OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

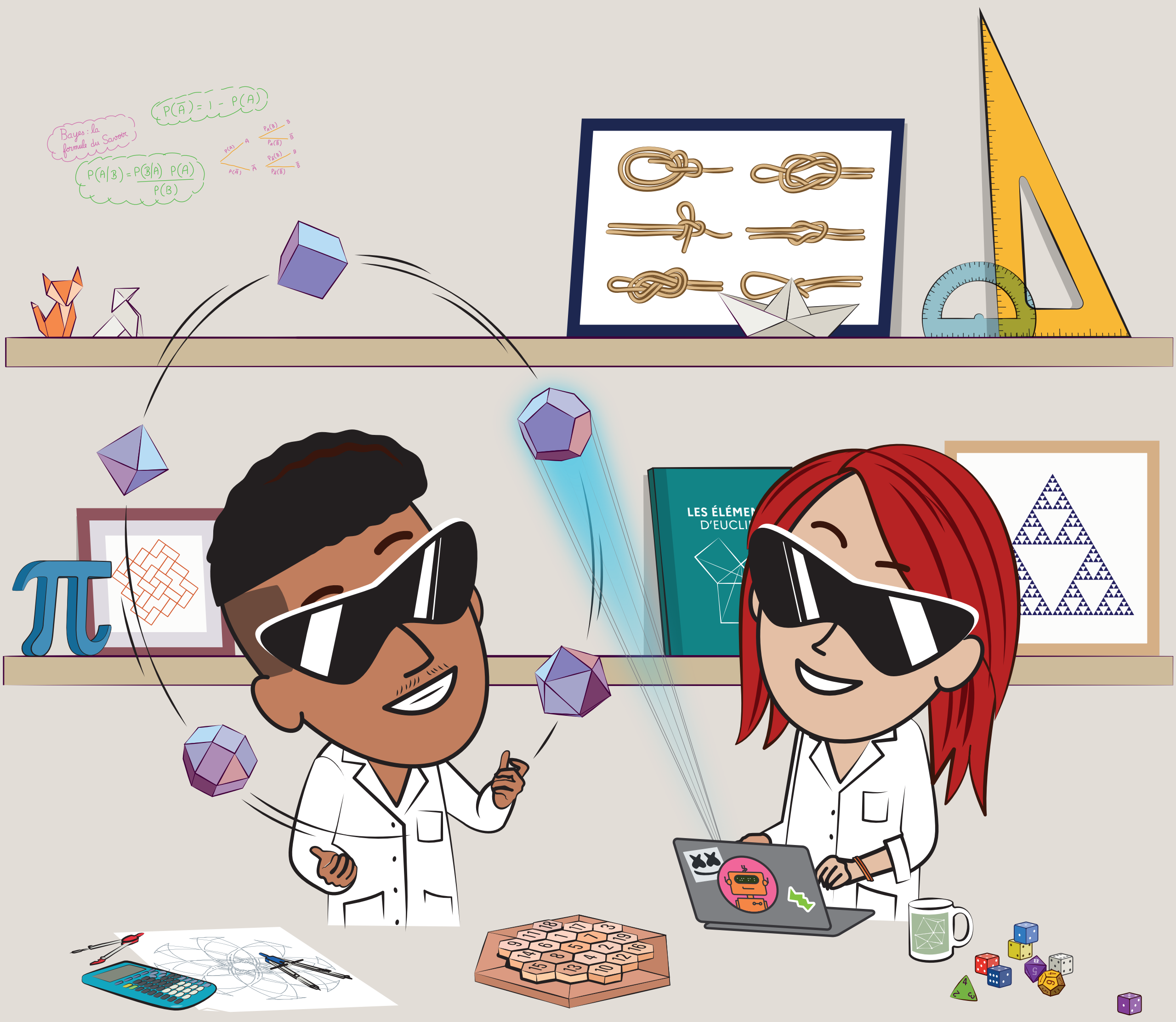
ACADÉMIE DE LYON
2023

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

LYON 2023

Exercice 1 : Longueurs traçables dans une grille unité

Partie I : Premiers exemples

1. $2 = 1^2 + 1^2$. Le nombre $\sqrt{2}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 1.

$5 = 1^2 + 2^2$. Le nombre $\sqrt{5}$ est la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 1 et 2.

2. $17 = 16 + 1 = 4^2 + 1^2$ et donc $\sqrt{17} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$32 = 16 + 16 = 4^2 + 4^2$ et donc $\sqrt{32} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. On note à son propos que $32 = 16 \times 2 = 4^2 \times 2$; la traçabilité de 2 que nous avons justifiée implique celle de 32.

$45 = 36 + 9 = 6^2 + 3^2$ et donc $\sqrt{45} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$. On note à son propos que $45 = 9 \times 5 = 3^2 \times 5$; la traçabilité de 5 que nous avons justifiée implique celle de 45.

$\sqrt{17}, \sqrt{32}, \sqrt{45}$ sont traçables.

3. L'addition dans l'ensemble des entiers naturels est une opération commutative. Quels que soient les entiers x et y : $x^2 + y^2 = y^2 + x^2$. C'est pourquoi $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \sqrt{N} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$

Partie II : Longueurs deux fois traçables

1. $85 = 81 + 4 = 9^2 + 2^2$ et $85 = 49 + 36 = 7^2 + 6^2$, ce qui justifie : $\sqrt{85} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$.

2. $25 = 5^2 + 0^2$ et $25 = 16 + 9 = 4^2 + 3^2$, ce qui justifie : $\sqrt{25} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$50 = 49 + 1 = 7^2 + 1^2$ et $50 = 25 + 25 = 5^2 + 5^2$, ce qui justifie : $\sqrt{50} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

$65 = 64 + 1 = 8^2 + 1^2$ et $65 = 49 + 36 = 7^2 + 6^2$, ce qui justifie : $\sqrt{65} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\sqrt{25}, \sqrt{50}, \sqrt{65}$ sont deux fois traçables.

3.a. $N_2 = 5 \times 2^2 + 5 = 20 + 5 = 25$ et nous avons vu que $\sqrt{25} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ était deux fois traçable.

3.b. Montrons que, pour tout entier $k \geq 2$, le nombre $\sqrt{N_k} = \sqrt{5k^2 + 5}$ est deux fois traçable :

- D'une part $(2k + 1)^2 + (k - 2)^2 = (4k^2 + 4k + 1) + (k^2 - 4k + 4) = 5k^2 + 5 = N_k$
- D'autre part $(2k - 1)^2 + (k + 2)^2 = (4k^2 - 4k + 1) + (k^2 + 4k + 4) = 5k^2 + 5 = N_k$

Assurons-nous qu'il s'agit bien de deux décompositions distinctes :

$(2k + 1) - (k + 2) = k - 1$. Pour tout entier $k > 1$, la différence $(2k + 1) - (k + 2)$ est non nulle donc les entiers $2k + 1$ et $k + 2$ sont des entiers distincts ; $2k + 1$ et $2k - 1$ le sont aussi. Par conséquent $2k + 1$ est distinct de chacun des deux nombres de la deuxième décomposition : il s'agit bien de deux décompositions distinctes.

Pour tout entier $k > 1$, le nombre $\sqrt{N_k} = \sqrt{5k^2 + 5}$ est deux fois traçable.

3.c. Les nombres deux fois traçables ne sont pas nécessairement tous des nombres $\sqrt{N_k}$. Par exemple, le nombre $\sqrt{65}$ est deux fois traçable, comme nous l'avons vu, mais n'est pas de la forme $\sqrt{5k^2 + 5}$. Il en est ainsi également du nombre $13 = \sqrt{169} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Partie III : Etude des longueurs plusieurs fois traçables

1. D'après le résultat admis, la racine carrée d'un entier N est deux fois traçable si et seulement si l'entier N est un produit $(a^2+b^2)\times(c^2+d^2)$ avec $a>b\geq 1$ et $c>d\geq 1$.

