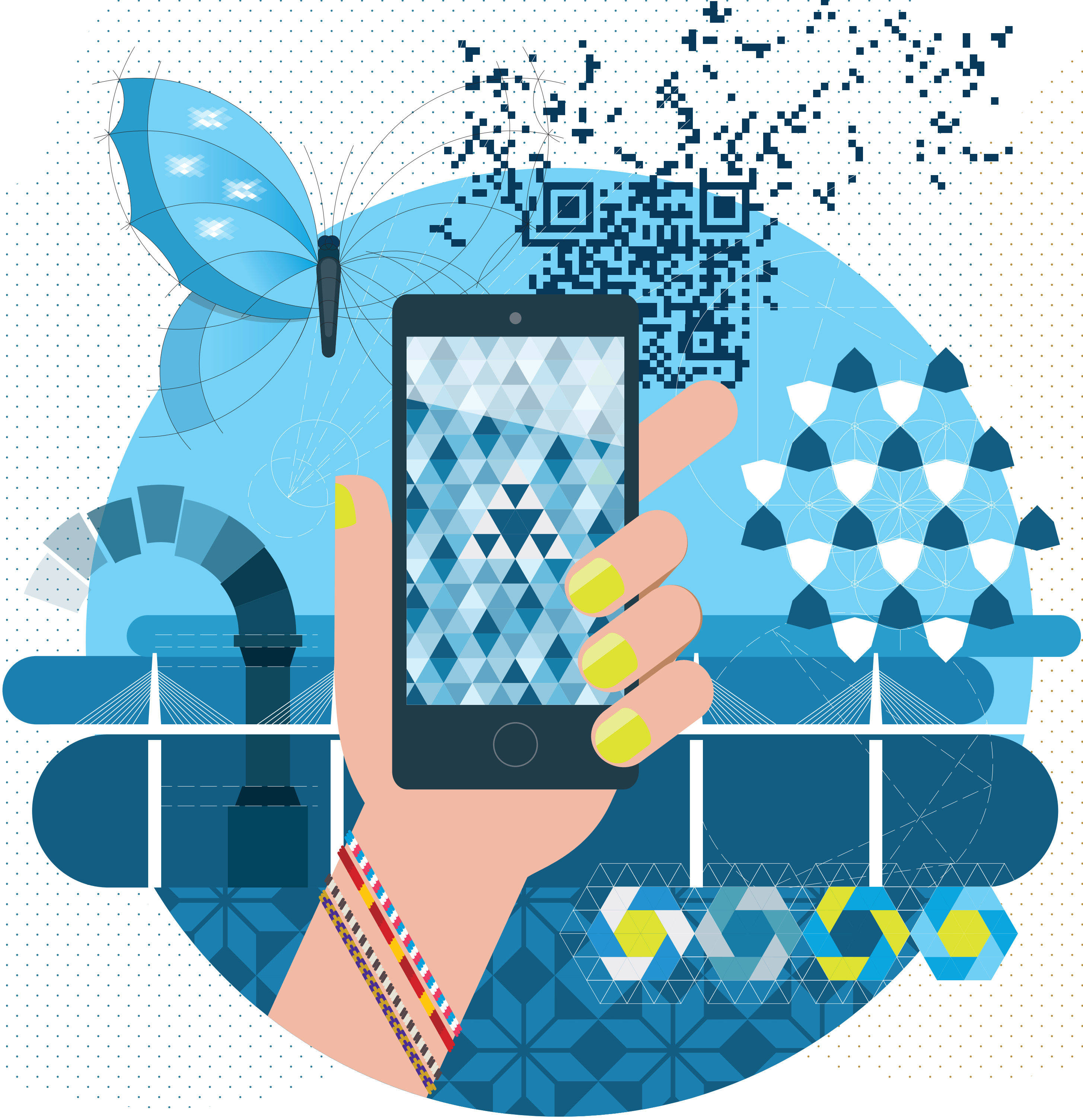
# OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

## ACADÉMIE DE MONTPELLIER 2021

## CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE



# 21$^{e}$ OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

ACADÉMIE
DE MONTPELLIER

*Liberté*
*Égalité*
*Fraternité*

# Correction Olympiades académiques de mathématiques 2021

***Mardi 23 mars 2021 15h10 – 17h10***

## *Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)*
## Les triplets de Markov

*Partie A : Triplets de Markov*

1.
   (a) Oui car 1, 2 et 5 sont des entiers naturels strictement positifs et $1^2 + 2^2 + 5^2 = 3 \times 1 \times 2 \times 5$

