OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE LIMOGES 2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

LIMOGES 2021

Exercice 1 : Une histoire de dénombrement

1. Le texte de l'énoncé propose une répartition des élèves selon trois critères différents. Plutôt que de gérer la répartition des trois critères à la fois, cherchons, à l'aide d'un tableau à double entrée, quelle est, parmi les jeunes filles seulement, la répartition des deux critères « plus ou moins de 15 heures » et « refusée ou admise ».

Par complémentarité, on peut disposer de quatre informations à propos de la répartition des jeunes filles :

- Puisque, parmi les 866 élèves du Lycée il y a 437 garçons, il y a $866-437=429$ filles.
- Puisque, parmi les 802 admis il y a 402 garçons, il y a 400 filles admises.
- Puisque, parmi les 529 élèves fournissaient un travail personnel hebdomadaire moyen de plus de 15 heures il y a 215 garçons, il y a $529-215=314$ filles qui fournissaient un travail personnel hebdomadaire moyen de plus de 15 heures.
- Puisque, parmi les 526 élèves qui fournissaient un travail personnel hebdomadaire moyen de plus de 15 heures et ont obtenu leur Baccalauréat il y a 214 garçons, il y a $526-214=312$ filles qui sont admises et qui fournissaient un travail personnel hebdomadaire moyen de plus de 15 heures.

Ces quatre informations permettent de construire la répartition complète des effectifs jeunes filles selon les deux critères « plus ou moins de 15 heures » et « refusée ou admise » :

	>15	<15	Total
Admises	**312**	**88**	**400**
Refusées	**2**	**27**	**29**
Total	**314**	**115**	**429**

Par simple lecture du tableau, on peut affirmer que :

27 jeunes filles ont été refusées à l'examen et fournissaient un travail personnel hebdomadaire moyen de moins de 15 heures.

2. Parmi les 437 garçons du Lycée, il y a eu 402 admis, donc $437-402=35$ refusés.

La probabilité qu'un élève choisi au hasard soit un garçon refusé est $\frac{35}{866}$ **(soit 4 % à 0,1 % près).**

Exercice 2 : L'imprimante

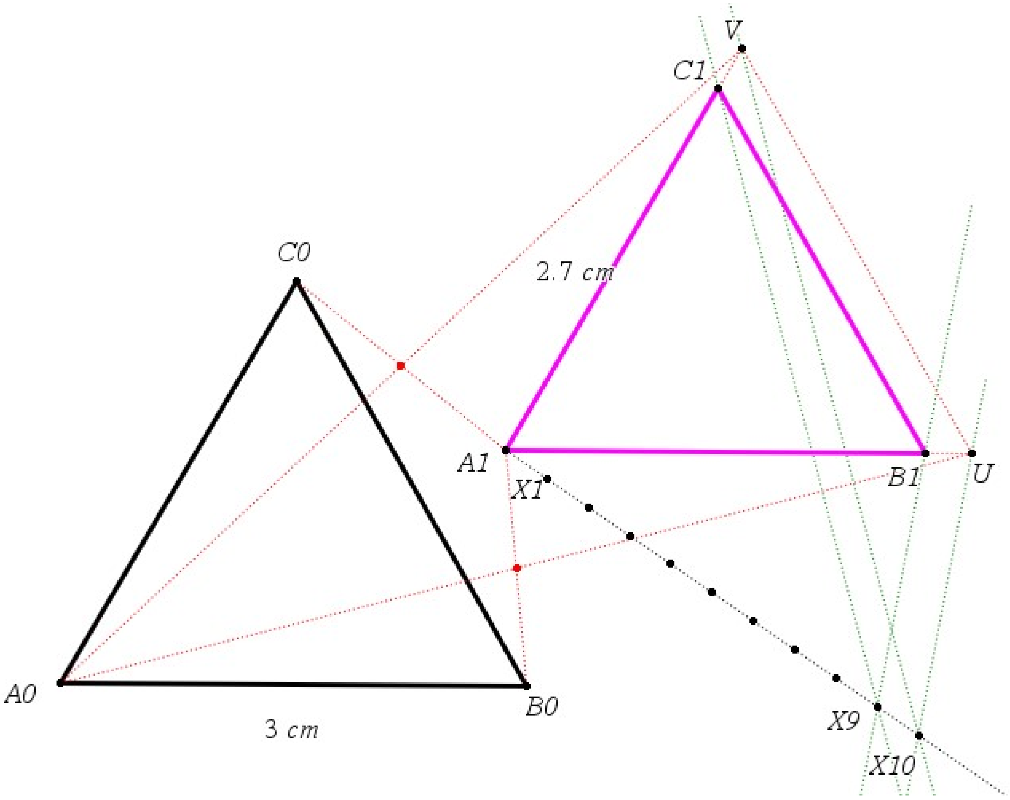
1. On construit d'abord un triangle équilatéral $A_0B_0C_0$ initial (en principe de 3 cm de côté pour respecter l'échelle $\frac{1}{10}$).

