OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE LYON
2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

21^{e} OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Voie générale

Académie de Lyon

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie («exercices nationaux»). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie («exercices académiques»). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Résolution individuelle

Les candidats traitent **les deux exercices**.

Boites de macarons inversibles

Un triplet (A ; B ; C) est dit "pythagoricien" si A, B, C sont des entiers naturels non nuls tels que $A^2 + B^2 = C^2$

Partie 1 : Triplets pythagoriciens contenant 2021

1) Les triplets (2021 ; 180 ; 2029) et (2021 ; 1520 ; 2529) sont-ils pythagoriciens ?

2) Soit un triplet pythagoricien (2021 ; B ; C)

a) Montrer que $(C - B)(C + B) = 2021^2$

b) Sachant que $2021 = 43 \times 47$ (1 ; 2021 ; 43 et 47 étant les seuls entiers naturels diviseurs de 2021), déterminer tous les triplets pythagoriciens de la forme (2021 ; B ; C).

Partie 2 : Application des triplets pythagoriciens :

Un pâtissier vend des boites carrées remplies de deux sortes de macarons (représentés par des disques gris et noirs). Ce pâtissier veut trouver des boites où il peut former un carré central de macarons gris entouré de macarons noirs, puis un carré central de macarons noirs entouré de macarons gris *sans changer le nombre de macarons de chaque sorte* (pour avoir deux présentations différentes d'un même produit) : on dira que ces boites sont "inversibles", comme dans l'exemple ci-dessous d'une boite de 100 macarons composée de 64 macarons gris et de 36 macarons noirs.

1) *a*) À l'aide de la boite inversible ci-dessus, montrer qu'il existe une boite inversible contenant 400 macarons, puis une boite inversible contenant 1600 macarons.

***b*)** Montrer qu'il existe une infinité de boites inversibles.

Pour une boite inversible on note : G le nombre de macarons gris,
N le nombre de macarons noirs,
T le nombre total de macarons.

2) Justifier que $G = A^2$, $N = B^2$ et $T = C^2$ où (A ; B ; C) est un triplet pythagoricien.

3) Montrer qu'il n'existe pas de boite inversible contenant autant de macarons gris que de macarons noirs (on pourra utiliser le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel : $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme le quotient de deux entiers).

4) *a*) Justifier par des arguments géométriques que G, N et T sont pairs.

***b*)** On rappelle qu'un entier est impair s'il peut s'écrire sous la forme $(2p + 1)$ avec p entier.
Démontrer que le carré d'un entier impair est impair.

***c*)** Déduire que A, B et C sont pairs.

5) *a*) Soient x, y, k entiers naturels non nuls avec $x < y$: montrer que $(2kxy ; k(y^2 - x^2) ; k(x^2 + y^2))$ est pythagoricien.

***b*)** *Dans cette question on admettra que, à une inversion de A et B près, les triplets pythagoriciens* (*A, B, C*) *avec A, B, C tous pairs sont ceux de la forme* $(2kxy ; k(y^2 - x^2) ; k(x^2 + y^2))$ *avec :*

- *k entier naturel non nul,*
- *x et y entiers naturels impairs tels que $x < y$.*

Le pâtissier souhaite trouver les trois plus petites boites inversibles (c'est-à-dire les trois plus petites valeurs de T possibles) : en faisant varier k, x, y de façon ordonnée, déterminer les valeurs de T, G, N pour chacune de ces trois boites.

Proposition de solution (D'autres méthodes restant possibles) :

Partie 1 :

1) $180^2 + 2021^2 = 4\ 116\ 841 = 2029^2$ donc (2021 ; 180 ; 2029) est pythagoricien.

$2021^2 + 1520^2 = 6\ 394\ 841$ et $2529^2 = 6\ 395\ 841$ donc (2021 ; 1520 ; 2529) n'est pas pythagoricien (attention au chiffre des milliers !)

2) *a*) $2021^2 + B^2 = C^2 \Leftrightarrow 2021^2 = C^2 - B^2 = (C - B)(C + B)$

b) Soient $X = C - B$ et $Y = C + B$ on a : $\underline{X < Y \text{ et } XY = 2021^2}$ (alors $C = (X+Y)/2$ et $B = C - X$),

Or $2021^2 = 43^2 \times 47^2 = 43 \times 43 \times 47 \times 47$ d'où les valeurs de X à envisager :

- $X = 1$ et $Y = 43 \times 43 \times 47 \times 47$: on trouve $C = (X+Y)/2 = 2\ 042\ 221$ et $B = C - X = 2\ 042\ 220$
- $X = 43$ et $Y = 43 \times 47 \times 47$: $C = 47\ 515$ et $B = 47\ 472$
- $X = 43^2$ et $Y = 47^2$: $C = 2029$ et $B = 180$
- $X = 47$ et $Y = 43 \times 43 \times 47$: $C = 43\ 475$ et $B = 43\ 428$

D'où les triplets solutions :

(2021 ; 180 ; 2029) ; (2021 ; 43 428 ; 43 475) ; (2021 ; 47 472 ; 47 515) et (2021 ; 2 042 220 ; 2 042 221).