   (b) Non car $2^2 + 3^2 + 5^2 \neq 3 \times 2 \times 3 \times 5$
   (c) Non car le triplet contient 0
2.
   (a) Le triplet $(x; x; x)$ est un triplet de Markov si, et seulement si, $x$ est un entier naturel non nul tel que $3x^2 = 3x^3$. L'équation $3x^2 = 3x^3$ a une unique solution dans l'ensemble des entiers naturels non nuls. Cette solution est 1.
   L'unique valeur de $x$ telle que le triplet $(x; x; x)$ soit un triplet de Markov est donc 1.
   (b) Le triplet $(1; 1; 2)$ est un triplet de Markov car 1 et 2 sont des entiers naturels non nuls et $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 3 \times 1 \times 1 \times 2$.

   Supposons que $(x; x; z)$ est un triplet de Markov tel que $x \neq z$.
   Alors, $2x^2 + z^2 = 3x^2z$ c'est-à-dire $z^2 = x^2(3z - 2)$. Par conséquent, $x^2$ divise $z^2$ ce qui implique que $x$ divise $z$. Il existe donc un entier naturel non nul $k$ tel que $z = kx$. En remplaçant $z$par $kx$dans $z^2 = x^2(3z - 2)$ et en divisant par l'entier naturel non nul $x^2$, nous obtenons $k^2 = 3kx - 2$ c'est-à-dire $k(3x - k) = 2$. Par conséquent, $k$ est un diviseur de 2. Ainsi, $k \in \{1; 2\}$.
   * Si $k = 1$ alors $z = x$ ce qui est impossible par hypothèse.
   * Si $k = 2$ alors $2(3x - 2) = 2$ et $z = 2x$. Autrement dit, si $k = 2$ alors $x = 1$ et $z = 2$.

   Conclusion : Le seul triplet de Markov de la forme $(x; x; z)$ avec $x \neq z$ est le triplet $(1; 1; 2)$.

3. D'après la question 2, si $(x; y; z)$ est un triplet de Markov alors $x$, $y$ et $z$ sont deux à deux distincts sauf si deux de ces entiers valent 1 et le dernier vaut 1 ou 2. Les deux premiers triplets de Markov que nous venons de déterminer sont donc $(1; 1; 1)$ et $(1; 1; 2)$. Pour déterminer les autres triplets de Markov $(x; y; z)$ vérifiant la condition $\leq y \leq z \leq 5$ , nous pouvons effectuer une étude exhaustive des dix triplets d'entiers naturels non nuls de la forme $(x; y; z)$ avec $x < y < z \leq 5$.

| Si $(x; y; z)$ est égal à ... | alors $x^2 + y^2 + z^2 = \ldots$ | et $3xyz = \ldots$ | donc $(x; y; z)$... |
|---|---|---|---|
| $(1; 2; 3)$ | 14 | 18 | n'est pas un triplet de Markov. |
| $(1; 2; 4)$ | 21 | 24 | n'est pas un triplet de Markov. |
| $(1; 2; 5)$ | 30 | 30 | est un triplet de Markov. |
| $(1; 3; 4)$ | 26 | 36 | n'est pas un triplet de Markov. |
| $(1; 3; 5)$ | 35 | 45 | n'est pas un triplet de Markov. |
| $(1; 4; 5)$ | 42 | 60 | n'est pas un triplet de Markov. |
| $(2; 3; 4)$ | 29 | 72 | n'est pas un triplet de Markov. |
| $(2; 3; 5)$ | 38 | 90 | n'est pas un triplet de Markov. |
| $(2; 4; 5)$ | 45 | 120 | n'est pas un triplet de Markov. |
| $(3; 4; 5)$ | 50 | 180 | n'est pas un triplet de Markov. |

Par conséquent, les trois triplets de Markov $(x; y; z)$ tels que $x \leq y \leq z \leq 5$ sont $(1; 1; 1)$, $(1; 1; 2)$ et $(1; 2; 5)$.

4.

(a) Supposons que les triplets $(x; y; z)$ et $(x; y; t)$ sont deux triplets de Markov distincts.
Par définition, $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ et $x^2 + y^2 + t^2 = 3xyt$.
En soustrayant membre à membre ces deux égalités, nous obtenons $z^2 - t^2 = 3xy(z - t)$ c'est-à-dire $(z - t)(z + t) = 3xy(z - t)$.
Or $z$ n'est pas égal à $t$ donc $z + t = 3xy$.