Si les entiers *a, b, c, d* vérifient les inégalités $a>b\geq 1$ et $c>d\geq 1$, nous pouvons affirmer que *a* et *c* sont tous deux supérieurs ou égaux à 2 et que les entiers a^2+b^2 et c^2+d^2 sont tous deux supérieurs ou égaux à $2^2+1^2=5$.

Nous en déduisons que si $\sqrt{N}$ est deux fois traçable, alors N est composé et est le produit de deux entiers tous deux au moins égaux à 5.

Si N est un nombre premier, alors il est non composé, *a fortiori* il n'est pas le produit de deux entiers tous deux au moins égaux à 5. Par contraposition :

La racine carrée d'un nombre premier est non traçable.

2 (Sans Python). D'après le résultat admis, pour que $\sqrt{N}$ soit deux fois traçable, il est nécessaire que N soit le produit de deux nombres dont la racine carrée est traçable.

Dressons la liste des premières racines carrées $\sqrt{N}=\sqrt{x^2+y^2}$ traçables vérifiant la condition $x>y\geq 1$. Nous pouvons lister ainsi, par ordre croissant, les racines carrées des entiers 5, 10, 13, 17, 20, …

Hormis 2 et 4, les deux premiers nombres non multiples de 5 dont les racines carrées sont traçables sont 13 et 17. Avec eux, nous pouvons construire les plus petits nombres deux fois traçables et non multiples de 5.

D'abord $13\times 13=169=(3^2+2^2)\times(3^2+2^2)$ nous donne : $\begin{cases}\sqrt{169}=13=\begin{bmatrix}3\times3+2\times2\\3\times2-2\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\0\end{bmatrix}\\ \sqrt{169}=13=\begin{bmatrix}3\times3-2\times2\\3\times2+2\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\12\end{bmatrix}\end{cases}$

Ensuite $13\times 17=221=(3^2+2^2)\times(4^2+1^2)$ nous donne : $\begin{cases}\sqrt{221}=\begin{bmatrix}3\times4+2\times1\\|3\times1-2\times4|\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\5\end{bmatrix}\\ \sqrt{221}=\begin{bmatrix}3\times4-2\times1\\3\times1+2\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}\end{cases}$

En résumé : $\sqrt{169}=13=\begin{bmatrix}13\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\5\end{bmatrix}$ et $\sqrt{221}=\begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\5\end{bmatrix}$ sont les deux premiers entiers non multiples de 5 qui sont deux fois traçables.

2. Même question … avec Python

L’algorithme **multitra** dresse la liste des entiers inférieurs ou égaux à un nombre donné dont la racine carrée est plusieurs fois traçable. Nous y repérons les entiers 169 et 221.

```
>>> from math import floor,sqrt
>>> def multitra(n):
        for u in range(1,n):
            f=0
            for x in range(0,floor(sqrt(u))):
                for y in range(x,floor(sqrt(u))+1):
                    if x*x+y*y==u:
                        f=f+1
            if f>1:
                print("la racine carrée de",u,"est",f,"fois traçable")

>>> multitra(250)
la racine carrée de 25 est 2 fois traçable
la racine carrée de 50 est 2 fois traçable
la racine carrée de 65 est 2 fois traçable
la racine carrée de 85 est 2 fois traçable
la racine carrée de 100 est 2 fois traçable
la racine carrée de 125 est 2 fois traçable
la racine carrée de 130 est 2 fois traçable
la racine carrée de 145 est 2 fois traçable
la racine carrée de 169 est 2 fois traçable
la racine carrée de 170 est 2 fois traçable
la racine carrée de 185 est 2 fois traçable
la racine carrée de 200 est 2 fois traçable
la racine carrée de 205 est 2 fois traçable
la racine carrée de 221 est 2 fois traçable
la racine carrée de 225 est 2 fois traçable
```

L’algorithme **decompo** nous donne les traçabilités possibles de la racine carrée d’un entier donné.
Nous retrouvons celles des racines carrées de 169 et de 221.

```
>>> def decompo(n):
        for x in range(0,floor(sqrt(n))):
            for y in range(x,floor(sqrt(n))+1):
                if x*x+y*y==n:
                    d=[x,y]
                    print("la racine de",n,"se décompose en",d)

>>> decompo(169)
la racine de 169 se décompose en [0, 13]
la racine de 169 se décompose en [5, 12]
>>> decompo(221)
la racine de 221 se décompose en [5, 14]
la racine de 221 se décompose en [10, 11]
>>> decompo(325)
la racine de 325 se décompose en [1, 18]
la racine de 325 se décompose en [6, 17]
la racine de 325 se décompose en [10, 15]
```

3. Sachant que $2023 = 7 \times 17 \times 17$,cherchons si le nombre 2023 peut être décomposé en produit de deux entiers ≥ 5 dont les racines carrées sont traçables.

La racine carrée de 7 n’est pas traçable et celle de $7 \times 17 = 119$ ne l’est pas non plus. La décomposition attendue n’est pas possible.

2023 n’est pas deux fois traçable.

4. L’entier 325 a la particularité d’être le produit d’un entier dont la racine est traçable et d’un entier dont la racine est deux fois traçable. Nous pouvons écrire ce nombre en produit $(a^2 + b^2) \times (c^2 + d^2)$ de deux façons différentes, ce qui nous fournit en fin de compte trois décompositions de sa racine carrée.

L’algorithme **decompo** nous donne (voir copie d’écran précédente) les trois décompositions :

$$\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 18 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Partie IV : Etude d'une configuration dans l'espace

1. Référons-nous à la figure donnée dans l'énoncé.

Les points *O, A, B, C* étant des sommets d'un parallélépipède rectangle ainsi qu'il est indiqué, la droite (*BC*) est perpendiculaire au plan (*OAB*). Elle est donc orthogonale à toutes les droites du plan (*OAB*), en particulier à la droite (*OB*) : le triangle *OBC* est rectangle en *B*. Le segment [*OC*] est l'hypoténuse de ce triangle.

Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle *OBC* : $OC^2 = OB^2 + BC^2$.

D'autre part, [*OA*] et [*AB*] sont deux côtés consécutifs d'une face du parallélépipède rectangle. Le triangle *OAB* est rectangle en *A* et a pour hypoténuse $[OB]$

Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle *OAB* : $OB^2 = OA^2 + AB^2$.

Des deux relations nous déduisons : $OC^2 = OA^2 + AB^2 + BC^2$.

Compte tenu des notations : $OA = x$; $AB = y$; $BC = z$, nous obtenons : $OC^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

2.a. Vu que par hypothèse : $0 \leq x \leq y \leq z$, nous avons : $z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 3z^2$.

Si la relation $x^2 + y^2 + z^2 = 81$ est vérifiée, alors : $z^2 \leq 81 \leq 3z^2$ soit $\begin{cases} z \leq \sqrt{81} = 9 \\ z \geq \sqrt{\frac{81}{3}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \end{cases}$.

Or : $5 < \sqrt{27} < 6$. Le plus petit entier supérieur ou égal au nombre $3\sqrt{3}$ est l'entier 6.

Nous en concluons que $6 \leq z \leq 9$.

2.b. Sans Python

Il s'agit de déterminer le nombre de triplets $(x\,;y\,;z)$ formés de trois entiers relatifs qui sont solutions de l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 81$.

Commençons par déterminer quels sont les triplets d'entiers naturels solutions vérifiant $0 \leq x \leq y \leq z$.

Le nombre *z* peut prendre les valeurs 6, 7, 8 ou 9.

