OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE LYON 2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

LYON 2022

Exercice 1

Partie A : Les concombres

Désignons par s la masse sèche (invariable) contenue dans le lot de concombres et par e_1 la masse d'eau contenue dans le lot de concombres le premier jour.

Nous savons d'après l'énoncé que :

$$\begin{cases} s + e_1 = 500 \\ \dfrac{e_1}{s + e_1} = \dfrac{99}{100} \end{cases}$$

Nous en déduisons que $100e_2 = 99s + 99e_2$, soit $e_1 = 99s$, puis que $s = 5$ et $e_1 = 495$.

Le premier jour, le lot de concombres est composé de 495 kg d'eau et de 5 kg de masse sèche.

Soit e_2 la masse d'eau contenue dans le lot de concombres le deuxième jour.

Nous savons d'après l'énoncé que :

$$\frac{e_2}{s + e_2} = \frac{98}{100}$$

Nous en déduisons que $100e_2 = 98s + 98e_2$, soit $e_2 = 49s$.

Par conséquent : $e_2 = 49 \times 5 = 245$.

Le deuxième jour, le lot de concombres est composé de 245 kg d'eau et de 5 kg de masse sèche.

La masse de l'ensemble des concombres n'est plus que : $245 + 5 = 250$ kg

Le lot de concombres a perdu la moitié de sa masse.

Nous pouvons vérifier ce résultat surprenant : $\frac{245}{245+5} = \frac{245}{250} = \frac{49}{50} = \frac{98}{100}$

Il a vraiment fait très chaud ce jour-là !

Partie B : le sudomaths

Nous obtenons pour notre part la grille suivante.

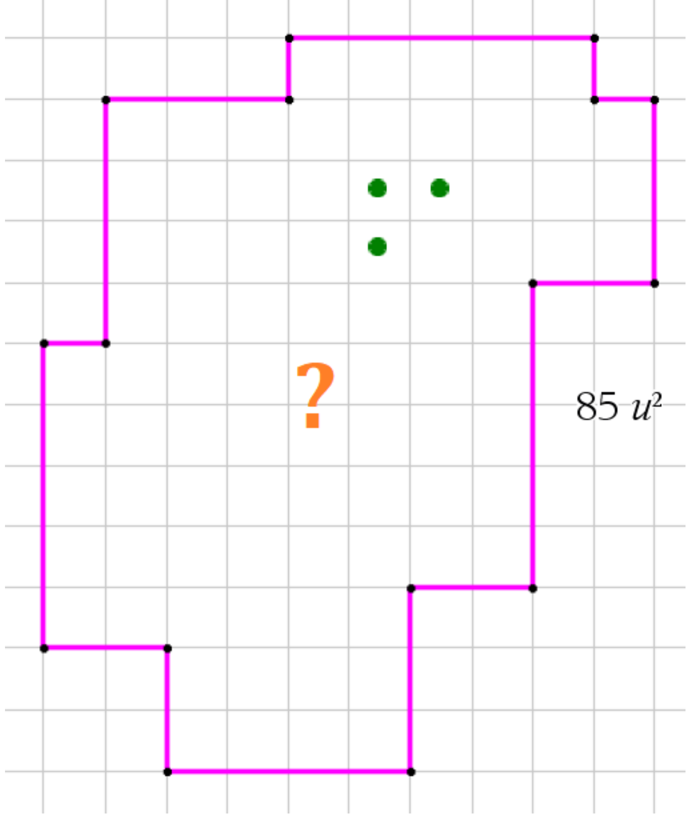
- En bleu, ce que nous avons déduit des informations de l'énoncé.
- En rouge, le complément, conformément aux règles usuelles du sudoku.

2	5	4	3	1	6	8	9	7
7	6	3	9	8	5	1	2	4
1	9	8	4	2	7	6	3	5
9	8	1	7	4	3	2	5	6
6	4	2	8	5	9	7	1	3
5	3	7	2	6	1	9	4	8
4	7	5	6	9	2	3	8	1
3	1	9	5	7	8	4	6	2
8	2	6	1	3	4	5	7	9

Partie C : Le découpage

Sauf erreur de notre part, la propriété à partager a pour aire 85 unités d'aire.