(b) Supposons que $(x; y; z)$ est un triplet de Markov.
* $x$, $y$ et $z$ sont des entiers naturels non nuls donc $3xy - z$ est un entier relatif.
* $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ donc $3xy - z = \frac{x^2+y^2}{z}$ et, par conséquent, $3xy - z$ est un entier naturel non nul.
*$x^2 + y^2 + (3xy - z)^2 = x^2 + y^2 + 9x^2y^2 - 6xyz + z^2$
Or $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ donc $x^2 + y^2 + (3xy - z)^2 = 9x^2y^2 - 3xyz$
c'est-à-dire $x^2 + y^2 + (3xy - z)^2 = 3xy(3xy - z)$

Conclusion : Si $(x; y; z)$ est un triplet de Markov alors $(x; y; 3xy - z)$ est un triplet de Markov.

(c) En exécutant la fonction, nous obtenons que les premiers triplets mis dans la liste L sont : $(1; 1; 1)$, $(1; 1; 2)$ et $(1; 2; 5)$ qui sont bien des triplets distincts de Markov.
Pour démontrer que la fonction MarkovF renvoie une liste de triplets distincts de Markov, nous allons prouver que si $(x; y; z)$ est un triplet de Markov tel que $x < y < z$ (ce qui est vérifié par le triplet $(1; 2; 5)$) alors le triplet $(x; z; 3xz - y)$ est un triplet de Markov vérifiant
$x < z < 3xz - y$.

Supposons donc que $(x; y; z)$ est un triplet de Markov tel que $x < y < z$.

D'après la question précédente, le triplet $(x; z; 3xz - y)$ est un triplet de Markov.

Par définition d'un triplet de Markov, $3xz - y = \frac{x^2+z^2}{y}$.

Or $x^2 + z^2 > z^2$ et $\frac{1}{y} > \frac{1}{z}$ donc $3xz - y > z$.

Par conséquent, lors de chaque exécution de la boucle, un nouveau triplet de Markov est ajouté à la liste L.

La fonction MarkovF renvoie donc une liste de triplets de Markov $(x; y; z)$ qui sont deux à deux distincts et tels que $x \leq y \leq z$.

(d) $(1; 1; 1)$, $(1; 1; 2)$, $(1; 2; 5)$, $(1; 5; 13)$ et $(1; 13; 34)$ sont cinq triplets de Markov déterminés avec la fonction MarkovF.

5.

Les trois autres triplets de Markov distincts, à une permutation près, ayant deux valeurs communes avec le triplet $(x; y; z)$ sont $(x; 3xz - y; z)$, $(3yz - x; y; z)$ et $(x; y; 3xy - z)$.

Remarque : Ces triplets sont bien distincts car :

- $3xz - y > z$ (voir question 4a de la partie 1)
- $3yz - x > z$ (démonstration analogue à celle de la question 4a de la partie1)
- $3xy - z \neq z$. Pour démontrer ce dernier résultat, nous allons procéder par l'absurde et supposer que $3xy - z = z$. Nous avons alors que $3xy = 2z$.
  Comme $(x; y; z)$ est un triplet de Markov, $3xy - z = \frac{x^2+y^2}{z}$ et donc $x^2 + y^2 = z^2$.
  Or $3xyz = x^2 + y^2 + z^2$ donc $3xyz = 2(x^2 + y^2)$.
  Par hypothèse, $0 < x < y$ donc $3xyz < 4y^2$ c'est-à-dire $3xz < 4y$.
  Nous avons donc $6xz < 8y$ et $9x^2y = 6xz$. Par conséquent, $9x^2y < 8y$.
  Autrement dit, $9x^2 < 8$ ce qui est absurde car $x$ est un entier naturel strictement positif.
  Ainsi, $3xy - z \neq z$.

*Partie B : Briques markoviennes*

1. D'après la question 3 de la partie A, la seule brique markovienne ayant toutes ses dimensions inférieures ou égales à 5 a pour dimensions 1 ; 2 et 5 et donc pour volume 10.
   Toutes les autres briques markoviennes ont un volume supérieur ou égal à 12. En effet, l'une de ses dimensions est au moins égale à 6, les autres dimensions sont respectivement supérieures ou égales à 1 et à 2. Par conséquent, le volume minimal d'une brique de Markov est 10.

2. La brique markovienne située en bas à gauche a deux dimensions communes avec chacune des trois autres briques markoviennes.
   En utilisant la brique markovienne de volume minimal et les formules de propagation obtenues à la question 5b de la partie A, on obtient que des triplets de dimensions possibles pour les briques de ce solide sont $(1; 2; 5)$, $(1; 5; 13)$, $(5; 13; 194)$ et $(1; 13; 34)$. Le volume du solide construit avec ces briques est 13 127.

