www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE LIMOGES
2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

LIMOGES 2022

Exercice 1 : Attaquons-nous à un peu de géométrie

Problème 1, partie A

a. Selon le schéma, l'enclos avec le poulailler incorporé est un rectangle de longueur x et de largeur y dont la partie clôturée a pour longueur : $x+y+(x-5)+(y-2)=2x+2y-7$.

Remarquons tout de suite que, pour que l'enclos soit réalisé, sa longueur doit au moins être égale à 2 et sa largeur doit au moins être égale à 5. Nous avons de fait les contraintes : $x \geq 2$; $y \geq 5$.

L'agriculteur disposant de 17 mètres de grillage, l'agriculteur en utilise la totalité pour réaliser son enclos lorsque x et y vérifient l'équation : $2x+2y-7=17$, équation qui est équivalente à l'équation : $x+y=12$

Si l'agriculteur utilise la totalité du grillage dont il dispose : $x+y=12$

b. L'enclos étant rectangulaire, son aire est égale au produit $x \times y$ de sa longueur et de sa largeur. La surface de promenade est celle de l'enclos diminuée de celle du poulailler (égale à 10 m^2), la surface de promenade a donc pour aire $x \times y-10$.

D'après le résultat précédent, y peut s'exprimer en fonction de x : $y=12-x$ et l'aire de la surface de promenade peut s'exprimer en fonction du seul paramètre x :

Cette aire est égale à $x \times (12-x)-10=-x^2+12x-10$.

Cette aire est donc une fonction polynomiale du deuxième degré. Compte tenu des contraintes $x \geq 2$; $y \geq 5$, cette fonction est définie lorsque $2 \leq x \leq 7$: le réel x appartient à l'intervalle $[2 ; 7]$.

Nous sommes amenés à maximiser la fonction : $x \mapsto S(x)=-x^2+12x-10$ définie sur l'intervalle $[2 ; 7]$.

Cette fonction S a pour dérivée la fonction : $x \mapsto S'(x) = -2x + 12 = -2(x-6)$

La fonction dérivée S' est positive sur l'intervalle $[2\,;6]$ et négative sur l'intervalle $[6\,;7]$.

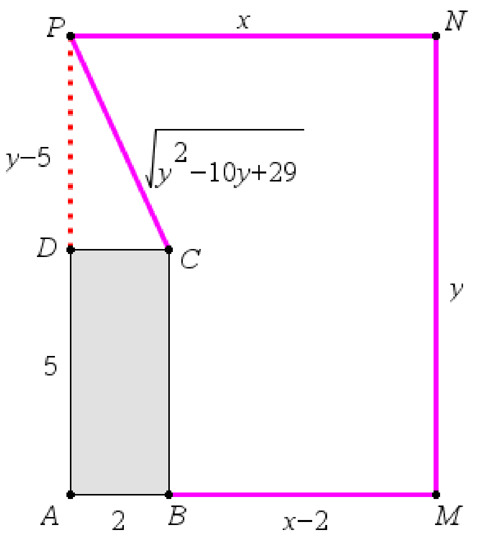
La fonction S est croissante sur l'intervalle $[2\,;6]$ et décroissante sur l'intervalle $[6\,;7]$, elle admet donc un maximum lorsque $x = 6$ et ce maximum est : $S(6) = -6^2 + 12 \times 6 - 10 = 26$.

On remarque qu'alors : $y = x = 6$, l'enclos est un carré.

Pour obtenir une surface de promenade la plus grande possible, l'agriculteur doit construire un enclos carré de côté 6, et dans ce cas l'aire de la surface de promenade est égale à 26 m^2.

Problème 1, partie B

Le poulailler est représenté par le rectangle *ABCD* et l'enclos grillagé imaginé par l'aviculteur est représenté par la ligne brisée *BMNPC*. On suppose que les points *A*, *D*, *P* sont des points alignés, comme le suggère le schéma de l'énoncé.



Si l'on dispose de 17 mètres de grillage, la condition $x + y = 12$ correspond au cas vu dans la première partie où l'enclos est la ligne brisée *BMNPD* (le dernier segment de cette ligne est le segment [*PD*] en pointillés rouges et non le segment [*PC*]).

Or, [*PC*] est l'hypoténuse du triangle rectangle *CDP*, il a une longueur strictement plus grande que le segment [*PD*].