Si les trois parts sont des polygones dont les côtés « suivent les lignes cadastrales », alors l'aire de chacun de ces polygones devrait être un nombre entier d'unités d'aire puisque chaque polygone est alors un assemblage de carrés de côté 1.
Or, 85 n'est pas un multiple de 3. Nous ne voyons pas comment il est possible dans ces conditions de partager la propriété en trois parts isométriques (donc de même aire). En conséquence, nous laissons cette affaire au lecteur opiniâtre.



Exercice 2 : Sommes de carrés

1. Les quatre plus petites sommes de deux carrés différents sont, exhaustivement :

$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5,\ \ 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10,\ \ 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13,\ \ 1^2 + 4^2 = 1 + 16 = 17.$

Il en résulte que, parmi les entiers qui sont inférieurs ou égaux à 17, les entiers 5, 10, 13 et 17 sont les seuls entiers qui appartiennent à Σ.

Nous pouvons en déduire que, parmi les entiers à considérer :

5, 10 et 17 appartiennent à Σ tandis que 1, 2, 3, 4 et 7 n'appartiennent pas à Σ.

2. Un entier x appartient à Σ si et seulement s'il existe deux entiers strictement positifs distincts dont il est la somme des carrés.

Cet élève utilise implicitement un corollaire d'un « pseudo-théorème » qui s'énoncerait ainsi : « Si un entier se décompose en une somme de deux carrés, alors cette décomposition est unique ». Pseudo-théorème qui a pour pseudo-corollaire : « Si un entier est la somme de deux carrés égaux, alors il ne peut pas être la somme de deux carrés différents ».

Ce pseudo-théorème est faux car un entier peut très bien se décomposer *de plusieurs façons* en une somme de deux carrés, comme le prouve en l'occurrence la décomposition $50 = 49 + 1 = 7^2 + 1^2$.

L'entier 50 appartient bel et bien à Σ.

Le raisonnement de cet élève est incorrect.

3. Soit m un entier appartenant à Σ. Il existe deux entiers $x > y \geq 1$ tels que : $m = x^2 + y^2$.

3.a. Soit $k = 2p$ un entier naturel pair quelconque (où p est un entier naturel). Alors :

$$2^k \times m = 2^{2p} \times (x^2 + y^2) = 2^{2p} \times x^2 + 2^{2p} \times y^2 = (2^p x)^2 + (2^p y)^2$$

Puisque $x > y \geq 1$, il en résulte que $2^p x > 2^p y \geq 2^p \geq 1$. L'entier $2^k \times m$ est la somme de deux carrés d'entiers strictement positifs distincts, il appartient à Σ.

Si m appartient à Σ, alors pour tout entier k pair le nombre $2^k \times m$ appartient aussi à Σ.

3.b. Nous obtenons : $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2 \times (x^2 + y^2)$

3.c. Soit $k = 2p + 1$ un entier positif impair quelconque (où p est un entier naturel). Alors :

$$2^k \times m = 2^{2p+1} \times (x^2 + y^2) = 2^{2p} \times \left(2 \times (x^2 + y^2)\right)$$

Utilisons le résultat de la question précédente en écrivant autrement $2 \times (x^2 + y^2)$:

$$2^k \times m = 2^{2p} \times ((x+y)^2 + (x-y)^2) = \left(2^p \times (x+y)\right)^2 + \left(2^p \times (x-y)\right)^2$$

Puisque les entiers x et y sont tels que $x > y \geq 1$, il en résulte que $x + y > x - y \geq 1$ et donc que : $2^p \times (x+y) > 2^p \times (x-y) \geq 2^p \geq 1$.

L'entier $2^k \times m$ est la somme de deux carrés d'entiers strictement positifs distincts, il appartient à Σ.

Si m appartient à Σ, alors pour tout entier positif k impair le nombre $2^k \times m$ appartient aussi à Σ.

En définitive, si m appartient à Σ, alors pour tout entier naturel k le nombre $2^k \times m$ appartient aussi à Σ.

4. Soit m et k deux entiers strictement positifs. Supposons que $2^k \times m$ appartienne à Σ, c'est-à-dire supposons qu'il existe deux entiers $x > y \geq 1$ tels que : $2^k \times m = x^2 + y^2$

4.a. Soit (x, y) un tel couple, vérifiant $2^k \times m = x^2 + y^2$. Puisque l'entier k est un entier strictement positif, le nombre $2^k \times m$ est un multiple de 2, c'est-à-dire un entier pair.

