OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

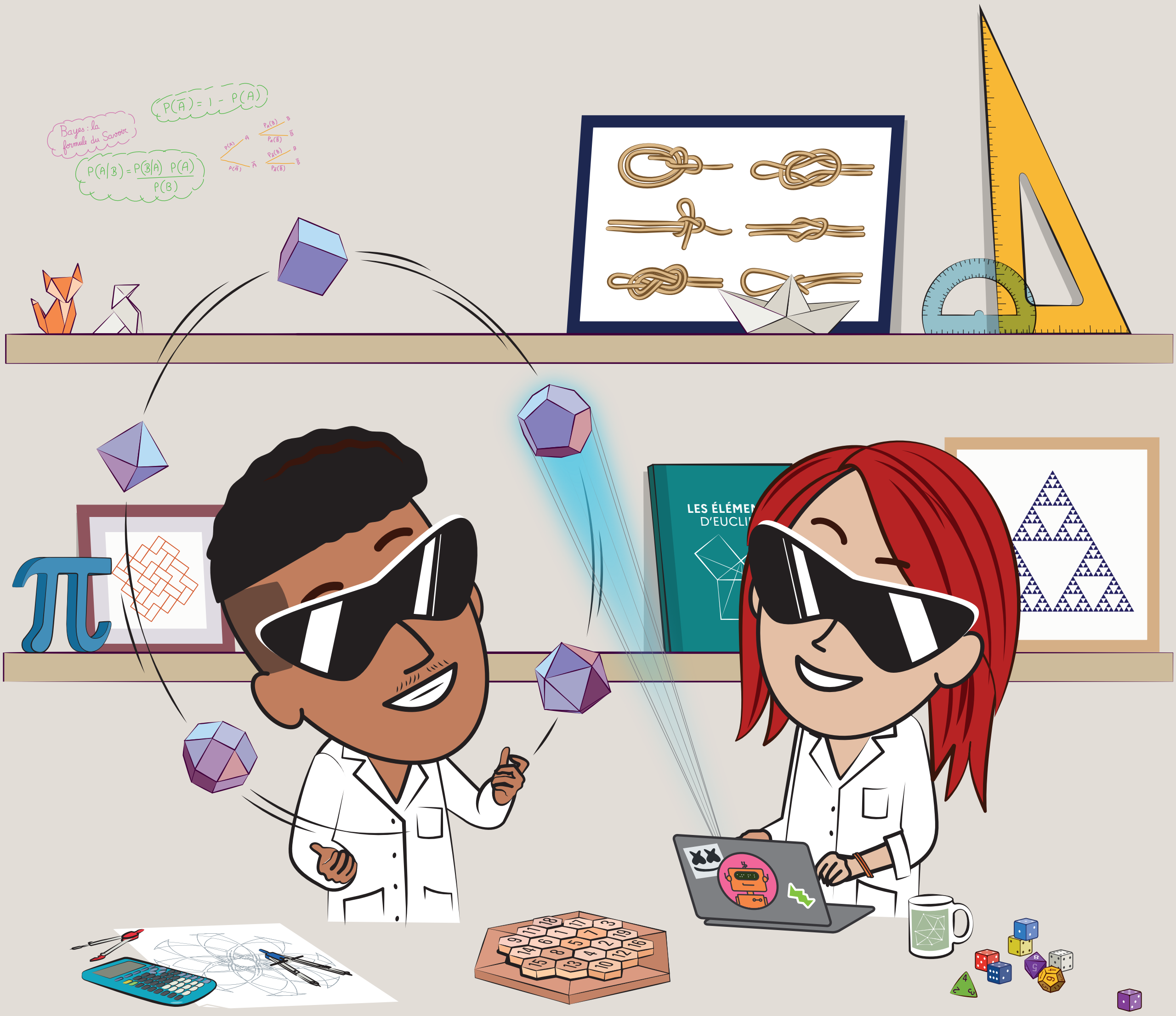
ACADÉMIE DE LYON
2023

SUJET DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

Au terme de l'article L. 141-5 du Code du sport, le terme Olympiade, marque d'usage notoire, ne peut être reproduit sans l'autorisation du Comité national olympique et sportif français, titulaire des droits afférents.

Animath CASIO Crédit Mutuel Enseignant Inria Texas Instruments

ACADÉMIE DE LYON
Liberté Égalité Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES DE MATHÉMATIQUES

Sujet académique

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2h) :

Tous les candidats doivent traiter les deux exercices académiques.