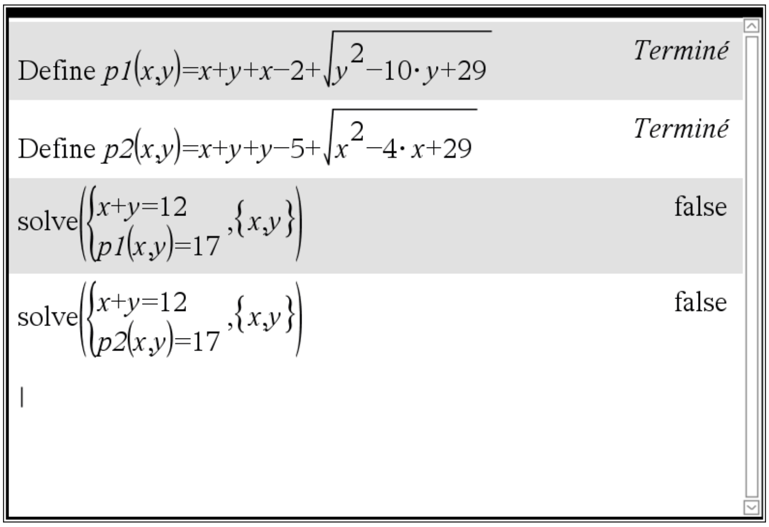
Il sera donc impossible à l'aviculteur de réaliser un enclos conforme à toutes les exigences de la situation 1, les contraintes sont incompatibles.

Il en est de même, pour des raisons analogues, dans le cas de la situation 2.

En conséquence, on ne peut pas répondre à la question a et, quant à la question b, nous dirions qu'aucune des deux situations ne peut convenir, les enclos sont irréalisables.

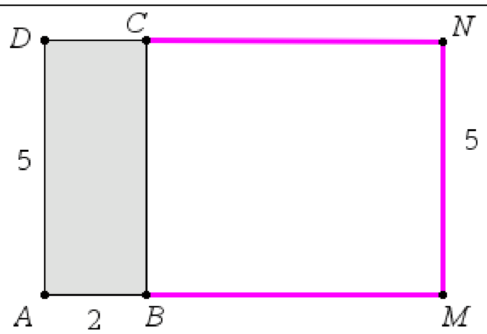
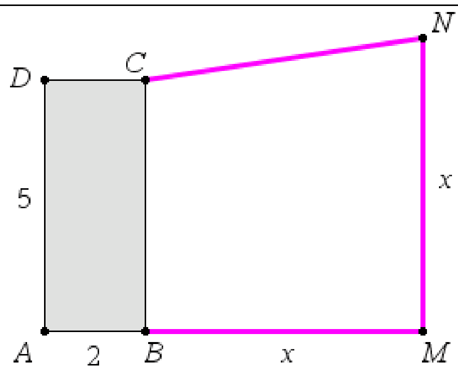
À titre de vérification, nous avons défini avec un logiciel de calcul formel(TI-NSpire CAS) les longueurs des enclos dans la situation 1 (c'est $p_1(x,\ y)$ et aussi dans la situation 2 (c'est $p_2(x,\ y)$.

Comme on le voit, le logiciel échoue à résoudre les systèmes d'équations constitués par, à la fois, la condition $x+y=12$ et la condition d'emploi de 17 mètres de grillage pour l'enclos. Ce qui confirme l'incompatibilité des deux conditions.



En alternative, nous proposerions au lecteur curieux la « partie B » ci-dessous :

Quelle est la situation dans laquelle la surface de promenade est la plus avantageuse, sachant que les 17 mètres de grillage sont entièrement utilisés ?

Situation 1	**Situation 2**
	

Dans la situation 1, l'enclos *BMNC* est un rectangle 5×6, d'aire 30 m^2.

Dans la situation 2, le lecteur devrait obtenir : $x=\dfrac{29-\sqrt{313}}{2}=5{,}65$ à 10^{-2} près et l'enclos est un trapèze dont l'aire est : $x\times\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{361-17\sqrt{313}}{2}=30{,}12$ à 10^{-2}près.

Quant à la situation « la plus avantageuse », cela se discute. Est-ce que cela vaut bien la peine de réaliser un enclos trapézoïdal biscornu pour un gain de surface d'à peine 0,12 m^2 ? Nous nous permettons d'en douter.

Exercice 2 : Une histoire de probabilités

Désignons par G l'évènement : « Le joueur gagne la partie ».