Pour vérifier que le volume est bien minimal, nous allons utiliser la fonction brique suivante qui renvoie la liste des triplets de Markov $(x; y; z)$ avec $x < y < z$ et $xyz < 13\,127$.

```
from math import sqrt
def brique():
    L=[]
    for i in range(1,24):
        for j in range(i+1,int(sqrt(13127/i))):
            for k in range(j+1,13127//(i*j)):
                if i**2+j**2+k**2==3*i*j*k:
                    L.append((i,j,k))
    return L
```

Nous obtenons que les seules briques markoviennes ayant un volume inférieur ou égal à 13 127 sont les briques dont les triplets des dimensions sont $(1; 2; 5)$, $(1; 5; 13)$, $(1; 13; 34)$, $(1; 34; 89)$, $(2; 5; 29)$, $(2; 29; 169)$ et $(5; 13; 194)$.

On remarque que, parmi ces triplets, seul le triplet $(1; 5; 13)$ a deux valeurs communes avec trois autres triplets de la liste. Par conséquent, les triplets des dimensions des briques markoviennes utilisées pour fabriquer un tel solide de volume minimal sont bien $(1; 2; 5)$, $(1; 5; 13)$, $(5; 13; 194)$ et $(1; 13; 34)$.
Le volume minimal d'un tel solide est donc 13 127.

## *Exercice académique 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)*

## Le facteur sonne toujours une fois (et une seule)

1) a) $d(1;3) + d(3;5) + d(5;4) + d(4;2) + d(2;1) = 2 + 2 + 1 + 2 + 1 = 8$.
   b) Par exemple, le trajet $1 \to 5 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$.
   c) Il y en a $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ car 4 choix pour la 2de maison (maisons 2, 3, 4 ou 5), puis 3 choix pour la 3e maison, puis 2 choix pour la 4e maison et 1 choix pour la 5e maison.
   d) La longueur minimale d'un trajet est 8 (on peut avoir la curiosité de regarder la question 2b). Le facteur doit se rendre à chacune des 5 maisons. Il devra donc passer par la maison 5 puis revenir à la maison 1. Ce qui lui fera faire un trajet de longueur au moins $d(1;5) + d(5;1) = 4 + 4 = 8$. Enfin, d'après la question 1a, cette longueur est atteinte.
   e) Il y en a $2^{5-2} = 2^3 = 8$. L'explication du cas général est faite à la question 2c. On peut dans cette question les donner tous, après avoir justifié que tout autre trajet serait plus long :
   $$\left.\begin{array}{l} 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 1\ ;\ 1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 4 \to 1 \\ 1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 3 \to 1\ ;\ 1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 3 \to 1 \end{array}\right\} \text{4 trajets où la maison 2 se visite avant la 5}$$
   $$\left.\begin{array}{l} 1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2 \to 1\ ;\ 1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 1 \\ 1 \to 4 \to 5 \to 3 \to 2 \to 1\ ;\ 1 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1 \end{array}\right\} \text{4 trajets où la maison 5 se visite avant la 2.}$$
2) a) Il y en a $(n-1)!$ c'est-à-dire $(n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$. En effet, pour la 1re maison visitée (exceptée la maison n°1 d'où il part), le facteur a $n-1$ possibilités (les maisons numérotées 2, …, $n$). Pour la 2e maison, il n'a que $n-2$ possibilités et ainsi de suite jusqu'à la $(n-1)$-ème où il n'a qu'une seule possibilité.
   b) Le facteur doit se rendre à chacune des $n$ maisons. Il devra donc passer par la maison numéro $n$ puis revenir à la maison 1. Ce qui lui fera faire un trajet de longueur au moins
   $$d(1;n) + d(n;1) = n - 1 + n - 1 = 2(n-1)$$
   Enfin, cette longueur est atteinte puisqu'il le trajet
   $$1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n-1 \to n \to 1$$
   est de longueur :
   $$d(1;2) + d(2;3) + \cdots + d(n-1;n) + d(n;1) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n-1} + (n-1) = 2(n-1)$$
   c) Remarquons tout d'abord que lors d'un trajet de longueur minimale, le facteur va vers la maison numéro $n$ puis revient vers la maison n°1 sans jamais rebrousser chemin (s'il devait rebrousser chemin, le trajet serait nécessairement plus long). Formellement cette remarque vient de l'inégalité triangulaire :
   $$|x-y| + |y-z| < |x-z| \text{ si } y \text{ n'est pas entre } x \text{ et } z.$$
   On vient donc de montrer que $m_0 < m_1 < \cdots < m_i$ et $m_i > m_{i+1} > \cdots > m_n$ où $m_0, m_1, \ldots, m_n$ sont les numéros de maisons visitées avec $m_0 = m_n = 1$ et $m_i = n$.
   Choisir un trajet de longueur minimale revient donc, pour tout élément de $\{2; \ldots; n-1\}$, à choisir s'il sera rangé parmi les termes qui seront réordonnés de manière croissante ou dans ceux qui le seront de manière décroissante (la place de $n$ est alors imposée). Chacun de ces $n-2$ éléments ayant deux choix possibles, il y a donc $2^{n-2}$ trajets de longueur minimale.
3)
   a) D'après les questions 2a, 2b et 2c, il y a en tout $3! = 6$ trajets possibles dont $2^{4-2} = 2^2 = 4$ d'entre eux sont de longueur minimale, égale à $2(4-1) = 6$. Les deux trajets restants sont : $1 \to 4 \rightarrowtail 2 \to 3 \rightarrowtail 1$ et $1 \to 3 \rightarrowtail 2 \to 4 \rightarrowtail 1$ qui sont tous les deux de longueur 8 donc de longueur maximale (il n'y a pas d'autres trajets).