L'énoncé ne précise pas comment sont disposés ensuite les triangles les uns par rapport aux autres. Nous proposons deux méthodes différentes :

Méthode 1.
Construction du triangle numéro 1 uniquement

- On choisit un point A_1 arbitrairement dans le plan.
- On construit le triangle équilatéral A_1UV translaté de $A_0B_0C_0$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{A_0A_1}$. Pour cela, les points U et V sont les symétriques de A_0 par rapport aux milieux des segments $[A_1B_0]$ et $[A_1C_0]$.
- On construit l'homothétique de A_1UV par l'homothétie de centre A_1 et de rapport $\frac{9}{10}$. On peut pour cela reporter sur une demi-droite d'origine A_1 et distincte de (A_1U) dix fois une même longueur arbitraire. Soient X_9 et X_{10} les neuvième et dixième points. Les points B_1 et C_1 sont les points d'intersection avec (A_1U) et (A_1V) des parallèles aux droites $(X_{10}U)$ et$(X_{10}V)$ passant par le point X_9.

C'est l'option choisie sur la figure ci-dessous :

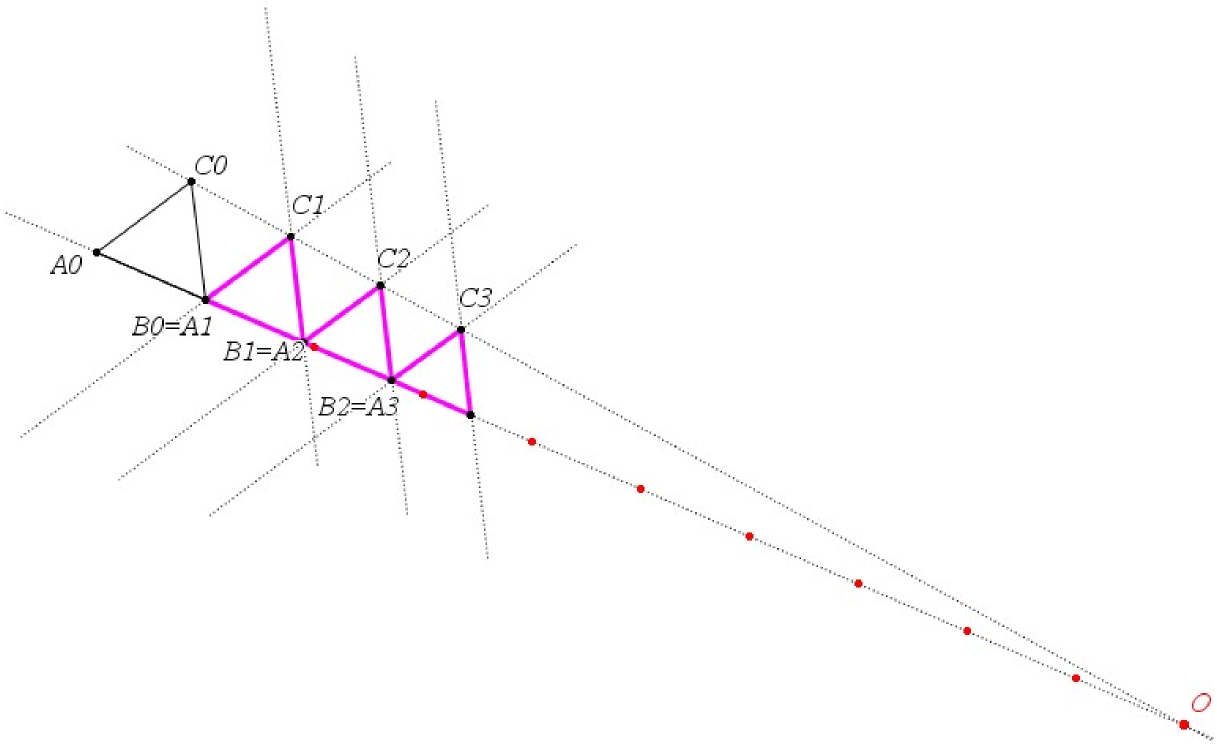


Méthode 2

Plus esthétique mais nécessite une plus grande feuille de dessin ...

- On construit le point O tel que : $\overrightarrow{A_0O} = 10.\overrightarrow{A_0B_0}$ et on trace la droite (OC_0). Ce point O vérifie la relation vectorielle : $\overrightarrow{OB_0} = \dfrac{9}{10}.\overrightarrow{OA_0}$ et, de ce fait, le point B_0 est l'image de A_0 par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{9}{10}$. On choisit ce point B_0 comme point A_1.
- Le point C_1 est l'intersection de la parallèle à (A_0C_0) passant par B_0 avec la droite (OC_0) et le point B_1 est l'intersection de la parallèle à (C_0B_0) passant par C_1 avec la droite (OA_0).

Cette construction peut être itérée comme nous l'avons fait sur la figure ci-dessous :



2. On sait qu'un triangle équilatéral de côté a a pour hauteur $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ et pour aire : $\dfrac{1}{2} \times a \times \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Le triangle équilatéral initial est tel que : $a = 30$ cm.