Partie 2 :

1) *a*) On obtient encore une boite carrée inversible en remplaçant dans l'exemple chaque macaron par un carré de macarons 2 x 2 de même couleur, d'où 400 macarons (autre façon de raisonner : on peut aussi placer 4 boites de 100 macarons côte à côte en carré de 2 x 2, et rapprocher les carrés de macarons centraux de même couleur au centre de l'ensemble, on obtient bien alors une boite inversible)

On procède la même façon en partant de la boite inversible de 400 macarons pour obtenir une boite inversible de 1600 macarons.

b) En réitérant ce processus, on peut obtenir des boites inversibles contenant 100×4^n macarons, d'où une infinité de boites carrées inversibles.

Remarque : on peut aussi penser à remplacer chaque macaron par des carrés de macarons n x n de même couleur, d'où une infinité de boites inversibles du type $100 \times n^2$.

2) Les macarons noirs, gris et totaux formant tous des carrés dans la boite inversible on a $G = A^2$; $N = B^2$; $T = C^2$

Or $T = G + N$ donc $C^2 = A^2 + B^2$ d'où (A ; B ; C) triplet pythagoricien.

3) $T = G + N$ donc si $G = N$ alors $T = 2G$ d'où $C^2 = 2A^2$ donc $2 = C^2/A^2$ donc $\sqrt{2} = C/A$: impossible car $\sqrt{2}$ irrationnel.

4) *a*) G et N sont pairs car lorsqu'ils entourent le carré central, les macarons peuvent se décomposer en un nombre pair de lignes et un nombre pair de colonnes. On déduit que $T = G + N$ est aussi pair.

b) Soit $X = 2p+1$ impair, $X^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1 = 2P+ 1$ avec $P = 2p^2 + 2p$ entier, donc X^2 est impair.

c) On sait $G = A^2$ est pair, or si A était impair A^2 serait impair, donc A n'est pas impair, donc A est pair.

Même raisonnement pour B et C.

5) *a*) Soient $A = 2kxy$; $B = k(y^2 - x^2)$; $C = k(x^2 + y^2)$: A, B, C sont des entiers naturels non nuls avec :

$A^2 + B^2 = 4k^2x^2y^2 + k^2(y^2 - x^2)^2 = 4k^2x^2y^2 + k^2(y^4 + x^4 - 2y^2x^2) = k^2(y^4 + x^4 + 2y^2x^2) = k^2(y^2 + x^2)^2 = C^2$

Donc (A ; B ; C) pythagoricien.

b) Il s'agit de trouver les 3 plus petites valeurs de $T = C^2$ et donc de C.

Ayant montré que (A ; B ; C) est un triplet pythagoricien avec A, B, C tous pairs, on ordonne la recherche sur $C = k(x^2 + y^2)$ (selon la formule proposée) suivant les valeurs de k puis x puis y (avec $y > x$ et impairs)

$k = 1$: $x = 1$; $y = 3$ on obtient C = **<u>10</u>**

$y = 5$ on obtient C = **<u>26</u>**

$y = 7$ on obtient C = **50** et on s'arrête pour y car les valeurs suivantes de C seront supérieures aux 3 précédentes.

$x = 3$; $y = 5$ on obtient C = **34**

$y = 7$: on s'arrête pour y car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 34.

$x = 5$; $y = 7$: on s'arrête pour x car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 34.

$k = 2$: $x = 1$; $y = 3$ on obtient C = **<u>20</u>**

$y = 5$ on s'arrête pour y car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 26

$x = 3$; $y = 5$ on s'arrête pour x car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 26.

$k = 3$: $x = 1$; $y = 3$: C = 30

On s'arrête-là pour k car les valeurs suivantes de C seront supérieures à 26.

Donc C = 10 ; 20 ; 26 et avec A = $2kxy$ et B = $k(y^2 - x^2)$ on déduit les valeurs de A et de B correspondantes :

Pour C = 10 : k = 1 ; x = 1 ; y = 3 d'où A = 6 ; B = 8

Boite 10 x 10 : T=C²= 100 macarons : G=A²= 64 d'une sorte et N= B² = 36 de l'autre (donnée en exemple).

