

www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE LIMOGES
2021



SUJET DE L'ÉPREUVE



21^e ● LYMPIADES DE MATHÉMATI●QUES

Partie académique

Les exercices suivants sont indépendants.

EXERCICE 1 Une histoire de dénombrement...

Une étude portant sur 866 élèves de Terminale générale a conduit aux relevés suivants :

- 437 élèves sont des garçons
- 529 élèves fournissaient un travail personnel hebdomadaire moyen de plus de 15 heures
- 802 élèves ont obtenu leur Baccalauréat
- 215 élèves masculins fournissaient un travail personnel hebdomadaire moyen de plus de 15 heures
- 402 élèves masculins ont obtenu leur Baccalauréat
- 214 élèves masculins fournissaient un travail personnel hebdomadaire moyen de plus de 15 heures et ont obtenu leur Baccalauréat
- 526 élèves fournissaient un travail personnel hebdomadaire moyen de plus de 15 heures et ont obtenu leur Baccalauréat.

- 1) Combien y a-t-il de jeunes filles refusées à l'examen qui fournissaient un travail personnel hebdomadaire moyen de moins de 15 heures ?
- 2) On choisit un élève de cette étude au hasard. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un garçon refusé à l'examen ?

EXERCICE 2 L'imprimante

On considère une suite de motifs constituée de 10 triangles équilatéraux. Les côtés du triangle équilatéral initial (triangle 0) ont pour longueur 30 cm. Chaque triangle suivant est obtenu en diminuant de 10% la longueur des côtés du triangle précédent.

- 1) Construire, avec soin, les deux premiers triangles de cette série avec une échelle de $\frac{1}{10}$
- 2) Montrer que l'aire du triangle initial, nommé triangle 0, vaut $225\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
- 3) On note A_n l'aire du triangle n . Ainsi, $A_0 = 225\sqrt{3}$
Calculer A_1
- 4) Justifier que pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = 0,81A_n$
- 5) Calculer une valeur approchée au centième de l'aire totale constituée par les 10 triangles.
- 6) On souhaite colorer entièrement l'intérieur des triangles de cette suite, puis l'imprimer. On dispose pour cela d'une imprimante qui contient une cartouche d'encre neuve de contenance 3,5 mL. L'imprimante consomme 0,002 mL pour chaque cm^2 coloré.

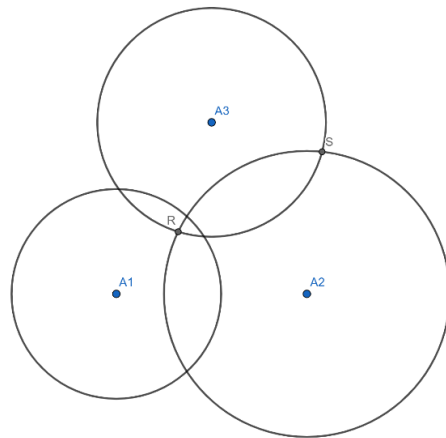
A-t-on suffisamment d'encre dans ma cartouche pour imprimer cette suite de motifs ?

EXERCICE 3 Un problème de triangulation

Samedi 13 Mars, un cambriolage s'est produit à Olympiaville, 17 rue des petits chercheurs. Des voisins ont alerté la police à 22h52 suite à des bruits de verre cassé. Dans le cadre de l'enquête, un suspect a été mis en garde à vue. Il soutient qu'il est innocent et qu'à cette heure-ci, il était devant l'hôpital en train de téléphoner et ne pouvait se trouver sur les lieux.

L'appel émis depuis son téléphone, vers 22h45, a été intercepté par trois antennes relais A_1 , A_2 et A_3 distancées de 200 mètres les unes des autres. Cet appel a été émis à 110 mètres de l'antenne A_1 , à 150 mètres de l'antenne A_2 puis à 120 mètres de l'antenne A_3 .