Remarque : dans ces deux trajets, le facteur revient vers la maison n°1 (en ayant effectué un changement de sens) exactement 2 fois (là où les flèches sont de la forme « $\rightarrowtail$ »).

b) 1re méthode : on peut bien sûr donner les longueurs de chacun des $4! = 24$ trajets et vérifier qu'il y a 8 trajets de longueur maximale, égale à 12 :

| 8 trajets de longueur 8 : | 8 trajets de longueur 10 : | 8 trajets de longueur 12 : |
|---|---|---|
| $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 2 \to 4 \rightarrowtail 3 \to 5 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 3 \to 4 \rightarrowtail 2 \to 5 \rightarrowtail 1$ |
| $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 4 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 2 \to 5 \rightarrowtail 3 \to 4 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 3 \to 5 \rightarrowtail 2 \to 4 \rightarrowtail 1$ |
| $1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 3 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 3 \rightarrowtail 2 \to 4 \to 5 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 4 \rightarrowtail 2 \to 3 \to 5 \rightarrowtail 1$ |
| $1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 3 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 3 \rightarrowtail 2 \to 5 \to 4 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 4 \rightarrowtail 2 \to 5 \to 3 \rightarrowtail 1$ |
| $1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 4 \rightarrowtail 3 \to 5 \to 2 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 4 \rightarrowtail 3 \to 2 \to 5 \rightarrowtail 1$ |
| $1 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 4 \to 5 \rightarrowtail 2 \to 3 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 5 \rightarrowtail 2 \to 3 \to 4 \rightarrowtail 1$ |
| $1 \to 4 \to 5 \to 3 \to 2 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 5 \rightarrowtail 3 \to 4 \to 2 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 5 \rightarrowtail 2 \to 4 \rightarrowtail 3 \to 1$ |
| $1 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 5 \rightarrowtail 4 \to 2 \to 3 \rightarrowtail 1$ | $1 \to 5 \rightarrowtail 3 \to 2 \to 4 \rightarrowtail 1$ |

2de méthode : on peut aussi raisonner ! Ce qui permettra ainsi de se préparer à la question 3c. Pour cela, intéressons-nous, comme dans la remarque précédente, au nombre maximum de fois où le facteur revient vers la maison n°1 (en ayant effectué un changement de sens). Dans le cas où $n = 4$, ce nombre est égal à 2. Dans le cas où $n = 5$, montrons que ce nombre est encore 2. En effet, il n'y a que 5 maisons donc 5 déplacements ($1 = m_0 \to m_1$ ; $m_1 \to m_2$ ; $m_2 \to m_3$ ; $m_3 \to m_4$ et $m_4 \to m_5 = 1$ avec les notations de la question 2c). On a donc au plus 5 changements de sens et donc au plus $\left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$ changements de sens avec retour vers la maison n°1. Le trajet donné à la question 1b : $1 \to 5 \rightarrowtail 2 \to 4 \rightarrowtail 3 \to 1$ montre que ce nombre est atteint et vaut donc bien 2.
Bien sûr, les trajets où le nombre de fois où le facteur revient vers la maison 1 (en ayant effectué un changement de sens) est égal à 1 correspond aux trajets de longueur minimale.
Dans le cas des autres trajets, le facteur se dirige vers la maison n°5, puis vers la maison n°1 puis de nouveau vers la numéro 5 puis vers la numéro 1. Comme il y a 5 déplacements une des maisons visitées ne fera pas rallonger le trajet. Par exemple, le trajet
$1 \to 3 \to 4 \rightarrowtail 2 \to 5 \rightarrowtail 1$ a la même longueur que celle du trajet $1 \to 4 \rightarrowtail 2 \to 5 \rightarrowtail 1$. On peut donc ne considérer que 4 déplacements en retirant une maison.
Parmi ces 4 déplacements, maximisons les 2 déplacements dans le sens 1 vers 5. La somme des distances de ces 2 déplacements est au plus 6 : $1 \to 5$ et $2 \to 4$ (ou $1 \to 4$ et $2 \to 5$). De même la somme des déplacements dans le sens 5 vers 1 est également au plus 6 : $5 \to 2$ et $4 \to 1$ (ou $4 \to 2$ et $5 \to 1$). Ainsi, la longueur d'un trajet est au plus 12 et ce nombre est atteint d'après la question 1b.