- Si $z = 6$, alors $x^2 + y^2 = 81 - 36 = 45$ et la racine carrée de 45 est une fois traçable : $45 = 3^2 + 6^2$, ce qui amène au triplet $(3\,;6\,;6)$.
- Si $z = 7$, alors $x^2 + y^2 = 81 - 49 = 32$ et la racine carrée de 32 est une fois traçable : $45 = 4^2 + 4^2$, ce qui amène au triplet $(4\,;4\,;7)$.
- Si $z = 8$, alors $x^2 + y^2 = 81 - 64 = 17$ et la racine carrée de 17 est une fois traçable : $17 = 1^2 + 4^2$, ce qui amène au triplet $(1\,;4\,;8)$.
- Si $z = 9$, alors $x^2 + y^2 = 0$, ce qui amène au triplet $(0\,;0\,;9)$.

À chacun des triplets $(3\,;6\,;6)$ et $(4\,;4\,;7)$, nous pouvons associer $3 \times 2^3 = 24$ triplets en permutant entre elles ses composantes (3 permutations) et en considérant chaque nombre ou son opposé (8 options).

Au triplet $(1\,;4\,;8)$, nous pouvons associer $6 \times 2^3 = 48$ triplets en permutant entre elles ses composantes (6 permutations) et en considérant chaque nombre ou son opposé (8 options).

Au triplet $(0\,;0\,;9)$, nous pouvons associer $3 \times 2 = 6$ triplets en permutant entre elles ses composantes (3 permutations) et en considérant l'entier 9 ou son opposé (2 options).

En tout, nous obtenons $24 + 24 + 48 + 6 = 102$ points à coordonnées entières sur la sphère S.

2.b. Même question avec Python

Dans la mesure où l'ensemble des points entiers recherchés est inclus dans un ensemble *E* fini de points (par exemple dans l'ensemble $\{-9\,;\,-8\,;\ldots;8\,;9\}^3$ qui est composé de $19^3 = 6859$ points), il est possible de mettre en œuvre un algorithme qui teste exhaustivement tous les éléments de *E* et sélectionne ceux qui satisfont des critères nécessaires et suffisants permettant de reconnaître les points entiers de la sphère S.

L'algorithme **pointssursphere** dénombre exhaustivement les points à coordonnées entières situés sur la sphère S et affiche les coordonnées de ceux parmi eux qui vérifient les conditions $0 \leq x \leq y \leq z$.

Nous retrouvons les triplets précédemment obtenus et le nombre 102 de points à coordonnées entières sur S.

```
>>> def pointssursphere():
        n=0
        for x in range(-9,10):
                for y in range(-9,10):
                        for z in range(-9,10):
                                if x*x+y*y+z*z==81:
                                        n=n+1
                                        if 0<=x and x<=y and y<=z:
                                                print([x,y,z])
        print("Il y a sur S",n,"points entiers")

>>> pointssursphere()
[0, 0, 9]
[1, 4, 8]
[3, 6, 6]
[4, 4, 7]
Il y a sur S 102 points entiers
```

Exercice 2 : Paver avec des rectangles

Nous prenons pour unité de longueur la longueur du côté du carré de référence. Dans toute la correction, le carré de référence sera un carré de côté 1.

Partie I : Etude des 1-pavages

1. Soit *x* et *y* les longueurs strictement positives et strictement inférieures à 1 des côtés des deux carrés d'un éventuel 1-pavage d'effectif 2. La somme des deux longueurs devrait être égale à la longueur du côté du carré de référence et la somme de leurs carrés devrait être égale à son aire. Nous devrions avoir : $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$.

Le nombre *x* devrait être solution de l'équation : $x^2+(1-x)^2=1$ soit de l'équation $2x^2-2x=0$.

Cette équation a pour solutions 0 et 1, mais n'a aucune solution qui vérifie la double inégalité $0<x<1$.

Il n'y a pas de 1-pavage d'effectif 2.

2. En quadrillant le carré, pour tout entier strictement positif *n*, on peut paver le carré par n^2 carrés de côté $\frac{1}{n}$.

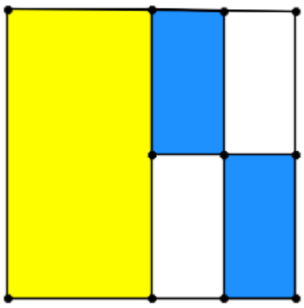
Nous obtenons ainsi, pour tout entier strictement positif *n*, un 1-pavage d'effectif n^2.

Il existe ainsi une infinité de 1-pavages d'effectifs différents.

Partie II : Etude des 2-pavages

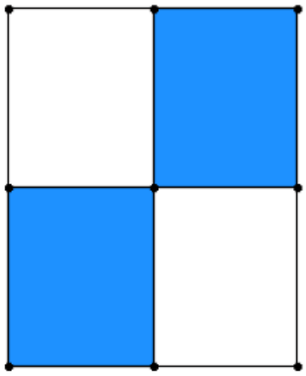
3.a. L'aspect d'un rectangle, quel qu'il soit, est une caractéristique spécifique (unique). Le carré de référence a pour aspect 1. S'il existait un 2-pavage d'effectif 1, le carré aurait à la fois un aspect égal à 1 et un aspect égal à 2. C'est impossible.

3.b. Ci-contre un 2-pavage d'effectif 2 en considérant le rectangle jaune et son rectangle isométrique, et en même temps un 2-pavage d'effectif 5 en considérant le rectangle jaune et chacun des quatre rectangles blancs ou bleus.

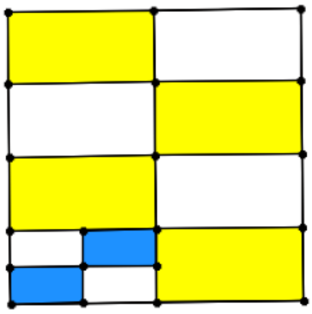
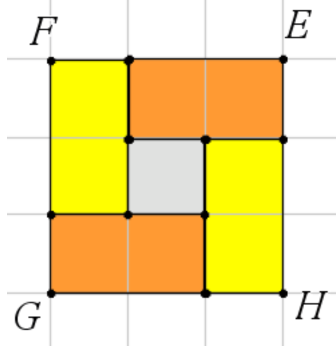
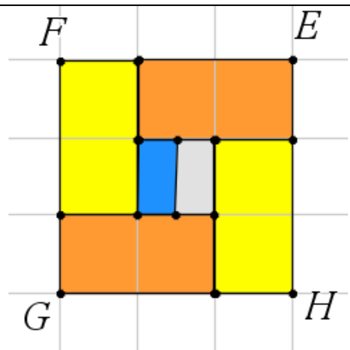


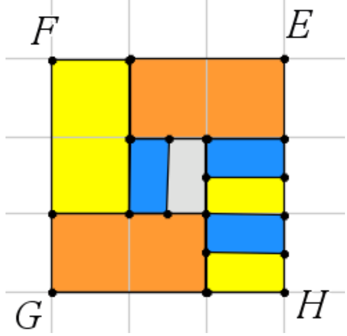
Etant donné un rectangle d'aspect quelconque, nous pouvons le paver par quatre rectangles isométriques de même aspect à l'aide de ses médianes comme l'indique la figure ci-contre. C'est ce que nous venons d'appliquer ci-dessus.

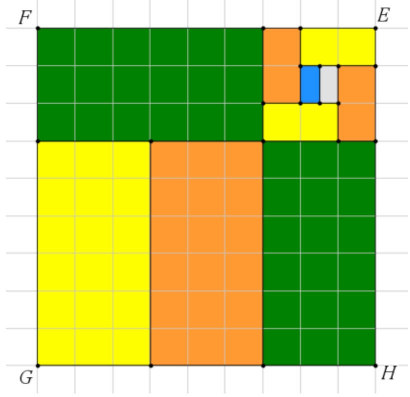
Les quatre rectangles de ce pavage en sont des réductions de rapport $\frac{1}{2}$.



De ce fait, si l'on dispose d'un 2-pavage d'effectif *n*, on peut remplacer l'un quelconque de ses pavés par son 2-pavage d'effectif 4. Ce qui crée un 2-pavage d'effectif $(n+3)$.