L'aire du triangle initial numéro 0 est égale à : $900 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 225\sqrt{3}$ cm^2.

Il est vrai que : $A_0 = 225\sqrt{3}$

3. Le triangle numéro 1 est un triangle équilatéral de côté $0,9 \times 30 = 27$ cm.

L'aire du triangle numéro 1 est égale à : $27^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{729}{4} \times \sqrt{3}$

4. On sait qu'une réduction (ou un agrandissement) de rapport donné k multiplie les longueurs par k et les aires par k^2.

Quel que soit l'entier n appartenant à l'ensemble $\{0 ; 1 ;...; 9\}$, le triangle numéro $(n+1)$ est, d'après l'énoncé, une réduction du triangle numéro n de rapport 0,9. Cette réduction multiplie les aires par le coefficient : $0{,}9^2 = 0{,}81$.

C'est pourquoi, quel que soit l'entier *n* appartenant à l'ensemble $\{0 ; 1 ;...; 9\}$,: $A_{n+1} = 0{,}81 \times A_n$.

5. La suite des aires (A_n) est une suite géométrique de premier terme $A_0 = 225\sqrt{3}$ et de raison 0,81. Ainsi, pour tout entier k appartenant à l'ensemble $\{0 ; 1 ;...; 9\}$: $A_k = \left(225\sqrt{3}\right) \times 0{,}81^k$

L'aire cumulée des dix triangles est la somme : $A_0 + A_1 + ... + A_9 = \left(225\sqrt{3}\right) \times \left(1 + 0{,}81 + ... + 0{,}81^9\right)$

On connaît l'identité : $1 + q + ... + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour q distinct de 1 et n entier naturel. En exploitant cette identité avec $q = 0{,}81$; $n = 9$, on obtient la valeur exacte :

$$A_0 + A_1 + ... + A_9 = \left(225\sqrt{3}\right) \times \frac{1-0{,}81^{10}}{0{,}19}$$

Une calculatrice indique que $1801{,}745 < \left(225\sqrt{3}\right) \times \dfrac{1-0{,}81^{10}}{0{,}19} < 1801{,}746$.

Par conséquent, l'arrondi au centième de $\left(225\sqrt{3}\right) \times \dfrac{1-0{,}81^{10}}{0{,}19}$ est 1801,75.