c) Reprenons les notations de la question 2c. Définissons d'abord une suite d'indices entre lesquels la suite $(m_i)$ croît ou décroît. On commence par poser $b_1 = 0$ et considérer $h_1$ le plus grand indice $k \geq b_1$ tel que $m_k > m_{k-1}$. On définit ensuite $b_2$ comme le plus grand indice $k \geq h_1$ tel que $m_k < m_{k-1}$.
On construit ainsi de suite deux séquences $b_1 = 0, \dots, b_q, b_{q+1} = n$ et $h_1, \dots, h_q$ telles que pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ : $m_{b_i} < \cdots < m_{h_i}$ et $m_{h_i} > \cdots > m_{b_{i+1}}$. A noter que $q$ est le nombre maximum de fois où le facteur revient vers la maison n°1 (en ayant effectué un changement de sens). Avec ces notations,
- la longueur du trajet $m_{b_i} \to \cdots \to m_{h_i}$ est $m_{h_i} - m_{b_i}$
- la longueur du trajet $m_{h_i} \to \cdots \to m_{b_{i+1}}$ est $m_{h_i} - m_{b_{i+1}}$.

La longueur totale $l$ du trajet est donc donnée par :

$$\begin{aligned} l &= m_{h_1} - m_{b_1} + m_{h_1} - m_{b_2} + \cdots + m_{h_q} - m_{b_q} + m_{h_q} - m_{b_{q+1}} \\ &= m_{h_1} - m_{b_1} + m_{h_1} - m_{b_2} + \cdots + m_{h_q} - m_{b_q} + m_{h_q} - m_{b_1} \quad \text{car } m_{b_{q+1}} = m_1 \\ &= 2\left(\left(m_{h_1} + \cdots + m_{h_q}\right) - \left(m_{b_1} + \cdots + m_{b_q}\right)\right) \end{aligned}$$

Renumérotons les suites $(m_{h_i})$ et $(m_{b_i})$ de sorte que la suite $(m_{b_i})$ soit strictement croissante et $(m_{h_i})$ soit strictement décroissante. Comme on a rangé par ordre strictement croissant les $m_{b_i}$, on a :

$$m_{b_i} = \underbrace{m_{b_i} - m_{b_{i-1}}}_{\geq 1} + \underbrace{m_{b_{i-1}} - m_{b_{i-2}}}_{\geq 1} + \cdots + \underbrace{m_{b_2} - m_{b_1}}_{\geq 1} + \underbrace{m_{b_1}}_{=1} \geq i$$

De même, comme on a rangé par ordre strictement décroissant les $m_{h_i}$, on a alors $m_{h_1} = n$ et

$$m_{h_i} = \underbrace{m_{h_i} - m_{h_{i-1}}}_{\leq -1} + \underbrace{m_{h_{i-1}} - m_{h_{i-2}}}_{\leq -1} + \cdots + \underbrace{m_{h_2} - m_{h_1}}_{\leq -1} + \underbrace{m_{h_1}}_{=n} \leq -(i-1) + n$$

D'où $m_{h_i} \leq n + 1 - i$.

On a alors $-m_{b_i} \leq -i$ d'où en ajoutant membre à membre avec l'inégalité précédente, il vient $m_{h_i} - m_{b_i} \leq n + 1 - 2i$. Ainsi,

$$\begin{aligned} l &= 2\left(m_{h_1} - m_{b_1} + m_{h_2} - m_{b_2} + \cdots + m_{h_q} - m_{b_q}\right) \\ &\leq 2\big((n-1) + (n-3) + \cdots (n+1-2q)\big) \\ &\leq 2q(n-q) \end{aligned}$$

car il y a $q$ termes et que $1 + 3 + \cdots + (2q-1) = \frac{1+(2q-1)}{2} \times q = q^2$.