3.d. On reconnaît ci-contre un 2-pavage d'effectif 8 par 8 rectangles isométriques et en même temps l'un des huit rectangles composants a été pavé par un 2-pavage d'effectif 4, ce qui construit un 2-pavage d'effectif 11 du carré de référence (les 4 nouveaux petits pavés remplaçant l'ancien).	
4.a. Un 2-pavage d'effectif $(n+4)$ du carré *EFGH* si l'on suppose que le carré central grisé dispose d'un 2-pavage d'effectif *n*.	
4.b. Un 2-pavage d'effectif 6 du carré *EFGH*.	

<table>
<tr><td>4.b (suite). Un 2-pavage d'effectif 9 du carré EFGH.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.b (fin). Un 2-pavage d'effectif 10 du carré EFGH.

Cette question montre qu'il existe un 2-pavage du carré d'effectif chacun des entiers consécutifs 8, 9 et 10.</td><td>
</td></tr>
</table>

5. La question **3.b** a démontré que, si on disposait d'un 2-pavage du carré d'effectif *n*, alors on peut construire Un 2-pavage du carré d'effectif $n + 3$.

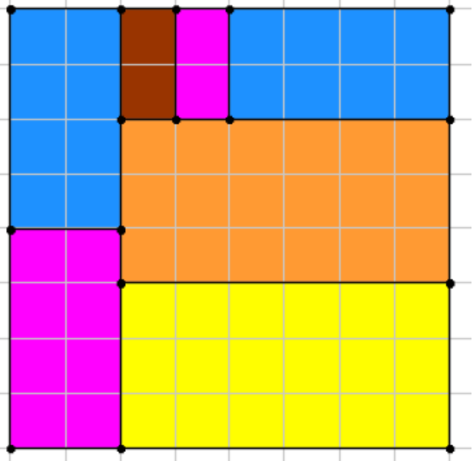
Pour tout entier naturel *k*, en itérant cette construction *k* fois, on peut construire un 2-pavage du carré d'effectif $n + 3k$. En particulier :

- Il existe un 2-pavage du carré d'effectif 8, nous pouvons en construire un d'effectif $8 + 3k$.
- Il existe un 2-pavage du carré d'effectif 9, nous pouvons en construire un d'effectif $9 + 3k$.
- Il existe un 2-pavage du carré d'effectif 10, nous pouvons en construire un d'effectif $10 + 3k$.

Or, pour tout entier $n \geq 8$, l'entier *n* est de la forme $8 + 3k$, ou $9 + 3k$, ou $10 + 3k$, suivant que le reste de sa division euclidienne par 3 est, respectivement, 2 ou 0 ou 1.

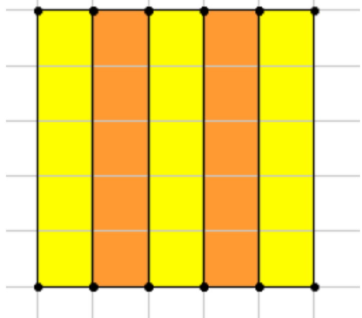
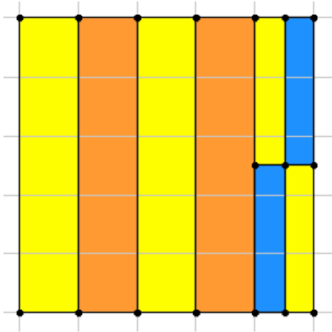
Donc, nous pouvons en construire un 2-pavage du carré d'effectif *n* quel que soit l'entier $n \geq 8$.

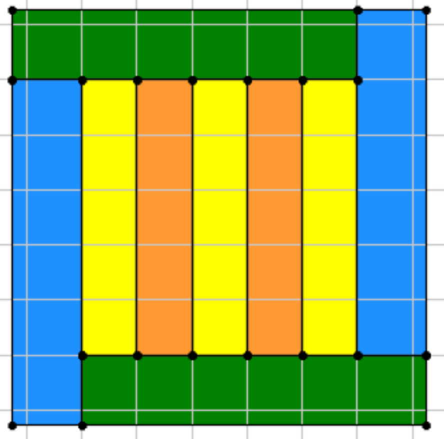
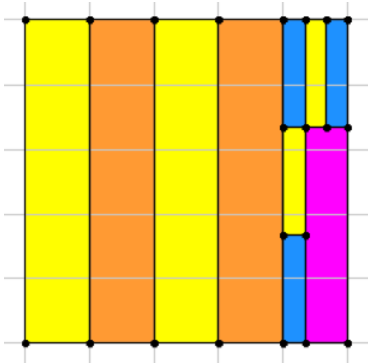
6. Entre autres tentatives plus ou moins infructueuses, cherchons s'il est possible de paver le carré avec un sept rectangles d'aspect 2, dont *x* de longueur $\frac{3}{4}$, *y* de longueur $\frac{1}{2}$, *z* de longueur $\frac{1}{4}$. Les aires de ces rectangles sont, respectivement, $\frac{9}{16}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{32}$.

Une condition nécessaire pour cela est que *x, y, z* vérifient : $\begin{cases} x+y+z=7 \\ \frac{9x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{32}=1 \end{cases}$, système qui a pour solution les triplets $\left(x=\frac{3z+4}{5}\ ;y=\frac{31-8z}{5}\ ;z\right)$ où *z* est choisi arbitrairement. Ce qui nous laisse l'espoir d'une éventuelle solution avec : $x=2\,;y=3\,;z=2$. Il en est ainsi.	

En conclusion, pour tout entier $n \geq 5$, il existe un 2-pavage d'effectif *n*. Nous l'avons démontré dans la **question 5** pour tout entier $n \geq 8$ et vérifié pour les valeurs 5, 6 et 7.

Partie III : Etude des *A*-pavages

7.a. Un *A* pavage d'effectif *A*. On a divisé deux côtés opposés en *A* segments isométriques et on considère les *A* rectangles isométriques de longueur 1 et de largeur $\frac{1}{A}$ juxtaposés ainsi générés (exemple ci-contre avec $A=5$).	
7.b. Construction d'un *A*-pavage d'effectif $(A+3)$: L'un des pavés du pavage précédent a été découpé à l'aide de ses médianes en quatre rectangles isométriques qui en sont une réduction de rapport $\frac{1}{2}$. Les quatre nouveaux pavés sont des rectangles d'aspect *A* remplaçant le pavé qui a été découpé. On note que, plus généralement, ce procédé permet de construire un *A*-pavage d'effectif $n+3$ à partir d'un *A*-pavage d'effectif donné *n*.	

7.c. Construction d'un *A*-pavage d'effectif $(A+4)$ lorsque le carré central a été pavé par un *A*-pavage d'effectif *A*. Les rectangles bleus et verts sont semblables aux rectangles jaunes et oranges dans le rapport $\frac{A}{A-1}$.	
7.d. Construction d'un *A*-pavage d'effectif $(A+5)$: L'un des pavés du pavage **7.a** a été découpé en 9 rectangles isométriques qui en sont une réduction de rapport $\frac{1}{3}$. Quatre d'entre eux ont été réunis pour former un rectangle réduction du pavé initial de rapport $\frac{2}{3}$ (en magenta). Les six nouveaux pavés ainsi obtenus sont des rectangles d'aspect *A* remplaçant le pavé qui a été découpé.	

8. La question **7.a** nous montre qu'il existe un *A*-pavage du carré d'effectif *A*.

La question **7.b** montre qu'il existe un *A*-pavage du carré d'effectif $A+3$.