L'aire cumulée des dix triangles est égale à 1801,75 cm² à 0,01 cm² près.

6. Une cartouche d'encre permet de colorer au plus une surface dont l'aire égale à $\dfrac{3{,}5}{0{,}002} = 1750 \text{ cm}^2$.

Une seule cartouche ne suffira pas pour colorer les dix triangles.

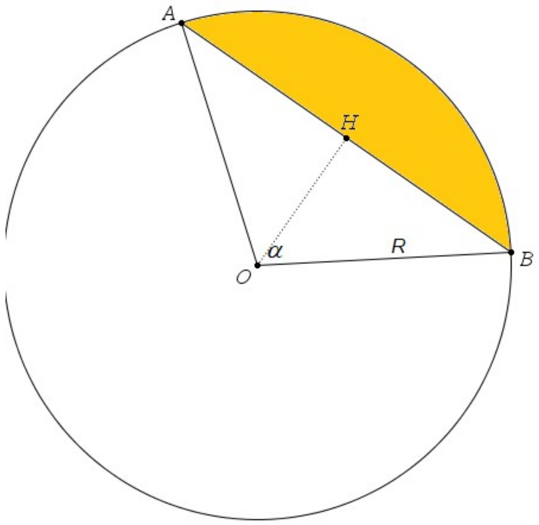
Exercice 3 : Un problème de triangulation

Rappel utile

On considère l'aire d'une portion de disque de centre O et de rayon R délimitée par une corde $[AB]$ et l'arc d'extrémités A et B (en jaune sur la figure ci-contre).

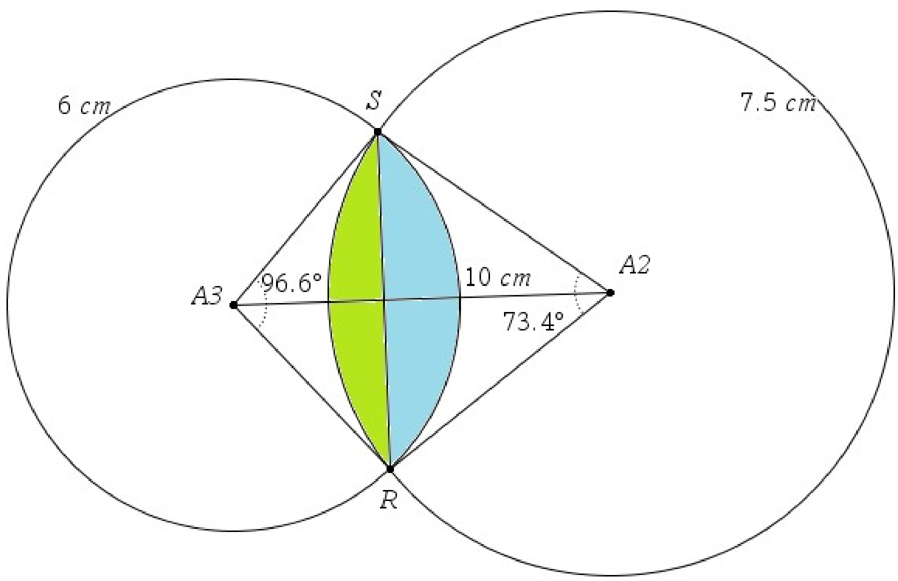
Soit α la mesure en radians de l'angle au centre $\widehat{AOB}$.
Alors, l'aire de cette partie du disque est :

$$\frac{\alpha - \sin\alpha}{2} \times R^2$$



1. La localisation d'un appel est affectée d'une certaine marge d'incertitude, la mesure de la distance d'un téléphone à une antenne n'est pas mesurée exactement. On peut d'ailleurs conjecturer au vu des données que cette mesure est approchée au décamètre près, certainement par excès et non par défaut (sinon, les trois disques pourraient avoir une intersection vide et ne permettraient pas une localisation correcte). C'est pourquoi les cercles ne concourent pas.