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition. Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

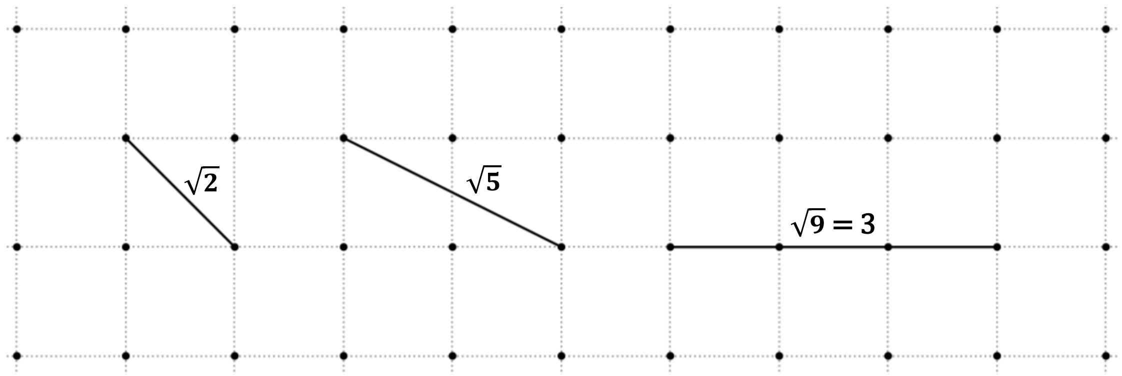
Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

EXERCICE 1 : LES LONGUEURS TRAÇABLES DANS UNE GRILLE UNITÉ

Une grille unité est une grille formée de carrés de longueur 1. Les sommets de ces carrés sont alors appelés nœuds de la grille. Le but de ce problème est d'étudier les longueurs que l'on peut obtenir en reliant en ligne droite deux nœuds d'une grille unité et de savoir s'il existe plusieurs possibilités pour obtenir ces longueurs.

<u>Partie I : Premiers exemples.</u>



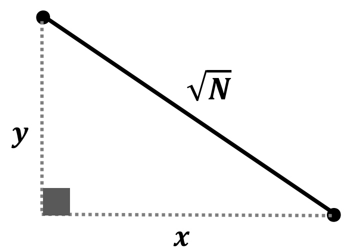
1) Justifier les longueurs $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$ indiquées dans la grille unité ci-dessus.

<u>Définition générale :</u>

Soit N un entier naturel.

On dira que $\sqrt{N}$ **est traçable** dans une grille unité s'il existe deux entiers naturels x et y tels que $\boldsymbol{N = x^2 + y^2}$

Dans ces conditions on écrira que $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.



Ainsi avec les exemples précédents on a : $\sqrt{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\sqrt{5} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\sqrt{9} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) Montrer que les longueurs $\sqrt{17}$; $\sqrt{32}$ et $\sqrt{45}$ sont traçables.

3) Soit N un entier naturel : montrer que si $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ alors $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$.

<u>Partie II : Longueurs deux fois traçables.</u>

1) Montrer que $\sqrt{85} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$ puis que $\sqrt{85} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Soit N un entier naturel. On dira que $\sqrt{N}$ est deux fois traçable s'il existe deux couples distincts $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ d'entiers naturels, avec $x_1 \geq y_1$ et $x_2 \geq y_2$, tels que $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

Ainsi $\sqrt{85}$ est deux fois traçable car $\sqrt{85} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$.

2) Montrer que $\sqrt{25}$, $\sqrt{50}$ et $\sqrt{65}$ sont deux fois traçables.

3) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note : $N_k = 5k^2 + 5$.

a) Préciser la valeur de N_2 : la longueur $\sqrt{N_2}$ est-elle deux fois traçable ?

b) Montrer que pour $k \geq 3$: $\sqrt{N_k} = \begin{bmatrix} 2k+1 \\ k-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k-1 \\ k+2 \end{bmatrix}$ puis déduire que $\sqrt{N_k}$ est deux fois traçable.

c) Réciproquement, si N est un entier naturel tel que $\sqrt{N}$ est deux fois traçable, N est-il nécessairement de la forme $5k^2 + 5$ avec k entier naturel supérieur ou égal à 2 ? Justifier.

Partie III : Etude des longueurs plusieurs fois traçables.

Soit N un entier naturel. On admettra le résultat suivant :

> $\boldsymbol{\sqrt{N}}$ **est deux fois traçable si et seulement si :**
>
> $\boldsymbol{N = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$ **avec $\boldsymbol{a, b, c, d}$ entiers naturels tels que $\boldsymbol{a > b \geq 1}$ et $\boldsymbol{c > d \geq 1}$**
>
> **Et dans ces conditions on a :** $\boldsymbol{\sqrt{N} = \begin{bmatrix} ac+bd \\ |ad-bc| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{bmatrix}}$

On rappelle que $|y|$ désigne la valeur absolue de y : $|y| = y$ si $y \geq 0$

et $|y| = -y$ si $y \leq 0$.

Par exemple $|3| = 3$ et $|-7| = 7$.

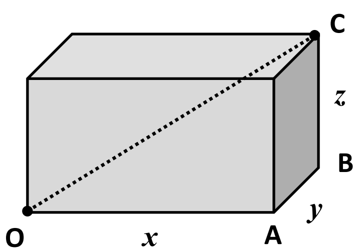
1) Justifier que si N est un nombre premier, $\sqrt{N}$ n'est pas deux fois traçable.

2) Déterminer les deux plus petits entiers naturels N non multiples de 5 tels que $\sqrt{N}$ soit deux fois traçable, et pour chacun d'eux, préciser les deux couples $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ avec $x_1 \geq y_1$ et $x_2 \geq y_2$ correspondants.