Voici un schéma à l'échelle de la situation :



Données :

$$\widehat{RA_2S} \approx 73,4^\circ$$

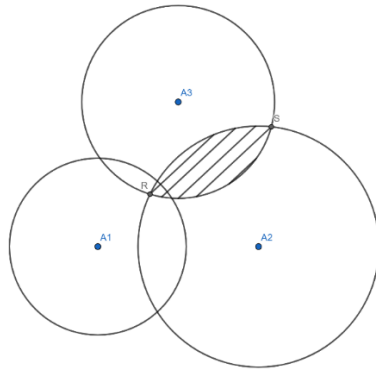
$$\widehat{RA_3S} \approx 96,7^\circ$$

L'aire d'un disque de rayon r est πr^2

- 1) On observe que les trois cercles ne concourent pas en un même point. Expliquer brièvement à quoi cela peut être dû.

Les enquêteurs ont ainsi une idée de la zone dans laquelle se trouvait le suspect lors de son appel pour éventuellement valider son alibi et le disculper.

- 2) Déterminer, au mètre carré près, la surface de la zone hachurée ci-dessous.



- 3) Sachant que la superficie de la zone où se trouvait le suspect représente 3,14% de celle de la zone hachurée, répondre à la question suivante d'un enquêteur :
 « La surface de la zone cible est-elle assez faible pour être inférieure à celle de la moitié d'un terrain de tennis complet ? »

Donnée : Les dimensions réglementaires d'un terrain de tennis complet sont 34,77m de long par 17,07m de large.

EXERCIE 4 Etude du remboursement d'un prêt

Aurélien, un jeune chef d'entreprise souhaite investir dans des utilitaires. Il doit emprunter un capital de 122 000 euros. Après négociation avec sa banque, celle-ci lui accepte un prêt à un taux annuel de 2% sur 14 ans. Il paiera 14 annuités de 10 077,44 euros.

Pour tout entier naturel n compris entre 1 et 14, la n -ième annuité est constituée :

- Du remboursement **noté R_n** , qui est le montant du capital remboursé à la n -ième annuité.
- De l'intérêt annuel **noté I_n** , qui est le montant des intérêts à payer à la n -ième annuité.

Le capital restant dû après la n -ième annuité est **noté C_n** .

On note le capital emprunté : $C_0 = 122\ 000$.

Partie A :

On représente l'ensemble à l'aide d'un tableau, appelé tableau d'amortissement du prêt.

Recopier puis compléter les cases tableau avec les six données suivantes : C_n ; C_{n-1} ; R_n ; 10 077,44 ; I_n ; n

Annuité	Capital restant dû (avant le remboursement de la n -ième annuité)	Montant des intérêts	Montant de l'annuité	Montant du capital remboursé	Capital restant dû (après le remboursement de n -ième annuité)

Partie B :

- 1) Montrer que $I_1 = 2\,440$, $R_1 = 7\,637,44$ et $C_1 = 114\,362,56$.
- 2) Calculer I_2 , R_2 , puis en déduire C_2 .
- 3) Calculer I_3 , R_3 , puis en déduire C_3 .
- 4) La suite (C_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.

Partie C :

- 1) Montrer que $R_n = 10\,077,44 - 0,02C_{n-1}$.
- 2) En déduire que la suite (R_n) est géométrique de raison que l'on précisera.
- 3) Montrer que $C_n = 503\,872 - 381\,872(1,02^n)$

Partie D :

Après une étude plus approfondie de son dossier, la banque lui propose un crédit toujours à 2% d'intérêt mais sur 10 annuités.

L'objectif de cette partie est de déterminer le montant des annuités, noté A .

- 1) Montrer que $A = 0,02C_0 \frac{(1,02)^{10}}{(1,02)^{10}-1}$, puis donner le montant de l'annuité.
- 2) Déterminer le montant total des intérêts que devra payer Aurélien s'il choisit cet emprunt et comparer ce montant avec celui de la précédente proposition de la banque.