Les questions **7.c** et **7.d** montrent qu'il existe des *A*-pavages d'effectifs $A+4$ et $A+5$. Nous avons ainsi établi l'existence de *A*-pavages d'effectifs $A+3$, $A+4$ et $A+5$, soit trois entiers *consécutifs.*

La question **7.b** montre aussi que, plus généralement, à partir d'un *A*-pavage d'effectif donné *n*, on peut construire un autre *A*-pavage du carré d'effectif $n+3$. De ce fait, pour tout entier naturel *k*, en itérant cette construction *k* fois, on peut construire un *A*-pavage du carré d'effectif $A+3k$. En particulier, pour tout entier naturel *k* :

- Il existe un *A*-pavage du carré d'effectif $A+3$, nous pouvons en construire un d'effectif $A+3+3k$.
- Il existe un *A*-pavage du carré d'effectif $A+4$, nous pouvons en construire un d'effectif $A+4+3k$.
- Il existe un *A*-pavage du carré d'effectif $A+5$, nous pouvons en construire un d'effectif $A+5+3k$.

Or, pour tout entier $n \geq A+3$, l'entier *n* est de la forme $A+3+3k$, ou $A+4+3k$, ou $A+5+3k$, suivant le reste de sa division euclidienne par 3.

Donc, nous pouvons en construire un *A*-pavage du carré d'effectif *n* quel que soit l'entier $n \geq A+3$.

Partie IV : Deux problèmes d'existence

9. Soit A un nombre entier supérieur ou égal à 2. Soit un rectangle d'aspect A. Si nous désignons par x sa longueur, alors sa largeur est : $y = \frac{x}{A}$.

Proposons-nous de paver un carré de côté 1 à l'aide de rectangles d'aspect A.

Nécessairement, la longueur x de tels rectangles vérifie $x \leq 1$, puisque les rectangles du pavage sont inclus dans le carré. Donc, l'aire de chacun de ces rectangles est $\leq \frac{1}{A}$.

Il faut ainsi au moins A rectangles pour espérer obtenir un recouvrement de toute la surface du carré.

Il n'existe pas de A-pavage d'effectif strictement inférieur à A.

10. Tentons de construire un 2-pavage d'effectif 3 d'un carré de côté 1.

Les côtés du carré étant au nombre de 4, pour obtenir un recouvrement du carré avec seulement trois rectangles, il est nécessaire qu'au moins un côté d'un des trois rectangles coïncide exactement avec un côté du carré.

Nécessairement, un des rectangles est un rectangle de dimensions $1 \times \frac{1}{2}$.

Il reste alors à paver un rectangle isométrique à celui-ci, d'aspect 2 lui aussi. Or, le pavage d'un rectangle par deux rectangles distincts de même aspect que lui est impossible.

En conséquence, nous ne pouvons pas obtenir un 2-pavage du carré d'effectif 3.

PROPOSITION DE SOLUTION

Partie 1 : Premiers exemples.

1) Les longueurs données s'obtiennent par application du théorème de Pythagore.

2) On a : $17 = 1^2 + 4^2$; $32 = 4^2 + 4^2$ et $45 = 3^2 + 6^2$ donc $\sqrt{17} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\sqrt{32} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $\sqrt{45} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3) Soit $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ on a : $N = x^2 + y^2 = y^2 + x^2$ d'où $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ (ou bien par symétrie des triangles $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$)

Partie 2 : Longueurs deux fois traçables.

1) On a $9^2 + 2^2 = 81 + 4 = 85$ et $7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85$ donc $\sqrt{85} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$.

2) $25 = 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2$ donc $\sqrt{25} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$;

$50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$ donc $\sqrt{50} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$;

$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$ donc $\sqrt{65} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$.

3) *a*) $N_2 = 5 \times 2^2 + 5 = 25$ donc $\sqrt{N_2} = \sqrt{25}$, deux fois traçable d'après 2) précédent.

b) $(2k + 1)^2 + (k - 2)^2 = (4k^2 + 4k + 1) + (k^2 - 4k + 4) = 5k^2 + 5 = N_k$ donc $\sqrt{N_k} = \begin{bmatrix} 2k+1 \\ k-2 \end{bmatrix}$

$(2k - 1)^2 + (k + 2)^2 = (4k^2 - 4k + 1) + (k^2 + 4k + 4) = 5k^2 + 5 = N_k$ donc $\sqrt{N_k} = \begin{bmatrix} 2k-1 \\ k+2 \end{bmatrix}$

Il a été démontré que $\sqrt{N_k} = \begin{bmatrix} 2k+1 \\ k-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k-1 \\ k+2 \end{bmatrix}$, il reste donc à vérifier les conditions de la définition :

D'une part $(2k + 1) \geq (k - 2)$ car $k \geq -3$ car $k \geq 3$

et $(2k - 1) \geq (k + 2)$ car $k \geq 3$

Et d'autre part $\begin{bmatrix} 2k+1 \\ k-2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2k-1 \\ k+2 \end{bmatrix}$ car $(2k + 1) \neq (2k - 1)$ (ou aussi $(k - 2) \neq (k + 2)$)

Donc $\sqrt{N_k}$ est bien deux fois traçable.

c) La réciproque est fausse car $\sqrt{65}$ est deux fois traçable alors que 65 n'est pas de la forme $5k^2 + 5$ car (N_k) est croissante avec $N_2 = 25$; $N_3 = 50$ et $N_4 = 85$ (ou $65 = 5k^2 + 5$ donne $k = \sqrt{12}$ qui n'est pas un entier naturel).

Partie 3 : Etude des longueurs plusieurs fois traçables

1) Un nombre premier N a pour uniques diviseurs 1 et N, il s'écrit donc uniquement sous la forme des produits $1 \times N$ ou $N \times 1$. Si N est deux fois traçable, d'après la propriété admise, $N = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ avec $a > b \geq 1$ et $c > d \geq 1$ donc $a^2 + b^2 \geq 2^2 + 1^2 = 5$ et $c^2 + d^2 \geq 2^2 + 1^2 = 5$ donc N s'écrit comme un produit de deux facteurs distincts de 1, donc N n'est pas premier.

2) Pour déterminer les deux plus petits entiers N non multiples de 5 de la forme $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ avec $a > b \geq 1$ et $c > d \geq 1$ il faut (et il suffit) qu'aucun des facteurs $(a^2 + b^2)$ et $(c^2 + d^2)$ ne soit divisible par 5.

Par commutativité du produit, on peut supposer que $(a^2 + b^2) \leq (c^2 + d^2)$ (pour ordonner la recherche) puis considérer les plus petites valeurs de $(a^2 + b^2)$ successives telles que $a > b \geq 1$:

$(a ; b) = (2 ; 1)$: $a^2 + b^2 = 5$, à exclure car multiple de 5

$(a ; b) = (3 ; 1)$: $a^2 + b^2 = 10$, à exclure car multiple de 5

(a ; b) = (3 ; 2) : $a^2 + b^2 = 13$ et on associe ensuite le plus petit facteur pour ($c^2 + d^2$) possible :

(c ; d) = (3 ; 2) : $c^2 + d^2 = 13$ d'où $N = 13 \times 13 = 169$

ou bien (c ; d) = (4 ; 1) : $c^2 + d^2 = 17$ d'où $N = 13 \times 17 = 221$.

(a ; b) = (4 ; 1) : $a^2 + b^2 = 17$: recherche terminée car alors $c^2 + d^2 \geq 17$ donc N supérieur aux deux précédents.

<u>Pour 169 :</u> Par application de la formule donnée avec $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ on obtient :

$$\sqrt{169} = \begin{bmatrix} 9+4 \\ |6-6| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ |0| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \sqrt{169} = \begin{bmatrix} 9-4 \\ 6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

<u>Pour 221 :</u> Par application de la formule donnée avec $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ on obtient :

$$\sqrt{221} = \begin{bmatrix} 12+2 \\ |3-8| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ |-5| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ et } \sqrt{221} = \begin{bmatrix} 12-2 \\ 3+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix}$$

3) Il s'agit de vérifier s'il existe a, b, c, d tels que $2023 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ avec $a > b \geq 1$ et $c > d \geq 1$

Par commutativité du produit, on peut supposer pour ordonner la recherche que $(a^2 + b^2) \leq (c^2 + d^2)$.

Or $2023 = 7 \times 17 \times 17$.