Maintenant, comme la fonction polynôme du second degré $f: x \mapsto x(n-x)$ est croissante sur $\left]-\infty; \frac{n}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{n}{2}; +\infty\right[$ $\left(a < 0 \text{ et } \frac{-b}{2a} = \frac{n}{2}\right)$ on en déduit que $f$ atteint son maximum en $f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}\left(n - \frac{n}{2}\right) = \frac{n^2}{4}$ donc la longueur totale du trajet $l \leq 2 \times \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{2}$.

**Complément** : en fait, la longueur maximale du trajet est $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ (la partie entière[1] de $\frac{n^2}{2}$).
Pour le montrer, il suffit de montrer que $l \leq \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ (pour cela, reprendre la dernière majoration faite, en distinguant les cas $n$ pair et $n$ impair). Enfin, cette valeur est atteinte, il suffit de prendre $q = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$, de prendre $m_{b_i} = i$ et $m_{h_i} = n + 1 - i$.

[1] La partie entière d'un réel $x$ notée $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal $x$.

***Exercice académique 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)***

**Une somme de produits**

1) **Multiplication scolaire**
    a) 2 multiplications élémentaires pour $3 \times 95$ et 20 pour $12345 \times 6789$.
    b) On considère les développements décimaux de $x$ et $y$ :
    $$x = \sum_{i=0}^{n-1} c_i 10^i \text{ et } y = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 10^i \text{ où } c_i \text{ et } d_i \in \llbracket 0\,;9 \rrbracket$$
    Le développement du produit $xy$ est composé de $n \times m$ multiplications élémentaires $c_i d_j$

2) **Algorithme de Karatsuba**
    a) Soit $x$ et $y$ deux nombres entiers à 2 chiffres : $x = \overline{ab} = 10 \times a + b$ et $y = \overline{cd} = 10 \times c + d$

    $$\begin{aligned} &ac \times 100 + \big(ac + bd - (a-b)(c-d)\big) \times 10 + bd \\ &= ac \times 100 + (ac + bd - ac + ad + bc - bd) \times 10 + bd \\ &= ac \times 100 + (ad + bc) \times 10 + bd \\ &= (10 \times a + b)(10 \times c + d) = xy \end{aligned}$$

    On a bien $xy = ac \times 100 + \big(ac + bd - (a-b)(c-d)\big) \times 10 + bd$

    b) $a = 1, b = 2, c = 3$ et $d = 4$
    La relation précédente montre que 3 multiplications élémentaires suffisent :
    $$ac, bd \text{ et } (a-b)(c-d)$$

    c) On écrit $1234 = 100 \times 12 + 34$ et $5678 = 100 \times 56 + 78$ puis le produit sous la forme $(100 \times a + b)(100 \times c + d)$ avec $a = 12, b = 34, c = 56$ et $d = 78$
    La relation $(100 \times a + b)(100 \times c + d) = ac \times 10^4 + \big(ac + bd - (a-b)(c-d)\big) \times 10^2 + bd$ montre qu'on peut effectuer ce calcul avec 3 multiplications de nombres de deux chiffres qui nécessitent 3 multiplications chacune. Il est donc possible de calculer $1234 \times 5678$ avec 9 multiplications élémentaires.

    d) Soit $x$ et $y$ deux nombres entiers à $2^n$ chiffres.
    - On écrit $xy = (10^{2^{n-1}} \times a_1 + b_1)\,(10^{2^{n-1}} \times c_1 + d_1)$ où $a_1, b_1, c_1$ et $d_1$ sont des entiers à $2^{n-1}$ chiffres.
    On peut effectuer ce calcul avec les 3 multiplications $a_1 b_1, c_1 d_1\ et\ (a_1 - b_1)(c_1 - d_1)$
    - De la même manière, chacun des produits précédents peut se calculer en 3 multiplications d'entiers à $2^{n-2}$ chiffres.
    - On partage en deux de proche en proche chaque entier $a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i$ de la relation

$a_{i+1}b_{i+1} = (10^{2^{n-i}} \times a_i + b_i)\,(10^{2^{n-i}} \times c_i + d_i)$ qui peut s'effectuer en 3 multiplications élémentaires d'entiers à $2^{n-i}$ chiffres.