Selon les hypothèses, le joueur effectue d'abord un premier tirage d'une boule parmi 40 dont n sont bleues. Il gagne si l'évènement B_1 est réalisé et alors le jeu s'arrête, sinon le joueur a droit à un deuxième tirage.

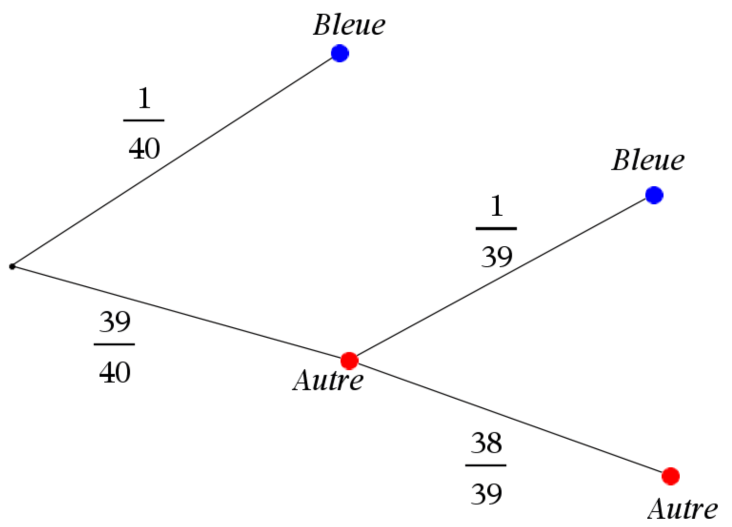
Ainsi, l'évènement G est la réunion $G = B_1 \cup \left(\overline{B_1} \cap B_2\right)$. Il s'agit de deux évènements disjoints, la probabilité de gagner la partie est la somme : $P(G) = P(B_1) + P\left(\overline{B_1} \cap B_2\right)$.

Remarquons que $P(B_1) = \dfrac{n}{40}$.

Si l'urne contient au moins deux boules bleues, alors : $P(B_1) = \dfrac{n}{40} \geq \dfrac{2}{40} = \dfrac{1}{20} = \dfrac{5}{100}$.

Or : $P(G) > P(B_1)$ puisque le joueur a droit à un deuxième tirage (où la probabilité de gagner est non nulle) s'il ne gagne pas au premier. Autrement dit, si le forain met dans l'urne au moins deux boules bleues, alors son objectif ne peut pas, en aucun cas, être atteint.

Examinons le cas où le forain met dans l'urne une seule boule bleue. Nous pouvons représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités pondéré.



D'une part $P(B_1) = \dfrac{1}{40}$ D'autre part, la probabilité conditionnelle, sachant que l'évènement $\overline{B_1}$ est réalisé, que l'évènement B_2 le soit est $\dfrac{1}{39}$, car alors il reste 39 boules dans l'urne dont une seule bleue.

Donc : $P\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = P\left(\overline{B_1}\right) \times P_{\overline{B_1}}(B_2) = \dfrac{39}{40} \times \dfrac{1}{39} = \dfrac{1}{40}$

Dans ce cas : $P(G) = P(B_1) + P\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{40} = \dfrac{1}{20} = \dfrac{5}{100}$, l'objectif est atteint !

Pour que la probabilité qu'un joueur gagne une partie soit égale à 5 %, le forain doit obligatoirement mettre dans l'urne une seule boule bleue et 39 autres boules.

Exercice 3 : Un peu d'arithmétique

a. $10^2+11^2+12^2=100+121+144=365$ et $13^2+14^2=169+196=365$

Il est vérifié que $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$

b. Désignons par x le troisième nombre (le nombre « médian » de la suite des cinq entiers naturels).

Les nombres en jeu sont, par ordre croissant, les nombres : $x-2$; $x-1$; x ; $x+1$; $x+2$ ce qui fait que x est nécessairement un entier naturel au moins égal à 2.

Dans cette question, nous devons chercher s'il existe des nombres entiers naturels x au moins égaux à 2 et tels que : $(x-2)^2+(x-1)^2+x^2=(x+1)^2+(x+2)^2$

Or d'une part : $(x-2)^2+(x-1)^2+x^2=\left(x^2-4x+4\right)+\left(x^2-2x+1\right)+x^2=3x^2-6x+5$ et d'autre part : $(x+1)^2+(x+2)^2=\left(x^2+2x+1\right)+\left(x^2+4x+4\right)=2x^2+6x+5$

La question revient à déterminer s'il existe des entiers naturels x au moins égaux à 2 tels que $3x^2-6x+5=2x^2+6x+5$, c'est-à-dire tels que : $x^2-12x=x\left(x-12\right)=0$.