2. Nous avons représenté les deux cercles de centre A_2 et A_3 à une échelle réduite et présenté différemment la zone hachurée de l'énoncé, nous l'avons ici colorée en deux couleurs, en vert et en bleu de part et d'autre de la corde $[RS]$, de façon à pouvoir appliquer dans de bonnes conditions le « rappel utile ».



- Aire de la partie verte : $\dfrac{96{,}7\times\dfrac{\pi}{180}-\sin\left(96{,}7\times\dfrac{\pi}{180}\right)}{2}\times 120^2$

- Aire de la partie bleue : $\dfrac{73{,}4\times\dfrac{\pi}{180}-\sin\left(73{,}4\times\dfrac{\pi}{180}\right)}{2}\times 150^2$

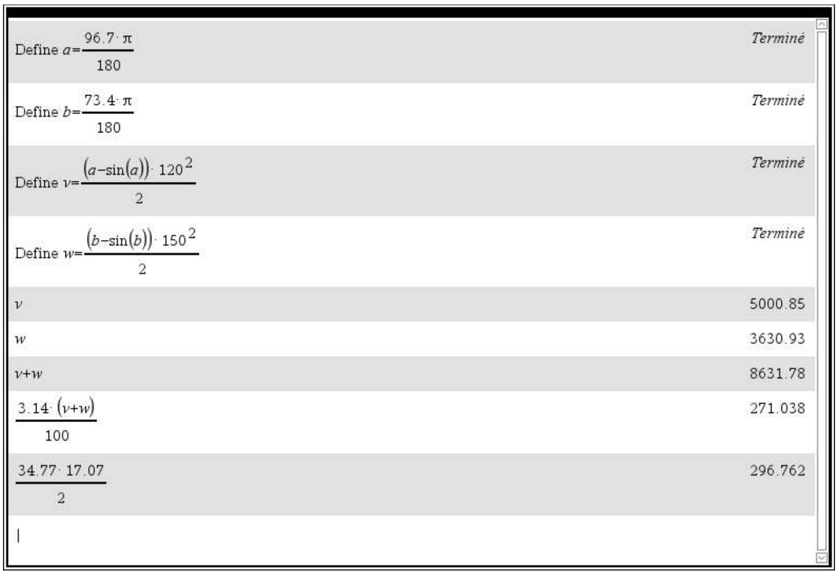
L'usage d'une calculatrice semble indispensable pour effectuer les calculs :

Elle indique ci-contre que, au « mètre carré près » (sic) :

Aire verte : 5001 m^2 (la variable u)

Aire bleue : 3631 m^2 (la variable v)

L'aire hachurée est la somme $u+v$.



La calculatrice indique que : $8631{,}7<u+v<8631{,}8$. L'arrondi à l'unité de ce nombre est 8632.

Une valeur approchée au mètre carré près de l'aire hachurée est 8632 m^2.

NB : Voir remarque ci-dessous

3. La zone cible représente 3,14 % de la zone hachurée, la calculatrice (voir copie d'écran ci-dessus) indique qu'une valeur approchée par excès de l'aire de la zone cible est 271,1 et cette valeur est strictement inférieure à l'aire de la moitié d'un terrain de tennis (laquelle aire, selon la copie d'écran, est 296,7 à 0,1 par défaut).

Remarque. Il est illusoire de penser, dans le contexte de cet exercice, que l'on obtient vraiment une valeur approchée de l'aire hachurée « au mètre carré près ». Les mesures d'angle sont approchées comme en témoigne le symbole « $\approx$ », *a priori* à 0,1 près, c'est-à-dire que l'une est entre 96,65 et 96,75 et l'autre entre 73,35 et 73,45. Ces fourchettes conduiraient plutôt à dire que l'aire hachurée est, si on effectue les calculs avec les extrémités des fourchettes, entre $4993{,}8+3623{,}9$ et $5007{,}9+3938$ soit entre 8617,7 et 8645,9 m^2. Encore que les valeurs basses des fourchettes sont elles-mêmes sujettes à caution si l'on admet que 120 et 150 ne sont que des valeurs approchées au décamètre près par excès ! Cependant, on peut tenir pour certain que 8645,9 est un *majorant* de l'aire hachurée, ce qui assure que l'aire de la zone cible est majorée par 271,5 : la réponse à la question 3 n'est pas remise en cause.