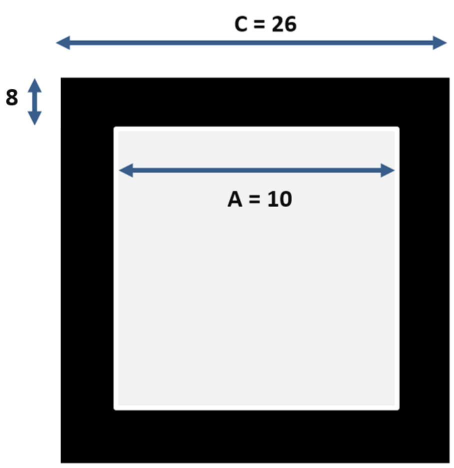
Pour C = 20 : k = 2 ; x = 1 ; y = 3 d'où A = 12 ; B = 16

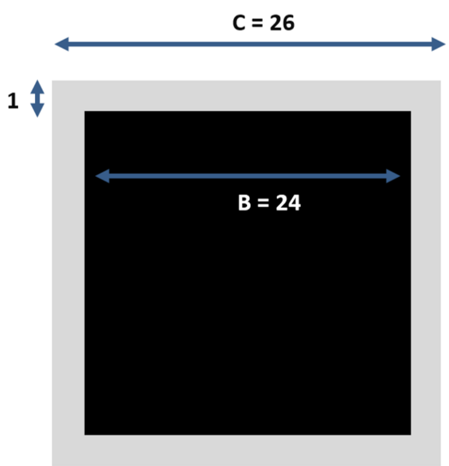
Boite 20 x 20 : T = 400 macarons : G = 144 d'une sorte et N = 256 de l'autre (trouvée au I) 1) a))

Pour C = 26 : k = 1 ; x = 1 ; y = 5 d'où A = 10 ; B = 24

Boite 26 x 26 : T = 676 macarons : G = 100 d'une sorte et N = 576 de l'autre.

Réciproquement : À strictement parler, il n'a pas été clairement prouvé précédemment que les conditions sur C sont suffisantes (seulement nécessaires), donc on doit vérifier que réciproquement cette dernière boite de 26 x 26 est bien inversible par exemple par un dessin de ce type (celles à 100 et 400 macarons ayant été trouvées dans II] 1) a), il n'est pas utile de le vérifier) :



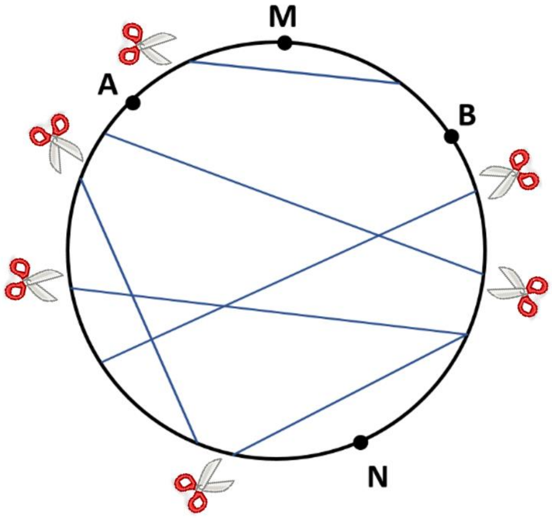


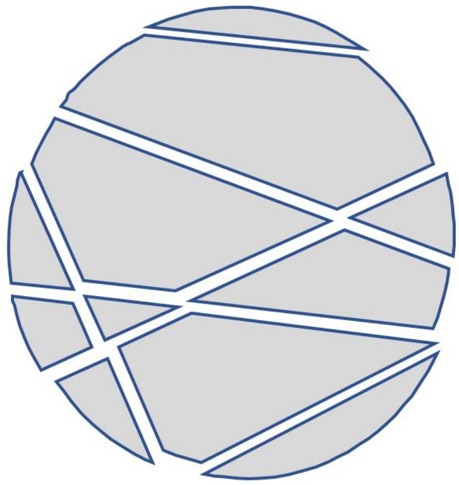
Nombre de lignes dans le cadre noir : (26-10)/2 = 8, et on a bien 4 x 8 x 10 + 4 x 8² = 576 macarons noirs

Nombre de lignes dans le cadre gris : (26-24)/2 = 1, et on a bien 4 x 1 x 24 + 4 x 1 = 100 macarons gris

On a vérifié que, réciproquement, la boite 26 x 26 est bien inversible.