3) Sachant que $2023 = 7 \times 17 \times 17$, justifier que $\sqrt{2023}$ n'est pas deux fois traçable.

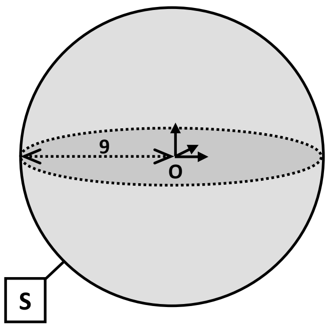
4) En remarquant que $325 = 5 \times 65$, montrer que $\sqrt{325}$ est trois fois traçable et préciser les trois couples distincts $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ avec $x \geq y$ correspondants.

Partie IV : Étude d'une configuration dans l'espace.



1) Dans le dessin ci-contre O, A, B, C sont des sommets d'un parallélépipède rectangle de longueurs x, y, z.

Montrer que $OC^2 = x^2 + y^2 + z^2$.



2) *a*) Soient x, y et z des entiers naturels tels que :

$$x \leq y \leq z \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 = 81 :$$

Montrer que $6 \leq z \leq 9$.

b) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère la sphère S de centre O et de rayon 9 (voir schéma ci-contre).

Déterminer le nombre exact de points de coordonnées entières (entiers naturels ou relatifs) situés sur la sphère S.

EXERCICE 2 : PAVER AVEC DES RECTANGLES D'ASPECT UNIQUE

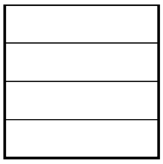
On appelle ***pavage rectangle*** *d'un carré, un ensemble fini de rectangles dont l'union forme le carré sans recouvrement. Le nombre de rectangles du pavage est appelé* ***effectif du pavage****.*

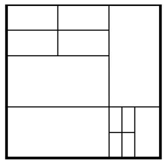
On appelle ***aspect*** *d'un rectangle le quotient de sa longueur (mesure du plus grand côté) par sa largeur (mesure du plus petit côté).*

Exemples : un rectangle de côtés 3 et 5 a un aspect égal à $\frac{5}{3}$; un carré a un aspect égal à 1.

Si A est un entier strictement positif, on appelle ***A-pavage*** *tout pavage rectangle d'un carré composé uniquement de rectangles d'aspect égal à A.*

Exemples :

La figure  est un 4-pavage d'effectif 4 (composé de 4 rectangles d'aspect 4).

La figure  est un 2-pavage d'effectif 12 (composé de 12 rectangles d'aspect 2).

Partie I : Étude des 1-pavages

Question 1. Démontrer qu'il n'existe pas de 1-pavage d'effectif 2.

Question 2. Démontrer qu'il existe une infinité de 1-pavages d'effectifs tous différents.

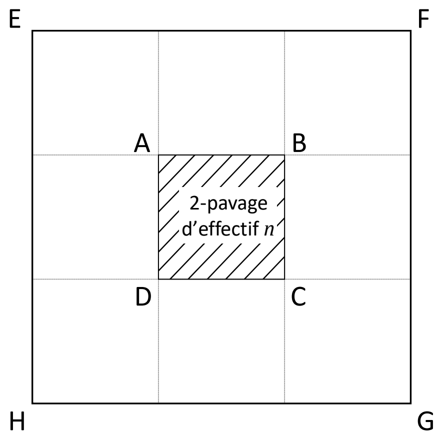
Partie II : Étude des 2-pavages

Question 3. *a*) Démontrer qu'il n'existe pas de 2-pavage d'effectif 1.

b) Dessiner sans justification un 2-pavage d'effectif 2, puis un 2-pavage d'effectif 5.

c) Justifier que s'il existe un 2-pavage d'effectif n alors il en existe aussi un d'effectif $n + 3$.

d) Dessiner un 2-pavage d'effectif 8 puis un d'effectif 11.



Question 4. *a*) Reproduire la figure ci-contre. En supposant que l'on a déjà un 2-pavage d'effectif n du carré ABCD, construire un 2-pavage d'effectif $n + 4$ du carré EFGH.

b) En déduire qu'il existe un 2-pavage d'effectif 6, un 2-pavage d'effectif 9 et un 2-pavage d'effectif 10.

Question 5. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 8 il existe un 2-pavage d'effectif n.

Question 6. Dessiner un 2-pavage d'effectif 7.

Partie III : Étude des A-pavages

Dans cette partie, A est un entier supérieur ou égal à 2.

Question 7. En expliquant rapidement la démarche, construire :

a) un A-pavage d'effectif A,

b) un A-pavage d'effectif $A + 3$,

c) un A-pavage d'effectif $A + 4$, et

d) un A-pavage d'effectif $A + 5$.

Question 8. Déduire de la question 1 que pour tout entier n supérieur ou égal à $A + 3$, il existe un A-pavage d'effectif n.

Partie IV : Deux problèmes d'existence

Question 9. Soit A un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer s'il existe des A-pavages d'effectif strictement inférieur à A. Justifier.

Question 10. Démontrer qu'il n'existe pas de 2-pavage d'effectif 3.