Supposons que x et y soient de parité différente, l'un pair et l'autre impair. Nous savons que le carré d'un nombre pair est pair et que le carré d'un nombre impair est impair. Donc, les deux carrés de x et de y seraient de parité différente. Nous savons aussi que la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair. Donc, la somme $x^2 + y^2$ serait un nombre impair. Il y aurait contradiction avec la nature paire de l'entier $2^k \times m$.

Nécessairement, x et y ont la même parité, ils sont ou bien tous deux pairs ou bien tous deux impairs.

4.b. Définissons les nombres u et v par les relations : $\begin{cases} u + v = x \\ u - v = y \end{cases}$. Il s'agit des nombres rationnels :

$$u = \frac{x+y}{2} \ ; \ v = \frac{x-y}{2}$$

Puisque x et y ont la même parité, leur somme et leur différence sont des nombres pairs et les nombres rationnels u et v sont donc en fait tous les deux des nombres entiers. De plus, l'inégalité $x > y \geq 1$ implique que : $u > v \geq 1$. En effet : $u - v = y \geq 1$ et, x et y ayant la même parité, $x - y \geq 2$ donc $v \geq 1$.

En appliquant le résultat de la question **3.b** à ces deux nombres, nous obtenons :

$$2^k \times m = x^2 + y^2 = (u+v)^2 + (u-v)^2 = 2u^2 + 2v^2$$

L'entier k étant par hypothèse strictement positif, son précédent $k - 1$ est positif ou nul et nous obtenons finalement la relation : $2^{k-1} \times m = u^2 + v^2$.

Cette relation prouve que si k est un entier strictement positif tel que $2^k \times m$ appartient à Σ, alors l'entier $2^{k-1} \times m$ appartient lui aussi à Σ.

De proche en proche, nous pouvons itérer ce raisonnement tant que l'exposant de 2 est un entier strictement positif. Au bout de k itérations de ce raisonnement, nous arriverons à la conclusion que m appartient à Σ.

Concluons :

S'il existe un entier k positif tel que $2^k \times m$ appartient à Σ, alors l'entier m lui-même appartient à Σ.

5. Les entiers 5 et 10 appartiennent à Σ alors que leur somme 15 n'appartient pas à Σ (voir **question 1**). Ce contre-exemple montre que :

L'ensemble Σ n'est pas stable par somme.

6.a. Nous ne trouvons pas de contre-exemple de deux nombres appartenant à Σ et dont le produit n'appartient pas à Σ. Notons aussi que 5, 10 et $5 \times 10 = 50$ appartiennent tous trois à Σ. C'est encourageant …

Nous pouvons conjecturer que peut-être le produit de deux éléments de Σ appartient à Σ.

6.b. Développons : $\begin{cases} (x^2+y^2)(z^2+t^2) = x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 \\ (xz-yt)^2 + (xt+yz)^2 = x^2z^2 - 2xzyt + y^2t^2 + x^2t^2 + 2xtyz + y^2z^2 \end{cases}$

Nous obtenons dans les deux cas une même forme développée, à savoir $x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2$.

Par conséquent, $(x^2+y^2)(z^2+t^2) = (xz-yt)^2 + (xt+yz)^2$

6.c. Soit m et n deux éléments impairs de Σ.

- Il existe deux entiers $x > y \geq 1$ tels que : $m = x^2 + y^2$.
- Il existe deux entiers $z > t \geq 1$ tels que : $n = z^2 + t^2$.

Compte tenu du résultat de la **question 6.b** :

$$m \times n = (x^2+y^2)(z^2+t^2) = (xz-yt)^2 + (xt+yz)^2$$

Nous sommes amenés à considérer les entiers : $\begin{cases} u = xz - yt \\ v = xt + yz \end{cases}$.

Les inégalités $\begin{cases} x > y \geq 1 \\ z > t \geq 1 \end{cases}$ impliquent que $xz > yt$, donc que $xz - yt > 0$, et que $xt + yz \geq 2$.

De plus, il peut y avoir un cas d'égalité entre u et v car, en tant que produit de deux nombres impairs, le produit $m \times n$ est un nombre impair, il n'est pas la somme de deux nombres égaux. Quelles que soient les circonstances, l'un des entiers u ou v est pair et l'autre impair.

Il en résulte que le produit $m \times n$ est la somme de deux carrés d'entiers strictement positifs distincts, il appartient à l'ensemble Σ.