Cette équation a une seule solution qui soit un entier naturel au moins égal à 2 : Nous retrouvons le résultat de la première question : $x=12$ et la suite des cinq nombres 10, 11, 12, 13 et 14.

La suite des cinq nombres 10, 11, 12, 13 et 14 est la seule suite de cinq entiers naturels consécutifs qui répond à la question.

(On remarque cependant que : $(-2)^2+(-1)^2+0^2=1^2+2^2$, l'hypothèse « cinq entiers naturels » élimine cette seconde possibilité)

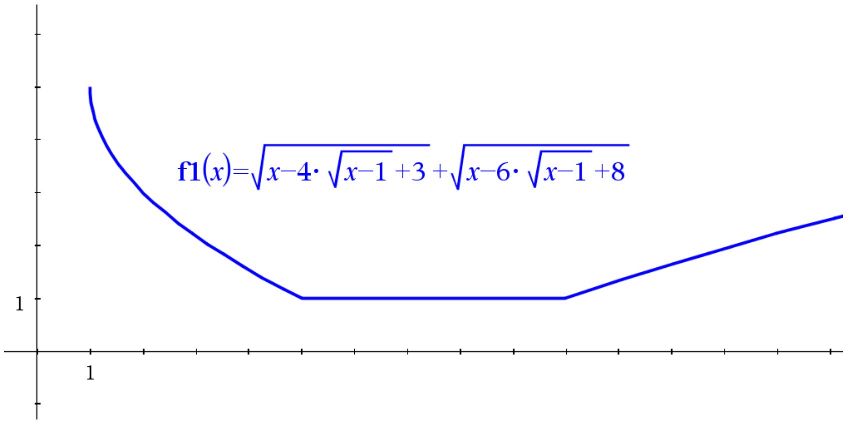
Exercice 4 : Un résultat étonnant

Dédions cet exercice à Olympe de Gouges, éminente mathématicienne du XVIII^{ème} siècle, entre autres qualités. C'est une fille. Ainsi « elle utilisa sa calculatrice » puis « elle fut surprise ».

Désignons, comme l'indique l'énoncé, par f la fonction : $x \mapsto f(x) = \sqrt{x - 4\sqrt{x-1} + 3} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-1} + 8}$;

Cette fonction est définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, sous réserve que les expressions sous chacun des deux radicaux soient positives ou nulles (nous verrons plus loin que c'est bien le cas).

a. Représentation graphique de la fonction *f*. Il semble que cette fonction soit constante et égale à 1 sur l'intervalle $[5\,;10]$.



b et c. Effectuons le changement de variable suggéré par l'énoncé :

Pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;+\infty[$, posons : $x = u^2 + 1$ avec $u \geq 0$ (ce qui revient à poser : $u = \sqrt{x-1}$).

Etudions comment s'expriment en fonction de u les expressions qui sont sous les deux radicaux :

- D'une part : $x - 4\sqrt{x-1} + 3 = (u^2+1) - 4\sqrt{u^2} + 3 = u^2 - 4u + 4 = (u-2)^2$
- D'autre part : $x - 6\sqrt{x-1} + 8 = (u^2+1) - 6\sqrt{u^2} + 8 = u^2 - 6u + 9 = (u-3)^2$

$\sqrt{x - 4\sqrt{x-1} + 3} = \sqrt{(u-2)^2} = |u-2|$ et $\sqrt{x - 6\sqrt{x-1} + 8} = \sqrt{(u-3)^2} = |u-3|$ et en conséquence :

$$\sqrt{x - 4\sqrt{x-1} + 3} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-1} + 8} = \sqrt{(u-2)^2} + \sqrt{(u-3)^2} = |u-2| + |u-3|$$

b. Dire que x appartient à l'intervalle $[5\,;10]$ équivaut à dire que $u = \sqrt{x-1}$ appartient à l'intervalle $[2\,;3]$.

Lorsque u appartient à cet intervalle $[2\,;3]$: $\sqrt{(u-3)^2} = |u-3| = 3-u$ tandis que $\sqrt{(u-2)^2} = |u-2| = u-2$.