- Au final, on aura donc besoin de $3^n$ multiplications élémentaires.

e) La multiplication de l'écolier nécessite $4^n$ multiplications élémentaires alors que la méthode de Karatsuba n'en exige que $3^n$.
On cherche la valeur minimale de $n$ telle que $3^n < 0{,}1 \times 4^n$ c'est-à-dire $0{,}75^n < 0{,}1$.
La calculette dit que $0{,}75^8 > 0{,}1$ et $0{,}75^9 < 0{,}1$ et la suite $(0{,}75^n)$ étant décroissante on a $n \geq 9$.

**3) Multiplication à la russe.**

a) RUSSE (3,5) = 15 et RUSSE (32,13) = 416

| $x$ | $y$ | $p$ |
|---|---|---|
| 3 | 5 | 0 |
| 1 | 10 | 5 |
| 0 | 20 | **15** |

| $x$ | $y$ | $p$ |
|---|---|---|
| 32 | 13 | 0 |
| 16 | 26 | 0 |
| 8 | 52 | 0 |
| 4 | 104 | 0 |
| 2 | 208 | 0 |
| 1 | 416 | 0 |
| 0 | 832 | **416** |

b) Pour garder le même nombre de chiffres, on peut multiplier la plus petite puissance de 2 par au plus $2^3$. Donc parmi les nombres entiers à $N$ chiffres, il y a au maximum 4 puissances de 2 :
Soit $2^{n_0}$ la plus petite puissance de 2 à $N$ chiffres, on a $10^{N-1} \leq 2^{n_0} < 10^N$

- Si $2^{n_0} < \frac{10^N}{8}$ alors les 4 nombres $2^{n_0}$, $2^{n_0+1}$, $2^{n_0+2}$ et $2^{n_0+3}$ ont tous $N$ chiffres
- Si $2^{n_0} \geq \frac{10^N}{8}$ alors au maximum 3 nombres ($2^{n_0}$, $2^{n_0+1}$, et $2^{n_0+2}$ ) ont $N$ chiffres puisqu'alors $2^{n_0+3} \geq 10^N$

c) Pour chaque nouvelle valeur de $N$ on a au plus 4 valeurs de $n$ supplémentaires donc $\geq \frac{n}{4}$.

d) Pour tout entier naturel $x$, on admet que la fonction RUSSE $(x, x)$ retourne $x^2$.
La multiplication à la russe compte autant de multiplications que de divisions. Si on prend $x = 2^n$, on a $2 \times (n+1) = 2n + 2$ opérations qui équivalent à des multiplications élémentaires.
Prenons un entier $x$ à $N$ chiffres tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$, il s'agit de comparer $N^2$ et $2(n+2) = 2n + 4$.
D'après la question 3) c), $N \geq \frac{n}{4}$
On a $N^2 \geq \frac{n^2}{16}$ et l'inégalité $\frac{n^2}{16} - 2n - 4 > 0$ est vérifiée dès que $n \geq 34$.
Donc à partir $2^{34}$, la multiplication à la russe demande moins de multiplications élémentaires que la multiplication de l'écolier.
*En réalité, la minoration $N \geq \frac{n}{4}$ est très grossière et $N^2 > 2n + 4$ dès que $n \geq 24$*

e) Tableau des variables :

| $X$ | $y$ | $p$ | $p + xy$ |
|---|---|---|---|
| 12 | 13 | 0 | 156 |
| 6 | 26 | 0 | 156 |
| 3 | 52 | 0 | 156 |
| 1 | 104 | 52 | 156 |

f) L'entier $x$ est divisé par 2 à chaque itération, il deviendra nécessairement nul après un nombre fini d'itérations donc la boucle est finie.
Le tableau précédent suggère de prouver que la variable $p + xy$ est un invariant de la boucle :

- C'est évidemment vrai avant la boucle : $p + xy = xy$
- Supposons que la relation $p + xy = xy$ reste vraie à la fin de chaque itération.
  Soit $x', y'$ et $p'$ les valeurs respectives de $x$, $y$ et $p$ à la fin d'une itération.
  Deux cas :
  - Si $x$ est pair, on a $x' = \frac{x}{2}, y' = 2y$ et $p' = p$
    Donc $p' + x'y' = p + \frac{x}{2}2y = p + xy$
  - Si $x$ est impair on a $x' = \frac{x-1}{2}, y' = 2y$ et $p' = p + y$
    Donc $p' + x'y' = p + y + \frac{x-1}{2}2y = p + y + xy - y = p + xy$

Conclusion : pour tout entier naturel $x$ et $y$, RUSSE $(x, y = xy$