Découpage complet d'un disque et nombre de parties





On considère un disque qu'on découpe suivant un nombre **C** de **cordes**, concourantes ou non (on rappelle qu'une corde d'un cercle est un segment dont les extrémités sont 2 points distincts du cercle).

On obtient alors un nombre **P** de « morceaux de disque » que l'on appellera **parties**.

Dans tout l'exercice on supposera qu'à l'intérieur du disque (***c'est-à-dire en dehors des points du cercle***), *chaque intersection de cordes n'appartiendra qu'à deux cordes seulement, ces intersections seront appelées « intersections simples ».*

On note **S** le nombre d'**intersections simples**.

Dans l'exemple d'illustration ci-dessus, on a C = 6 ; P = 11 et S = 4.

Partie I : Relation entre P, C et S :

1) ***a*** **)** Tracer la corde [AB] dans le disque ci-dessus puis préciser les nouvelles valeurs de C, P, S.

b **)** Tracer la corde [MN] (en plus de [AB]) puis préciser les nouvelles valeurs de C, P, S.

c **)** Tracer la corde [AN] (en plus des 2 précédentes) puis préciser les nouvelles valeurs de C, P, S.

2) Etude du cas général :

On considère un disque contenant C cordes, P parties et S intersections simples.

On trace une nouvelle corde [AB] et on note k le nombre d'intersections simples sur la corde [AB] (k entier naturel, pouvant être nul), P' le nombre de parties, S' le nombre d'intersections simples et C' le nombre de cordes dans le disque.

a **)** Justifier que S' = S + k et que P' = P + k + 1 puis montrer que P' – S' – C' = P – S – C .

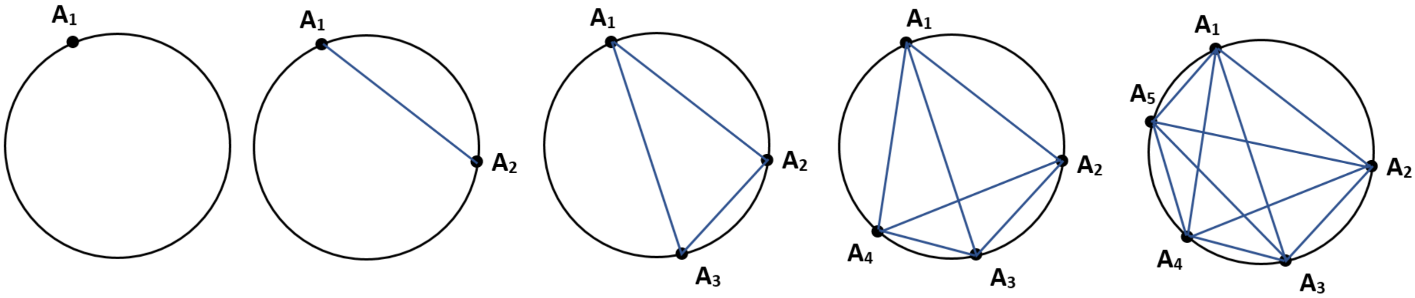
b **)** Déduire que, quel que soit le nombre C de cordes tracées dans le disque, on a : P – S – C = 1 .

Partie II : Application au découpage complet d'un disque : conjectures et calculs.

On considère N points distincts deux à deux $A_1, \dots, A_N$ sur un cercle (N entier naturel non nul).
Chaque point est relié à tous les autres par des cordes (on dira qu'on a un découpage complet du disque). Comme dans la Partie I, on suppose que les points d'intersection des cordes à l'intérieur du disque sont des intersections simples.

On note : C_N le nombre de cordes,
S_N le nombre d'intersections simples,
P_N le nombre de parties dans le disque.

1) Voici les 5 premiers cas de figure :



a **)** Préciser les valeurs de P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

b **)** Au vu de ces premières valeurs de P_N, conjecturer les valeurs de P_6 et de P_9.

Cas général : dans la suite, on considère N points $A_1, A_2, \dots, A_N$ sur le cercle.

2) Soit A_k un des points sur le cercle ($1 \leq k \leq N$).
Combien de cordes contiennent le point A_k ? Déduire que $C_N = \frac{N(N-1)}{2}$.

3) On admet qu'il y a 24 façons d'ordonner 4 éléments { A ; B ; C ; D }.
(Par exemple { A ; B ; C ; D } ; { A ; B ; D ; C } ; { A ; C ; B ; D } ; … ; { D ; C ; B ; A })
Montrer que $S_N = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}$.

4) Établir que $P_N = 1 + \frac{N(N-1)(N^2-5N+18)}{24}$.