Dans cette circonstance : $f(x) = \sqrt{x - 4\sqrt{x-1} + 3} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-1} + 8} = (2-u) + (u-3) = 1$

La fonction *f* est bien constante et égale à 1 sur l'intervalle $[5\,;10]$

c. Proposons une discussion un peu plus générale en étudiant deux autres cas :

- Dire que x appartient à l'intervalle $[1\,;5]$ équivaut à dire que $u=\sqrt{x-1}$ appartient à l'intervalle $[1\,;2]$. Lorsque u appartient à cet intervalle $[1\,;2]$: $\sqrt{(u-3)^2}=|u-3|=3-u$ et $\sqrt{(u-2)^2}=|u-2|=2-u$. Dans cette circonstance :

  $f(x)=\sqrt{x-4\sqrt{x-1}+3}+\sqrt{x-6\sqrt{x-1}+8}=(2-u)+(3-u)=5-2u$.

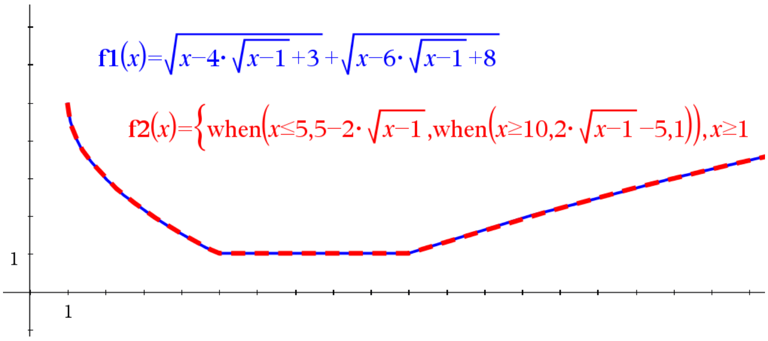
- Dire que x appartient à l'intervalle $[10\,;+\infty[$ équivaut à dire que $u=\sqrt{x-1}$ appartient à l'intervalle $[3\,;+\infty[$. Lorsque u appartient à cet intervalle $[3\,;+\infty[$: $\sqrt{(u-3)^2}=|u-3|=u-3$ et $\sqrt{(u-2)^2}=|u-2|=u-2$. Dans cette circonstance :

  $f(x)=\sqrt{x-4\sqrt{x-1}+3}+\sqrt{x-6\sqrt{x-1}+8}=(u-2)+(u-3)=2u-5$.

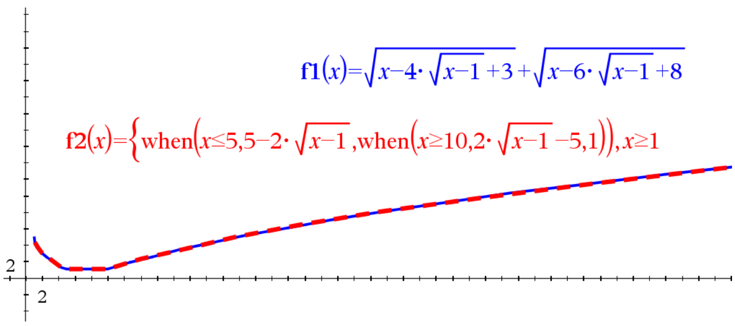
La fonction *f* peut aussi bien être définie explicitement sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ de la façon suivante :

$$f(x)=\begin{cases}5-2\sqrt{x-1} & si\ 1\le x\le 5\\ 1 & si\ 5\le x\le 10\\ 2\sqrt{x-1}-5 & si\ x\ge 10\end{cases}$$

Nous avons représenté sur un même graphique la fonction *f* avec son expression donnée dans l'énoncé (trait plein bleu) puis avec les diverses expressions que nous avons explicitées (trait pointillé rouge). Nous pouvons constater la superposition des deux tracés.



NB. Nous aurions pu, au vu du tracé obtenu à l'écran dans la question **a**, être tentés de conjecturer que pour $x\ge 10$ la fonction *f* est une fonction affine car « le tracé a l'air rectiligne ». Nous venons de prouver que cette conjecture est fausse. Et si on « dézoome », on se rend bien compte que cette éventuelle conjecture n'est pas plausible.



Comme quoi, il faut se méfier des apparences.