Le produit de deux éléments impairs de Σ reste dans Σ.

6.d. Soit m et n deux éléments quelconques de Σ. Nous pouvons les écrire $m = 2^k \times m_0$ et $n = 2^l \times n_0$ où m_0 et n_0 sont des nombres impairs.

- D'après la **question 4**, m_0 et n_0 sont eux-mêmes des éléments de Σ.
- D'après la **question 6.c**, le produit $m_0 \times n_0$ est un élément de Σ.
- D'après la **question 3**, le produit $m \times n = 2^{k+l} \times m_0 \times n_0$ est un élément de Σ.

Nous en concluons que :

Le produit de deux éléments quelconques de Σ reste dans Σ, l'ensemble Σ est stable par produit.

7.a. Raisonnons par disjonction des cas. Etant donné un entier naturel x, il peut être de l'une ou l'autre des quatre formes : ou bien $x = 4q$, ou bien $x = 4q + 1$, ou bien $x = 4q + 2$ ou bien $x = 4q + 3$, suivant la valeur du reste de sa division euclidienne par 4 (q est un entier naturel, il désigne le quotient de cette division euclidienne). Etudions son carré.

- Si $x = 4q$, alors $x^2 = 16q^2 = 4 \times (4q^2)$, nous en déduisons $r(x^2) = 0$.
- Si $x = 4q + 1$, alors $x^2 = 16q^2 + 8q + 1 = 4 \times (4q^2 + 2q) + 1$, nous en déduisons $r(x^2) = 1$.
- Si $x = 4q + 2$, alors $x^2 = 16q^2 + 16q + 4 = 4 \times (4q^2 + 4q + 1)$, nous en déduisons $r(x^2) = 0$.
- Si $x = 4q + 3$, alors $x^2 = 16q^2 + 24q + 9 = 4 \times (4q^2 + 6q + 2) + 1$, nous en déduisons $r(x^2) = 1$.

Quel que soit le cas considéré, ou bien $r(x^2) = 0$ ou bien $r(x^2) = 1$.

7.b. Soit m un entier appartenant à Σ. Il existe deux entiers $x > y \geq 1$ tels que $m = x^2 + y^2$

D'après la question précédente, les restes $r(x^2)$ et $r(y^2)$ des divisions euclidiennes de x^2 et de y^2 sont égaux ou bien à 0, ou bien à 1. La somme m de leurs carrés est égale à un multiple de 4 augmenté de $r(x^2) + r(y^2)$, c'est-à-dire augmenté de $0 + 0 = 0$, ou $1 + 0 = 0 + 1 = 1$ ou $1 + 1 = 2$.

Nous en déduisons que, si m appartient à Σ, alors $r(m) = 0, 1$ ou 2. Par contraposition :

Soit m un entier strictement positif. Si $r(m) = 3$, alors m n'appartient pas à Σ.

8. $104 = 2^3 \times 13$. Or, 13 appartient à Σ (car $13 = 2^2 + 3^2$). D'après les résultats de la **question 3**, nous pouvons affirmer que 104 appartient à Σ.

$2022 = 2 \times 1011 = 2 \times (4 \times 252 + 3)$; $r(1011) = 3$, donc l'entier 1011 n'appartient pas à Σ.

Son double 2022 n'appartient pas non plus à Σ, sinon, d'après la **question 4**, 1011 serait lui-même élément de Σ.

$r(1234567) = r(1234564 + 3) = 3$, donc 1234567 n'appartient pas à Σ.

9.a. Soit m un entier appartenant à Σ et soit deux entiers $x > y \geq 1$ tels que $m = x^2 + y^2$.

L'inégalité $x > y \geq 1$ implique : $x^2 > y^2 \geq 1$ puis $2x^2 > x^2 + y^2 = m \geq x^2 + 1$. Cette même inégalité implique : $m = 2y^2$ d'où nous pouvons déduire $\sqrt{\frac{m}{2}} \geq y$.

- L'inégalité stricte $2x^2 > m$ entre deux entiers équivaut à l'inégalité large $2x^2 \geq m+1$, d'où nous pouvons déduire $x^2 \geq \frac{m+1}{2}$ donc $x \geq \sqrt{\frac{m+1}{2}}$
- L'inégalité $m \geq x^2+1$ équivaut à $m-1 \geq x^2$ d'où nous pouvons déduire $\sqrt{m-1} \geq x$.