Comme $a^2 + b^2 \neq 1$ (car $a^2 + b^2 \geq 2^2 + 1^2 = 5$), les seules valeurs possibles pour $(a^2 + b^2)$ sont donc :

$(a^2 + b^2) = 7$: non (autrement dit $\sqrt{7}$ n'est pas traçable)

$(a^2 + b^2) = 17$ d'où $(a ; b) = (4 ; 1)$

et alors on doit avoir $(c^2 + d^2) = 7 \times 17 = 119$ (autrement dit vérifions si $\sqrt{119}$ est traçable)

En calculant $(119 - d^2)$ avec $1 \leq d \leq 7$, on n'obtient pas de carré d'entier (Et si $d \geq 8$, avec $c^2 + d^2 = 119$, on obtient $c^2 < d^2$: à exclure car par définition c > d) donc $(c^2 + d^2) \neq 119$.

Conclusion : $\sqrt{2023}$ n'est pas deux fois traçable.

4) 325 = 5 x 65 avec $\sqrt{5} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ donc $5 = 2^2 + 1^2$ et $\sqrt{65} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ donc $65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$

Il vient, en appliquant la formule donnée avec :

- $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$: $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 16+1 \\ |2-8| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ |-6| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{17} \\ \mathbf{6} \end{bmatrix}$ et $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 16-1 \\ 2+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{15} \\ \mathbf{10} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$: $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 14+4 \\ |8-7| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ |1| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{18} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ et $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 14-4 \\ 8+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{15} \\ \mathbf{10} \end{bmatrix}$

Donc $\sqrt{325} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 1 \end{bmatrix}$

<u>Partie 4 : Application à une configuration dans l'espace.</u>

1) Dans OBC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore : $OC^2 = OB^2 + BC^2$

Et dans OAB rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $OB^2 = OA^2 + AB^2$

Donc $OC^2 = OA^2 + AB^2 + BC^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

2 *) a)* Si $z \leq 5$ alors $x \leq y \leq z \leq 5$ donc $x^2 + y^2 + z^2 \leq 5^2 + 5^2 + 5^2 = 75$ donc $x^2 + y^2 + z^2 \neq 81$;

et si $z > 9$ alors $x^2 + y^2 + z^2 > 9^2 = 81$ donc $x^2 + y^2 + z^2 \neq 81$

donc $6 \leq z \leq 9$

b) Soit $P(x , y , z)$: P appartient à S si et seulement si $OP^2 = 9^2$ donc si et seulement si $x^2 + y^2 + z^2 = 81$

On cherche donc les $P(x ; y ; z)$ de coordonnées entières tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 81$.

➔ *Supposons d'abord x , y , z entiers naturels avec $x \leq y \leq z$* (pour ordonner la recherche).

On a donc $6 \leq z \leq 9$:

$z = 6$: $x^2 + y^2 + 36 = 81$ donc $x^2 + y^2 = 45$ d'où $(x ; y) = (3 ; 6)$ d'où le point $P_6 = (3 ; 6 ; 6)$

$z = 7$: $x^2 + y^2 + 49 = 81$ donc $x^2 + y^2 = 32$ d'où $(x ; y) = (4 ; 4)$ d'où le point $P_7 = (4 ; 4 ; 7)$

$z = 8$: $x^2 + y^2 + 64 = 81$ donc $x^2 + y^2 = 17$ d'où $(x ; y) = (1 ; 4)$ d'où le point $P_8 = (1 ; 4 ; 8)$

$z = 9$: $x^2 + y^2 + 81 = 81$ donc $x^2 + y^2 = 0$ d'où $(x ; y) = (0 ; 0)$ d'où le point $P_9 = (0 ; 0 ; 9)$

(Remarque : on retrouve les différentes valeurs de $(x ; y)$ obtenues en Partie 1)

➔ *Par permutation de (x , y , z) on obtient : 3 points avec P_6 ; 3 points avec P_7 ; 6 points avec P_8 et 3 points avec P_9 soit exactement $3 + 3 + 6 + 3 = 15$ points de coordonnées entières <u>naturelles</u> situés sur la sphère S.*

➔ *Pour obtenir les coordonnées pouvant être négatives il suffit d'effectuer des changements de signes et donc d'appliquer aux coordonnées de <u>chacun</u> des points associées à P_6, P_7, P_8 précédents un seul signe « - » (d'où 3 autres points) ou deux signes « - » (d'où 3 autres points) ou trois signes « - » (d'où 1 autre point) soit 7 <u>autres</u> points en tout de coordonnées entières relatives obtenus à partir de chacun des 12 points associés à P_6, P_7, P_8.*

Quant aux points associés à P_9, comme $0 = - 0$, on ne peut qu'ajouter un signe « - » à la valeur 9 pour obtenir un nouveau point par changement de signe, donc 1 point supplémentaire pour chacun des 3 points associés à P_9.

Le nombre total de points à coordonnées entières appartenant à S est donc égal à $12 \times 8 + 3 \times 2 = 102$.

CQFD

Démonstration de : ① $\sqrt{N}$ **deux fois traçable**

$\Leftrightarrow$ ② $\exists$ **(** a **;** b **;** c **;** d **) entiers naturels tels que** $N = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ **avec** $a > b \geq 1$ **et** $c > d \geq 1$

Et alors on a $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} ac + bd \\ |ad - bc| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{bmatrix}$

① ⟹ ② :

① : $\sqrt{N}$ deux fois traçable $\exists$ (A ; B ; C ; D) entiers naturels tels que $N = \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2 = \mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2$ avec A ≠ C et de D.

② sera démontrée en 3 propositions :

<u>Proposition 1 :</u> (A ; B ; C ; D) peuvent être ordonnés de telle façon que A > C avec A et C de même parité

D > B avec B et D de même parité

- On peut supposer que A est le plus grand des 4 entiers A, B, C, D et comme A ≠ C et A ≠ D on a A > C et A > D,
  Alors $\mathrm{B}^2 = N - \mathrm{A}^2 < N - \mathrm{D}^2 = \mathrm{C}^2$
  $< N - \mathrm{C}^2 = \mathrm{D}^2$ donc B < C et B < D.
- $N = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = \mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2$ donc
  - Si N est impair, A et B ainsi que C et D doivent être de parités différentes donc, quitte à inverser C et D (inversion compatible avec les relations d'ordre du précédent point), on peut supposer que A et C ainsi que B et D sont de même parité.
  - Et si N est pair, A et B doivent être de même parité, ainsi que C et D.
    Or si A = 0 [2] et B = 0 [2] alors $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = 0$ [4] ; et si C = 1 [2] et D = 1 [2] alors $\mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2 = 2$ [4]
    Donc $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \neq \mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2$.
    Donc si N est pair alors nécessairement A, B, C , D sont tous de même parité (donc en particulier A, C et B, D)

<u>Proposition 2 :</u> $\exists$ (a ; b ; c ; d) entiers naturels tels que A = ad + bc ; B = ac – bd ; C = ad – bc ; D = ac + bd

$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = \mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2$ donc $\mathrm{A}^2 - \mathrm{C}^2 = \mathrm{D}^2 - \mathrm{B}^2$ donc (A – C)(A + C) = (D – B)(D + B)

Avec (A – C) ; (A + C) ; (D – B) ; (D + B) entiers naturels pairs non nuls (d'après la proposition 1)

Posons alors PGCD(A – C ; D – B) = 2a et PGCD(A + C ; D + B) = 2b

On a A – C = 2aq ; D – B = 2ar où q et r sont 1ers entre eux (et non nuls)

A + C = 2bd ; D + B = 2bc où c et d sont 1ers entre eux (et non nuls)

Alors (A – C)(A + C) = 4abdq = (D – B)(D + B) = 4abcr

Donc dq = cr donc d | cr avec d et c 1ers entre eux donc (Gauss) : d | r donc r = kd (k entier naturel non nul)

q | cr avec q et r 1ers entre eux donc (Gauss) : q | c donc c = k'q (k' entier naturel non nul)