Exercice 4 : Etude du remboursement d’un prêt

Partie A

Annuité	Capital restant dû (avant le remboursement de la n-ième annuité)	Montant des intérêts	Montant de l’annuité	Montant du capital remboursé	Capital restant dû (après le remboursement de n-ième anuité)
n	C_{n-1}	I_n	**10077,44**	R_n	C_n

Partie B :

1. Lors du versement de l’annuité numéro 1 :

Un capital initial C_0 égal à 122000 € placé à 2 % produit un intérêt égal à : $\frac{2}{100} \times 122\,000 = 2\,440$.

On en déduit que : $I_1 = 2\,440$, ce qui détermine les autres paramètres :

$$R_1 = 10\,077{,}44 - I_1 = 10\,077{,}44 - 2\,440 = 7\,637{,}44 \;\; ; \;\; C_1 = 122\,000 - R_1 = 122\,000 - 7\,637{,}44 = 114\;362{,}56$$

2. Lors du versement de l’annuité numéro 2 :

Un capital C_1 égal à 114362,56 € placé à 2 % produit un intérêt égal à : $\frac{2}{100} \times 114\,362{,}56 = 2\,287{,}25$.

On en déduit que : $I_2 = 2\,285{,}25$, ce qui détermine les autres paramètres :

$$R_2 = 10\,077{,}44 - I_2 = 10\,077{,}44 - 2\,285{,}25 = 7\,790{,}19 \;\; ; \;\; C_2 = C_1 - R_2 = 114\,362{,}56 - 7\,790{,}19 = 106\,572{,}37$$

3. Lors du versement de l’annuité numéro 3 :

Un capital C_2 égal à 106572,37 € placé à 2 % produit un intérêt égal à : $\frac{2}{100} \times 106\,572{,}37 = 2131{,}45$.

On en déduit que : $I_3 = 2131{,}45$, ce qui détermine les autres paramètres :

$$R_3 = 10\,077{,}44 - I_3 = 10\,077{,}44 - 2131{,}45 = 7\,945{,}99 \;\; ; \;\; C_3 = C_2 - R_3 = 106\,572{,}37 - 7\,945{,}99 = 98\,626{,}38$$

4. On constate d’après les résultats de la question précédente que $C_3 - C_2 \neq C_2 - C_1$ et que $\frac{C_3}{C_2} \neq \frac{C_2}{C_1}$ **.** La suite (C_n) n’est ni arithmétique, car on ne passe pas d’un terme au suivant en ajoutant toujours un même nombre réel, ni géométrique, car on ne passe pas d’un terme au suivant en multipliant toujours par un même nombre réel.

Partie C :

1. En reproduisant le raisonnement de la partie précédente lors du versement de l'annuité numéro n :
Le capital C_{n-1} restant dû lors de l'annuité précédente a produit, placé à 2 %, un intérêt I_n égal à : $0{,}02 \times C_{n-1}$.

Ce qui détermine les autres paramètres :

Le montant du capital remboursé est : $R_n = 10\,077{,}44 - I_n = 10\,077{,}44 - 0{,}02\,C_{n-1}$**.**

Il est utile aussi pour la question suivante de s'intéresser au capital restant dû après le versement de l'annuité numéro n : $C_n = C_{n-1} - R_n = C_{n-1} - (10077{,}44 - 0{,}02\,C_{n-1}) = 1{,}02\,C_{n-1} - 10077{,}44$.

NB : On dit d'une telle suite, où le terme de rang $(n+1)$ est fonction affine du précédent, qu'elle est « arithmético-géométrique ».

2. Etudions pour $1 \le n \le 13$ les liens entre les remboursements associés aux annuités n et $n+1$:

$$\begin{cases} R_n = 10\,077{,}44 - 0{,}02\,C_{n-1} \\ R_{n+1} = 10\,077{,}44 - 0{,}02\,C_n \end{cases}.$$

Compte tenu de la relation de récurrence portant sur les termes de la suite (C_n) :
$R_{n+1} = 10\ 077{,}44 - 0{,}02(1{,}02\ C_{n-1} - 10\,077{,}44) = 1{,}02 \times (10\,077{,}44 - 0{,}02 \times C_{n-1})$

On obtient ainsi la relation de récurrence : $R_{n+1} = 1{,}02 \times R_n$ qui caractérise une suite géométrique.