Bilan : $\sqrt{\frac{m+1}{2}} \leq x \leq m-1$ et $1 \leq y \leq \sqrt{\frac{m}{2}}$.

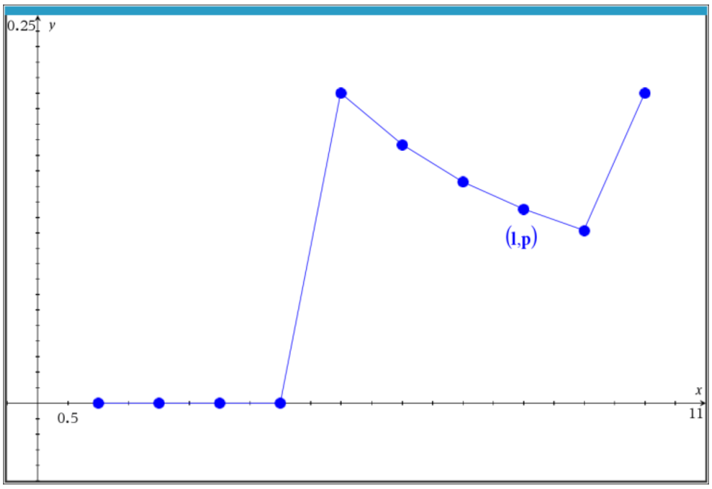
9.b. Aidons-nous d'un algorithme Python pour répondre à la question. L'algorithme « sigma » a pour argument un entier strictement positif m et teste tous les couples d'entiers (x, y) satisfaisant les conditions **9.a**. Si la somme de leurs carrés est égale à m, il affiche le couple en jeu. S'il ne trouve aucun couple vérifiant l'égalité, l'algorithme affiche que l'entier m n'appartient pas à Σ.

```
>>> from math import ceil,floor,sqrt
>>> def sigma(m):
        s=0
        for x in range(ceil(sqrt((m+1)/2)),m):
                for y in range(1,floor(sqrt(m/2))+1):
                        if x**2+y**2==m:
                                print([x,y])
                                s=s+1
        if s==0:
                print(m,"n'appartient pas à sigma")


>>> sigma(104)
[10, 2]
>>> sigma(2022)
2022 n'appartient pas à sigma
>>> sigma(3024)
3024 n'appartient pas à sigma
```

C'est ce qu'il se passe pour l'entier 3024.

10. Les entiers compris entre 1 et 10 qui appartiennent à Σ sont les entiers 5 et 10 et l'application p prend les valeurs $0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{2}{10}$ ce qui conduit au graphique ci-contre.



Nous constatons ainsi que les dix premières valeurs de $p(k)$, pour k allant de 1 à 10, sont toutes inférieures ou égales à $\frac{1}{2}$.

11.a. Pour majorer $C(n)$, tenons compte que tous les entiers qui sont de la forme $4k+3$ n'appartiennent pas à l'ensemble Σ, donc ont pour image 0 par la fonction σ. Tenons compte aussi que l'entier 1 n'appartient pas non plus à Σ donc a aussi pour image 0 par la fonction σ.Soit n un entier supérieur ou égal à 4.

Distinguons les cas n pair et n impair.

Si n est un nombre pair ($n = 2p$ avec $p \geq 2$) :

$$C(n) = C(2p) = \sigma(1) + \sigma(3) + \cdots + \sigma(4p + 1)$$

Partageons en deux parties cette somme :

$$C(2p) = (\sigma(1) + \sigma(3) + \sigma(7) + \sigma(11) + \cdots + \sigma(4p - 1)) + \cdots + \big(\sigma(5) + \sigma(9) + \cdots + \sigma(4p + 1)\big)$$

Tous les termes figurant dans la première somme sont nuls car les entiers en jeu n'appartiennent pas à Σ.