Donc dq = cr = k'q × kd donc kk' = 1 donc k = k' = 1 d'où r = d et q = c

Il vient alors que : A – C = 2ac ; D – B = 2ad ; A + C = 2bd ; D + B = 2bc ;

D'où : A = (2ac + 2bd)/2 = ac + bd ; C = (2ac – 2bd)/2 = ac – bd ;

D = (2ad + 2bc)/2 = ad + bc ; B = (2bc – 2ad)/2 = bc – ad

<u>Proposition 3 :</u> $N = (\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2)(\mathrm{c}^2+\mathrm{d}^2)$ avec a > b ≥ 1 et c > d ≥ 1

Avec la proposition 2 : $N = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = (\mathrm{ac} + \mathrm{bd})^2 + (\mathrm{ad} - \mathrm{bc})^2 = \mathrm{C}^2 + \mathrm{D}^2 = (\mathrm{ac} - \mathrm{bd})^2 + (\mathrm{ad} + \mathrm{bc})^2$

$= \mathrm{a}^2\mathrm{c}^2 + \mathrm{b}^2\mathrm{d}^2 + \mathrm{a}^2\mathrm{d}^2 + \mathrm{b}^2\mathrm{c}^2$

$= (\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2)(\mathrm{c}^2 + \mathrm{d}^2)$

De plus
- A ≠ C donc $\mathrm{A}^2 - \mathrm{C}^2$ = (A + C)(A – C) = 4abcd ≠ 0 donc a, b, c, d non nuls
- A ≠ D donc A – D = (ac + bd) – (ad + bc) = (a – b)(c – d) ≠ 0 donc a ≠ b et c ≠ d.
- Comme $N = (\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2)(\mathrm{c}^2 + \mathrm{d}^2)$, on peut inverser a avec b et c avec d et donc supposer a ≥ b et c ≥ d

Donc $\exists$ (a ; b ; c ; d) entiers naturels tels que $N = (\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2)(\mathrm{c}^2 + \mathrm{d}^2)$ avec $a > b \geq 1$ et $c > d \geq 1$ ②

$\boxed{② \Rightarrow ①:}$

② : $\exists$ (a ; b ; c ; d) entiers naturels tels que $N = (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ avec $a > b \geq 1$ et $c > d \geq 1$

On a : $N = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$

$= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac + bd)^2 + |ad - bc|^2$

Avec (ac – bd) ; (ad + bc) ; (ac + bd) ; | ad – bc | entiers naturels (ac – bd est positif car $a > b > 0$ et $c > d > 0$)

Donc $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} ac + bd \\ |ad - bc| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{bmatrix}$

Pour conclure que $\sqrt{N}$ est deux fois traçable il reste à montrer que $(ac + bd) \neq (ac - bd)$ et $(ac + bd) \neq (ad + bc)$:

- $(ac + bd) - (ac - bd) = 2bd \neq 0$ car $b \neq 0$ et $d \neq 0$ donc $(ac + bd) \neq (ac - bd)$
- $(ac + bd) - (ad + bc) = (a - b)(c - d) \neq 0$ car $a \neq b$ et $c \neq d$ donc $(ac + bd) \neq (ad + bc)$

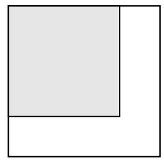
Donc $\sqrt{N}$ est deux fois traçable et $\sqrt{N} = \begin{bmatrix} ac + bd \\ |ad - bc| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{bmatrix}$ ①

CQFD.

Paver avec des rectangles d'aspect unique — Correction

Partie I

Question 1. Un 1-pavage est un pavage d'un carré C composé lui-même de carrés. L'un de ces carrés, que l'on appellera A, est positionné dans le coin en haut à gauche de C car ce coin doit être couvert par le pavage. Supposons que le pavage est de taille supérieure ou égale à 2 : le carré A ne peut pas recouvrir à lui seul le carré C et l'on a donc la figure à droite où A est en gris. L'espace restant, en blanc, ne peut être recouvert avec un seul carré. Ainsi l'effectif du 1-pavage est au moins égale à 3.

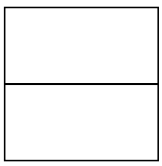


Question 2. Pour tout entier naturel non nul n on peut paver un carré de côté n par $n \times n$ carrés de côté 1 ce qui constitue un 1-pavage d'effectif n^2.

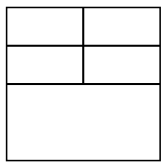
Partie II

Question 3. a) Un pavage d'effectif 1 d'un carré est constitué d'une seule pièce qui doit donc recouvrir tout le carré. L'aspect de cette seule pièce est ainsi nécessairement égal à 1. Il n'existe donc pas de 2-pavage d'effectif 1.

b) 2-pavage d'effectif 2 :

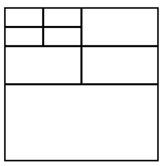


2-pavage d'effectif 5 :

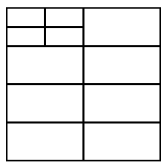


c) En coupant un rectangle R en deux exactement au milieu de sa longueur et de même dans le sens de la largeur, on remplace ce rectangle par quatre rectangles semblables au premier. Leur aspect est donc égal à celui de R. Si n est l'effectif d'un 2-pavage donné, en effectuant cette opération sur n'importe lequel des rectangles du pavage on obtient un nouveau pavage dont tous les rectangles ont encore un aspect égal à 2, et d'effectif $n - 1 + 4 = n + 3$. C'est ce que l'on a fait dans la question précédente.

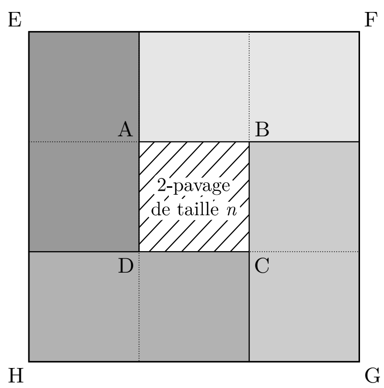
d) 2-pavage d'effectif 8 :



2-pavage d'effectif 11 :



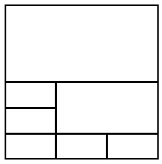
Question 4. a) Voir la figure ci-contre. Chacun des quatre rectangles grisés ajoutés est bien d'aspect 2.



b) En appliquant la méthode de la question précédente au 2-pavage de taille 2 précédemment trouvé on obtient un 2-pavage d'effectif 6. On obtient un 2-pavage d'effectif 9 en appliquant la même technique au 2-pavage d'effectif 5 de la question 3.b) ou en appliquant la question 3.c) au 2-pavage d'effectif 6 tout juste obtenu. Quant au 2-pavage d'effectif 10 on peut l'obtenir en utilisant la question 4.a) à ce même 2-pavage d'effectif 6.

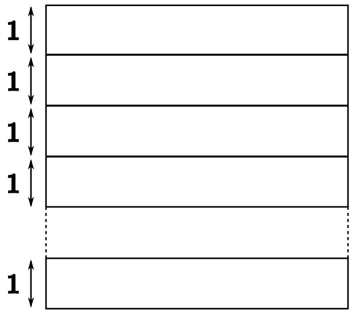
Question 5. On sait déjà qu'il existe des 2-pavages d'effectifs 8, 9 et 10 . En appliquant la question 3.c), on obtient alors des 2-pavages d'effectifs $8 + 3 = 11$, $9 + 3 = 12$ et $10 + 3 = 13$. En répétant l'opération on obtient successivement tous les effectifs trois par trois. Plus précisément on peut démontrer par récurrence la propriété P_n : « il existe un 2-pavage d'effectif k pour tout $8 \leqslant k \leqslant n$ » car P_{10} est vraie tandis que si P_n est vraie pour $n \geqslant 10$ alors il existe un 2-pavage d'effectif $n - 2 \geqslant 8$ donc par la question 3.c) on construit un 2-pavage d'effectif $n - 2 + 3 = n + 1$.