5) ***a*** **)** Retrouver par le calcul les valeurs de P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 ; P_5 puis calculer P_6.

b **)** Existe-t-il un entier naturel N tel que $P_N = 256$? Préciser.

Proposition de solution (D'autres méthodes restant possibles)

Partie I

1) *a*) En traçant la corde [AB] on compte C = 7 cordes, P = 12 parties et S = 4 intersections simples.

b) En ajoutant [MN] on trouve : C = 8 ; P = 19 ; S = 10.

c) En ajoutant [AN] on trouve : C = 9 ; P = 24 ; S = 14.

2) *a*) • S' = S + k :

Dans cet exercice les k intersections sur [AB] étant supposées simples elles sont toutes distinctes des S intersections précédentes (car autrement elles seraient intersection de 3 cordes, donc pas simples) donc elles s'ajoutent aux S intersections précédentes.

- Pour P' = P + k + 1 :

Si k = 0, [AB] sépare une partie en 2, d'où l'ajout d'une partie donc P' = P + 0 + 1

Sinon soient I_1, … , I_k les intersections simples sur [AB] : les k+1 segments [AI_1] ; … ; [$I_{k-1}I_k$] ; [I_KB] séparent une partie en 2, d'où l'ajout de k + 1 parties dans le disque, donc P' = P + k +1.

- Par ajout de la corde [AB] on a donc P' = P + k + 1 ; S' = S + k et C' = C + 1 d'où :

$P' – S' – C' = (P + k + 1) – (S + k) – (C + 1) = P – S – C.$

b) Le résultat précédent montre que l'ajout d'une corde dans le disque ne change pas la valeur de P – S – C, laquelle reste donc constante quel que soit le nombre C de cordes, or pour C = 0 corde on a le disque dans son entier donc dans ce cas P – S – C = 1 – 0 – 0 = 1, donc quel que soit le nombre C de cordes on a : P – S – C = 1.

Partie II

1) *a*) On compte successivement : $P_1 = 1$; $P_2 = 2$; $P_3 = 4$; $P_4 = 8$; $P_5 = 16$ parties dans le disque.

b) Avec ces premiers exemples on observe que lorsqu'on ajoute un point sur le cercle, le nombre de parties double ce qui nous amène à conjecturer que $P_6 = 2 \times P_5 = 32$ et $P_9 = P_6 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$.

2) Les cordes contenant A_k s'obtiennent en reliant A_k au (N-1) autres points, d'où (N-1) cordes.

Comme il y a N points, on déduit que l'on peut former N×(N-1) cordes en tout, mais ce faisant chaque corde sera comptée deux fois ($[A_pA_q]$ et $[A_qA_p]$) d'où le nombre de cordes $C_N = \frac{N(N-1)}{2}$.

3) Les intersections étant simples, chaque intersection peut être associée de manière unique à 4 points que l'on pourra noter A, B , C , D, et inversement, par contre l'ordre des points A, B, C , D est indifférent pour y associer son intersection simple.

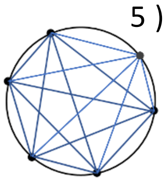
Comme il y a N points pour le choix de A, associés à (N-1) autres pour B, (N-2) autres pour C et (N-3) autres pour D, on a donc N(N-1)(N-2)(N-3) façons de choisir 4 points parmi N, mais par ce mode de calcul on compte (on distingue) les différents ordres de A, B, C, D possibles donc le nombre d'intersections simples est $S_N = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}$.

Remarque : ce raisonnement suppose $N \geq 4$ mais pour N = 1; 2; 3 on a $S_N = 0$ donc cette formule reste valable.

4) Avec la Partie I) 2) *b*) , on a $P_N = 1 + S_N + C_N$ et avec 2) et 3) précédents on déduit que :

$$\begin{aligned} P_N &= 1+\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}+\frac{N(N-1)}{2} \\ &= 1+\frac{N(N-1)[(N-2)(N-3)+12]}{24} \\ &= 1+\frac{N(N-1)(N^2-5N+18)}{24}. \end{aligned}$$

5) *a*) Avec cette formule on retrouve $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$, $P_4 = 8$, $P_5 = 16$ comme observé au 1) *a*),



par contre on trouve $P_6 = 31$ (et non 32 contrairement à ce qui a été conjecturé au 1) *b*) !!)

b) Avec un tableau de valeurs obtenu à la calculatrice on obtient $P_{10} = 256$ (et non pour P_9 (= 162) contrairement à ce qui a été conjecturé au 1) b) !!).

Moralité : conjecture ne vaut pas propriété, observation (même convaincante) ne vaut pas démonstration !