La suite (R_n) est géométrique de raison 1,02 et de premier terme $R_1 = 7\,637{,}44$

Il est de ce fait possible de proposer une formule explicite pour le terme de rang n (où l'entier n est tel que $1 \le n \le 14$) de cette suite : $R_n = 7\,637{,}44 \times 1{,}02^{n-1}$

3. La formule explicite obtenue à propos de R_n en induit une autre à propos de C_n.

En effet : $R_{n+1} = 7\,637{,}44 \times 1{,}02^n = 10077{,}4 - 0{,}02\,C_n$ et donc, conformément à l'indication de l'énoncé:

$$C_n = \frac{10\,077{,}4 - 7\,637{,}44 \times 1{,}02^n}{0{,}02} = 503\,872 - 381\,872 \times 1{,}02^n$$

Partie D

Par rapport à la partie précédente, ne changent pas : le capital emprunté, 122000 €, le taux d'intérêt, 2 %, et la part d'intérêt amorti lors du premier versement, soit 2440 €.

Ne change pas non plus la formule explicite : $R_n = R_1 \times 1{,}02^{n-1}$ où R_1 désigne le capital remboursé lors du versement de la première échéance.

1. R_1 s'exprime d'une part en fonction de l'annuité A et du capital emprunté : $R_1 = A - 0{,}02 \times C_0$.

Il est calculé d'autre part de façon à ce que la somme des 10 remboursements soit égale au capital emprunté : $R_1 + R_2 + \ldots R_{10} = C_0$ soit : $R_1 \times \left(1 + 1{,}02 + \ldots + 1{,}02^9\right) = C_0$

Ce qui donne : $R_1 \times \dfrac{1{,}02^{10} - 1}{1{,}02 - 1} = \left(A - 0{,}02C_0\right) \times \dfrac{1{,}02^{10} - 1}{1{,}02 - 1} = C_0$

Cette relation est équivalente à : $A - 0{,}02C_0 = \dfrac{0{,}02\,C_0}{1{,}02^{10} - 1}$ soit : $A = 0{,}02C_0 + \dfrac{0{,}02\,C_0}{1{,}02^{10} - 1} = 0{,}02\,C_0 \times \dfrac{1{,}02^{10}}{1{,}02^{10} - 1}$

En l'occurrence : $A = 0{,}02 \times 122\,000 \times \dfrac{1{,}02^{10}}{1{,}02^{10} - 1} = 13581{,}84$

Le montant de l'annuité est 13581,84 €

2. Le premier remboursement est, dans ce cas : $R_1 = 13581{,}34 - 2440 = 11141{,}34$

Les dix annuités représentent une somme égale à $135818{,}40$ €.

Or, $135818{,}40 - 122000 = 13818{,}40$

La part d'intérêts est égale à 13818,40 €

	A	B capital	C interet	D annuite	E rembourse
	0)				
1	0	122000	_	_	_
2	1	110858.16	2440.00	13581.84	11141.84
3	2	99493.49	2217.16	13581.84	11364.67
4	3	87901.52	1989.87	13581.84	11591.97
5	4	76077.72	1758.03	13581.84	11823.81
6	5	64017.44	1521.55	13581.84	12060.28
7	6	51715.95	1280.35	13581.84	12301.49
8	7	39168.43	1034.32	13581.84	12547.52
9	8	26369.96	783.37	13581.84	12798.47
10	9	13315.53	527.40	13581.84	13054.44
11	10	2.30E-8	266.31	13581.84	13315.53

Dans le contrat initial, les quatorze annuités représentent une somme égale à 141084,16 € soit une part d'intérêts égale à 19084,16 €. L'écart entre les parts d'intérêts des deux contrats est 5265 € à l'euro près. Le second contrat est de ce point de vue plus « avantageux », mais bien entendu, revers de la médaille, le montant de ses annuités est nettement plus élevé.

On n'a rien pour rien ...