D'autre part, la deuxième somme contient p termes tous inférieurs ou égaux à 1. Donc :

$$C(2p) \leq \big(\sigma(5) + \sigma(9) + \cdots + \sigma(4p + 1)\big) \leq p \text{ soit } C(n) \leq \frac{n}{2}$$

Si n est un nombre impair ($n = 2p + 1$ avec $p \geq 2$) :

$$C(n) = C(2p + 1) = \sigma(1) + \sigma(3) + \cdots + \sigma(4p + 3)$$

Partageons en deux parties cette somme :

$$C(2p) = (\sigma(1) + \sigma(3) + \sigma(7) + \sigma(11) + \cdots + \sigma(4p + 3)) + \cdots + \big(\sigma(5) + \sigma(9) + \cdots + \sigma(4p + 1)\big)$$

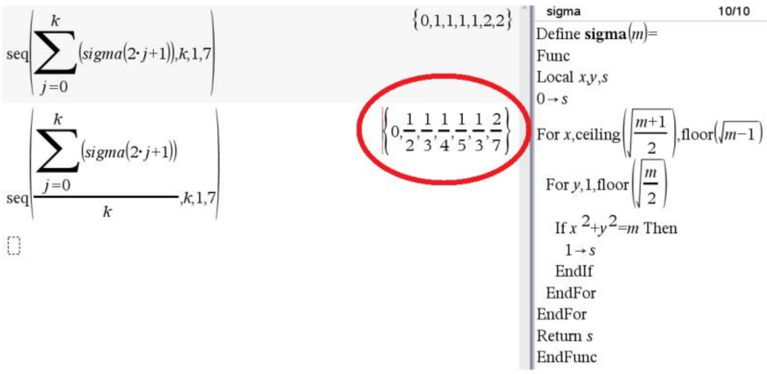
Tous les termes figurant dans la première somme sont nuls car les entiers en jeu n'appartiennent pas à Σ.

D'autre part, la deuxième somme contient p termes tous inférieurs ou égaux à 1. Donc :

$$C(2p + 1) \leq \big(\sigma(5) + \sigma(9) + \cdots + \sigma(4p + 1)\big) \leq p \text{ soit } C(n) \leq \frac{n - 1}{2} < \frac{n}{2}$$

Dans les deux cas, que n soit pair ou impair, nous avons obtenu l'inégalité $C(n) \leq \frac{n}{2}$.

11.b.i. Aidons-nous d'un logiciel de calcul formel (en l'occurrence TI-Nspire CAS) pour répondre à cette question. Nous constatons que les sept premiers rapports $\frac{C(n)}{n}$ affichés sont tous inférieurs ou égaux à $\frac{1}{2}$.



11.b.ii.

NB. La notation $p(n)$ n'est pas très heureuse. Nous cherchons dans cette question la probabilité de l'évènement S : « L'entier choisi appartient à Σ » lorsque l'entier est tiré au hasard dans l'ensemble Ω des n premiers entiers strictement positifs.

En situation d'équiprobabilité, la probabilité de S est égale au rapport entre le cardinal (i.e. nombre d'éléments) de S et le cardinal de Ω. Or, le nombre $\sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n - 1) + \sigma(n)$ représente précisément le cardinal de l'ensemble S.

Nous avons pour tout entier $n > 0$ la relation : $p(n) = \frac{\sigma(1)+\sigma(2)+\cdots+\sigma(n-1)+\sigma(n)}{n}$, autrement dit la relation plus commode : $n \times p(n) = \sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n-1) + \sigma(n)$.

Considérons ce qu'il se passe lorsque l'entier choisi est tiré au hasard parmi les $2n$ premiers entiers > 0.

$$2n \times p(2n) = \sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(2n-1) + \sigma(2n)$$

Séparons dans la somme les termes de rangs pairs et ceux de rangs impairs :

$$2n \times p(2n) = \big(\sigma(1) + \sigma(3) + \cdots + \sigma(2n-1)\big) + \big(\sigma(2) + \sigma(4) + \cdots + \sigma(2n)\big)$$

D'une part : $\sigma(1) + \sigma(3) + \cdots + \sigma(2n-1) = C(n-1)$.

D'autre part, nous avons vu dans les questions 3 et 4 qu'un entier pair $2k$ appartenait à Σ si et seulement si l'entier k lui-même appartenait à Σ, autrement dit que $\sigma(2k) = \sigma(k)$.