Question 6. Voir la figure à droite.



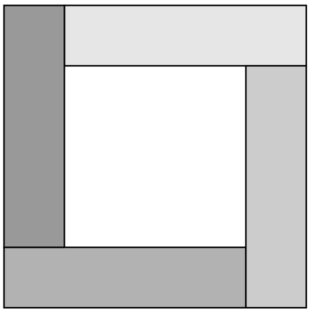
Partie III

Question 7. a) Découper un carré de côté A en A bandes de largeur A et de hauteur 1 comme sur le dessin ci-contre constitue bien un A-pavage d'effectif A.

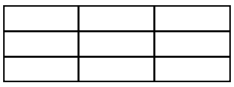


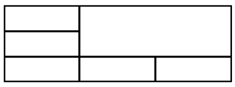
b) Comme expliqué dans la question 3.c) découper un rectangle en quatre rectangles semblables conserve l'aspect et appliquer cette opération à un rectangle quelconque du A-pavage précédent donne un A-pavage d'effectif $A + 3$.

c) Dans un carré de côté $A + 1$, disposer quatre rectangles de dimensions $A \times 1$ comme indiqué ci-contre laisse au centre un espace vide carré de côté $A - 1$. Il suffit de remplir ce vide avec le A-pavage d'effectif A trouvé en 7.a) en adaptant sa taille avec une homothétie de rapport $1 - 1/A$.



d) En découpant un rectangle d'aspect A en trois parts égales dans chaque direction, on obtient la figure ci-dessous à gauche constituée de 9 rectangles de même aspect car ils sont semblables au rectangle d'origine. En fusionnant quatre de ces petits rectangles on obtient un rectangle toujours de même aspect comme dans la figure ci-dessous à droite qui contient 6 rectangles.





On applique cette technique à un rectangle quelconque du A-pavage d'effectif A trouvé en 7.a) pour obtenir un A-pavage d'effectif $A - 1 + 6 = A + 5$.

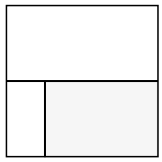
Question 2. On démontre par récurrence l'assertion P_n : « il existe un A-pavage d'effectif k pour tout $A + 3 \leqslant k \leqslant n$ » pour tout $n \geqslant A + 5$. P_{A+5} est vraie d'après la question 1. Si P_n est vraie pour $n \geqslant A + 5$ alors il existe un A-pavage d'effectif $n - 2 \geqslant A + 3$ auquel on applique la technique de la question 7.b) pour construire un A-pavage d'effectif $n - 2 + 3 = n + 1$ ce qui démontre P_{n+1}.

Partie IV

Question 1. S'il existe un A-pavage d'effectif n, par homothétie on peut supposer sans perte de généralité qu'il pave un carré de côté A. Chaque rectangle de ce pavage est de longueur au plus A pour tenir dans le carré, donc de largeur au plus 1 puisqu'on connait son aspect : ainsi son aire est au plus A. L'aire totale recouverte par le pavage est donc au maximum nA. Puisque le pavage recouvre le carré, cette aire est A^2. Ainsi $A^2 \leqslant nA$ donc $A \leqslant n$ (car $A > 0$). Il n'existe aucun A-pavage d'effectif $n < A$.

Question 2. On suppose ici sans perte de généralité que le carré pavé est de côté 2. S'il existe un 2-pavage d'effectif 3 alors chacun des quatre coins du carré pavé est en contact avec un des 3 rectangles qui le pavent. Il y a donc un rectangle en contact avec deux coins. Ces deux coins sont consécutifs sinon le rectangle couvre tout le carré ce qui n'est pas possible : ce rectangle est donc de longueur 2 et de largeur 1. L'espace restant à paver (en

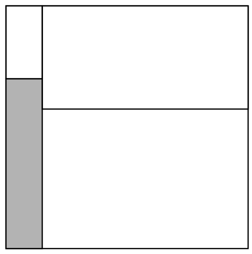
gris) est lui-même rectangle, et au moins deux de ses coins est en contact avec le même rectangle du pavage. Ces deux coins ne peuvent pas être opposés, ni consécutifs suivant la longueur car alors le rectangle du pavage serait le rectangle gris lui même, ne laissant pas de place au dernier rectangle. C'est donc qu'un des rectangles du pavage est en contact avec la totalité d'une des largeurs du rectangle gris, et forcément le long de sa propre longueur pour laisser de la place au dernier rectangle. Ses dimensions sont ainsi $1\times\frac{1}{2}$ ce qui laisse un espace à paver gris de dimensions $1\times\frac{3}{2}$. Cet espace doit être couvert par un unique rectangle, mais n'est pas d'aspect 2.



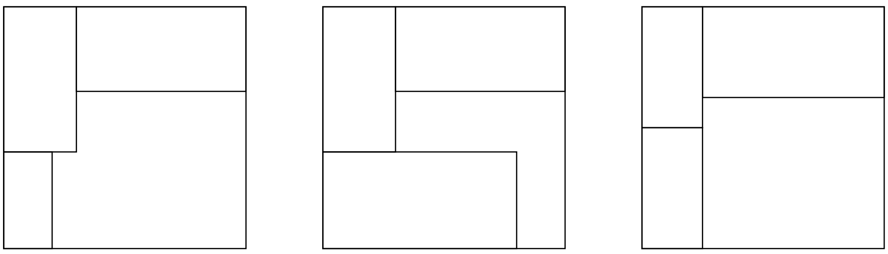
Il n'existe ainsi aucun 2-pavage d'effectif 3.

Remarque : il n'existe pas non plus de 2-pavage d'effectif 4.

En effet, s'il existe un 2-pavage d'effectif 4 et qu'un des rectangles du pavage est en contact avec deux coins du carré à paver alors le raisonnement précédent s'applique à ceci près que l'espace de dimensions $1\times\frac{3}{2}$ doit être pavé avec deux rectangles d'aspect deux ce qui n'est pas clairement pas possible. C'est donc que chaque rectangle du pavage est en contact avec exactement un des coins du carré à paver. Quitte à faire une symétrie axiale suivant une diagonale du carré, supposons que le rectangle en haut à gauche (noté HG) est disposé verticalement (sa longueur est verticale et sa largeur est horizontale). Pour laisser de la place au rectangle BG en bas à gauche sa longueur doit être strictement inférieure à 2 et donc sa largeur strictement inférieure à 1. Le rectangle HD en haut à droite ne peut ainsi être vertical sinon il aurait lui aussi une largeur strictement inférieure à 1 et laisserait un vide le long du côté supérieur du carré.



Il est donc horizontal et sa largeur n'est pas supérieure à la longueur du rectangle HG sinon il y aurait un espace libre sous HG et à gauche de HD qui serait impossible à combler avec le rectangle BG en conservant son aspect 2 (voir ci-contre). On est donc dans une des trois situations ci-dessous :



Dans les deux situations de gauche, l'espace restant à paver par le rectangle BD en bas à droite n'est pas rectangulaire ce qui est impossible. Dans la situation la plus à droite on a représenté BG verticalement de même largeur que HG mais il peut aussi être horizontal de longueur égale à la largeur de HG. L'important est que l'espace restant à paver avec BD, même s'il est bien rectangle, n'est pas d'aspect 2. En effet sa dimension horizontale h est égale à $2-l$ où $l<1$ est la largeur de HG donc $h>1$ ne peut être la largeur de BD qui est ainsi disposé horizontalement. Puisque h est aussi la longueur de HD d'aspect 2 la dimension verticale v de l'espace restant est égale à $v=2-\frac{h}{2}>1>\frac{h}{2}$ puisque $\frac{h}{2}<1$. $v\neq\frac{h}{2}$ et BD ne peut avoir le bon aspect.

En définitive il n'y a pas de 2-pavage d'effectif 4.