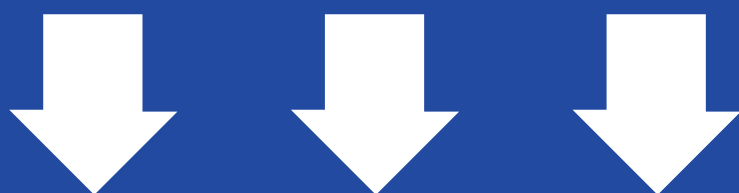


[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE LIMOGES  
2022



## SUJET DE L'ÉPREUVE



# 22<sup>e</sup> ● LYMPIADES DE MATHÉMATI●QUES

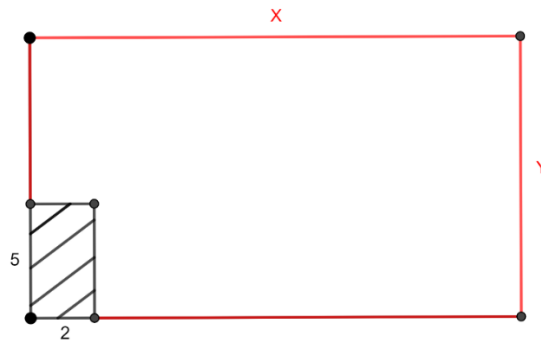
**Exercice n°1 : Attaquons-nous à un peu de géométrie...**

Dans cet exercice, vous allez résoudre deux problèmes indépendants.

**Problème n°1 :**

**Partie A**

Dans son champ, un agriculteur possède un poulailler de forme rectangulaire et de dimensions 5 mètres par 2 mètres. Il souhaite construire un enclos comme l'indique la figure ci-dessous avec 17 mètres de clôture. La zone hachurée représente le poulailler et la clôture est matérialisée en rouge.

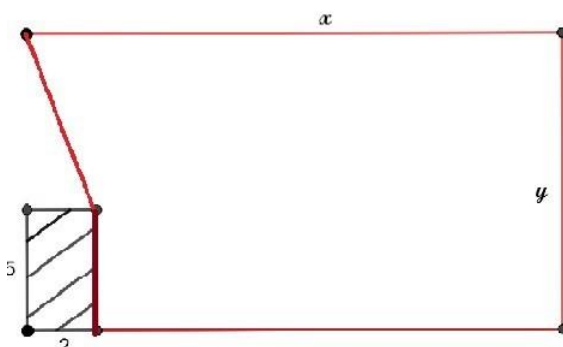


- Justifier l'égalité  $x + y = 12$
- L'agriculteur souhaite installer sa clôture de façon à ce que la surface de promenade dans l'enclos en dehors du poulailler soit maximale. Quelles dimensions  $x$  et  $y$  doit-il alors choisir ?

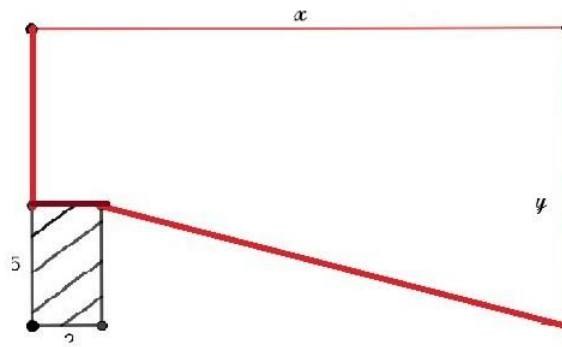
**Partie B**

Finalement, pour des questions d'accessibilité, on décide de sortir le poulailler de l'enclos. Les deux possibilités illustrées ci-dessous sont alors envisagées, sachant que les dimensions du poulailler sont inchangées tout comme la longueur de 17 mètres de clôture utilisée.

Situation n°1



Situation n°2



On a toujours  $x + y = 12$

- Déterminer la surface de chaque enclos en fonction de  $x$ .
- Quelle est la situation à privilégier pour avoir une surface maximale ? Justifier

### Exercice n°2 : Une histoire de probabilités



Un forain souhaite construire un jeu lors duquel les participants n'auraient que 5% de chance de gagner afin d'avoir de gros bénéfices.

Pour cela, il dispose d'une urne contenant 40 boules dont  $n$  bleues,  $n$  étant un entier naturel.

Les règles du jeu sont les suivantes :

Le participant a droit à au plus deux tirages et il gagne s'il tire une boule bleue. Donc soit dès son premier tirage, il obtient une boule bleue, soit il réalise un second tirage sans remise de la première boule tirée et doit alors obtenir une boule bleue pour gagner.

Vous pourrez noter  $B_i$ : "*La boule tirée est bleue au  $i^{\text{ème}}$  tirage*"

Quelle quantité  $n$  de boules bleues dans l'urne doit il décider pour répondre à son souhait ?

*Toute trace de recherche et d'initiative sera prise en compte.*

### Exercice n°3 : Un peu d'arithmétique

- Vérifier que  $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$
- Existe-t-il d'autres suites de 5 entiers naturels consécutifs telles que la somme des carrés des deux plus grands nombres soit égale à la somme des carrés des trois plus petits nombres ?

### Exercice n°4 : Un résultat étonnant

En feuilletant des manuels de mathématiques, Olympe croise une fonction dont l'expression lui semble bien complexe !

Il s'agit de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1; +\infty[$  par

$$f(x) = \sqrt{x - 4\sqrt{x - 1}} + 3 + \sqrt{x - 6\sqrt{x - 1}} + 8$$

Par curiosité, il décide d'utiliser sa calculatrice pour visualiser la courbe représentative de cette fonction étonnante et affirme :

« Je suis surpris...La fonction  $f$  semble constante sur l'intervalle  $[5; 10]$ ! »

- Réaliser la même démarche qu'Olympe pour confirmer son observation et conjecturer la valeur prise par la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[5; 10]$ .
- En posant  $x = u^2 + 1$  avec  $u \geq 0$ , démontrer votre conjecture.
- Expliciter la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1; +\infty[$