En conséquence : $\sigma(2) + \sigma(4) + \cdots + \sigma(2n) = \sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n) = n \times p(n)$

Nous obtenons, comme prévu, la relation :

$$2n \times p(2n) = C(n-1) + n \times p(n)$$

D'après la question précédente, $C(n-1) \leq \frac{n-1}{2}$ et d'après l'hypothèse de récurrence (que l'on applique au rang n), $p(n) \leq \frac{1}{2}$.

$$p(2n) = \frac{C(n-1)}{2n} + \frac{p(n)}{2} \leq \frac{n-1}{4n} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$$

Considérons maintenant ce qu'il se passe lorsque l'entier est tiré au hasard parmi les $2n+1$ premiers entiers strictement positifs.

$$(2n+1) \times p(2n+1) = \sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(2n) + \sigma(2n+1)$$

Séparons dans la somme les termes de rangs pairs et ceux de rangs impairs :

$$(2n+1) \times p(2n+1) = \big(\sigma(1) + \sigma(3) + \cdots + \sigma(2n+1)\big) + \big(\sigma(2) + \sigma(4) + \cdots + \sigma(2n)\big)$$

Maintenant : $\sigma(1) + \sigma(3) + \cdots + \sigma(2n+1) = C(n)$.

Nous obtenons la relation :

$$(2n+1) \times p(2n+1) = C(n) + n \times p(n)$$

D'après la question précédente, $C(n) \leq \frac{n}{2}$ et d'après l'hypothèse de récurrence (que l'on applique au rang n), $p(n) \leq \frac{1}{2}$.

$$p(2n+1) = \frac{C(n)}{2n} + \frac{n \times p(n)}{2n+1} \leq \frac{1}{4} + \frac{n}{4n+2} \leq \frac{1}{2}$$

Nous avons ainsi montré que si l'inégalité $p(k) \leq \frac{1}{2}$ est vraie jusqu'au rang $2n-1$, alors elle reste vraie pour le rang $2n$ et aussi pour le rang $2n+1$, donc qu'alors cette inégalité est vraie jusqu'au rang $2n+1$.

La **question 11.b.i** montre que les sept premières valeurs de $p(k)$ vérifient cette inégalité et la **question 10** montre que c'est le cas des dix premières valeurs. Ces questions attestent que l'inégalité $p(k) \leq \frac{1}{2}$ est vraie jusqu'au rang $2 \times 4 - 1$ au moins et permettent d'initialiser la propriété à démontrer jusqu'au rang 5.
Nous pouvons en déduire que la propriété à démontrer est vraie pour tout entier strictement positif :

Quel que soit $k > 0$, $p(k) \leq \frac{1}{2}$.

12. Nous avons *démontré* dans la **question 11** que le nuage de points représentant les termes de la suite $(p(n))_{n\in\mathbb{N}*}$ est entièrement situé sous la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$. Ce n'est pas une « conjecture » mais une certitude.
On peut « conjecturer » au vu du graphique proposé que pour n « assez grand », la probabilité $p(n)$ semble comprise entre 0,25 et 0,3. On peut aussi conjecturer que la représentation graphique semble se stabiliser, c'est-à-dire que la suite $(p(n))_{n\in\mathbb{N}*}$ admet peut-être une limite lorsque n tend vers plus l'infini, limite qui semblerait être comprise, toujours au vu du graphique, entre 0,25 et 0,3.
Nous ne sommes pas en mesure de prouver ou d'infirmer ces conjectures.

Complément : algorithmes Python et une remise en question

L'algorithme « **sg** » a pour argument un entier strictement positif m et renvoie son image par la fonction sigma. (Si l'algorithme trouve au moins une solution à l'équation $x^2 + y^2 = m$, il renvoie 1, sinon il renvoie 0)

```
>>> def sg(m):
        s=0
        for y in range(1,ceil(sqrt(m/2))):
                for x in range(y+1,m):
                        if x**2+y**2==m:
                                s=s+1
        if s==0:
                return 0
        else:
                return 1
```

L'algorithme « **p** » a pour argument un entier strictement positif n et renvoie la probabilité $p(n)$.

```
>>> def p(n):
        x=0
        for k in range(1,n+1):
                x=x+sg(k)
        return x/n
```

Il faut une assez longue attente pour obtenir $p(10000)$ et beaucoup plus encore pour obtenir $p(15000)$.

```
>>> p(100)
0.29
>>> p(1000)
0.293
>>> p(5000)
0.2738
>>> p(10000)
0.2649
>>> p(15000)
0.2598
```

Notons avec une certaine inquiétude que $p(15000) < p(10000) < p(5000) < p(1000)$. La conjecture « pour n assez grand $p(n)$ reste entre 0,25 et 0,3 » est peut-être exagérément téméraire et nous sommes en droit de remettre en question sa pertinence. La conjecture d'une lente raréfaction des éléments de Σ n'est pas à écarter.