OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

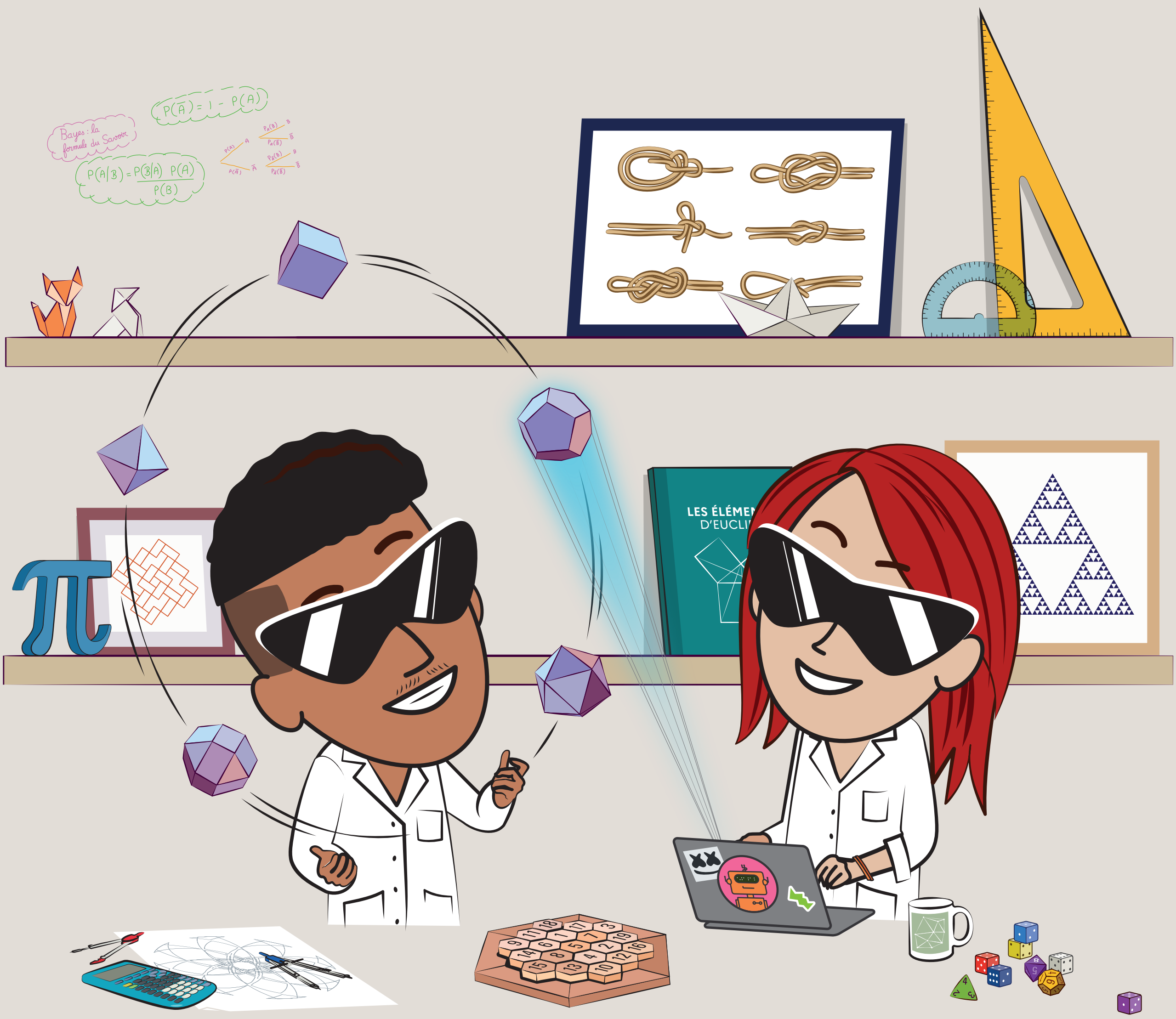
ACADÉMIE DE LILLE
2023

SUJET DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

Animath · CASIO · Crédit Mutuel Enseignant · Inria · Texas Instruments

Olympiades Nationales de Mathématiques

Académie de Lille

Mercredi 15 mars 2023 de 8h à 12h10

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, séparées d'une pause de dix minutes. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents : 8h et 10h10.**

La première partie, constituée des exercices nationaux, est réalisée individuellement.

À son issue, les copies sont ramassées et une pause de dix minutes est prévue.

La seconde partie, constituée des exercices académiques, est réalisée en binôme.

Énoncés de la première partie de 08h00 à 10h00

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première partie

de 08h00 à 10h00

Exercices nationaux

Travail individuel

Pause de 10h00 à 10h10

Exercice 1
PLUS FORT !

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un joueur dispose de n cartes numérotées de 1 à n. Il les mélange puis note dans l'ordre la suite des numéros des cartes obtenue. On appelle *liste* la suite des numéros ainsi observés.
Le nombre n sera appelé *longueur* de la liste.
Par exemple, avec $n = 8$, une liste possible est $L = [2,5,7,6,1,8,4,3]$.
Avec une liste donnée, le joueur marque un point chaque fois que le numéro d'une carte est supérieur à celui de la carte précédente.
Par exemple avec la liste $L = [2,5,7,6,1,8,4,3]$, le joueur marque 3 points.
On appelle *score* le nombre de points marqués par le joueur. Le score précédent est donc 3.

1. Quelques exemples

a. Donner un autre exemple de liste de longueur 8 et de score 3.
b. Donner toutes les listes de longueur 3 possibles ainsi que les scores correspondants.

2. Écrire sur votre copie la syntaxe d'une fonction Python qui, prenant en argument une liste L et sa longueur n, renvoie le score de la liste L.

On revient au cas général ainsi qu'à des considérations théoriques.
3. Démontrer que tout score est compris entre 0 et $n-1$. Donner une liste dont le score vaut 0 et une liste dont le score vaut $n-1$.
4. Soit k un entier compris entre 1 et $n-2$.
a. Démontrer qu'il existe une liste de longueur n et de score k.
b. Peut-on trouver deux listes de longueur n et de score k ?

On note désormais $L_n(s)$ le nombre de listes de longueur n et de score s.
5. Déterminer $L_n(0)$ et $L_n(n-1)$.
6. *Une relation de récurrence*
a. Déterminer $L_3(0), L_3(1)$ et $L_3(2)$. Comment insérer dans la liste $[3,1,2]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score vaut encore 1 ?
b. Comment insérer dans la liste $[3,2,1]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score reste nul ?
c. Vérifier que $L_4(1) = 2L_3(1) + 3L_3(0)$.
d. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$,
$$L_{n+1}(1) = 2L_n(1) + nL_n(0).$$
e. Pour tout n et pour tout entier naturel k non nul, exprimer $L_{n+1}(k)$ à l'aide de $L_n(k)$ et $L_n(k-1)$.
f. Dresser un tableau des valeurs de $L_n(k)$ pour $n \in \{3, 4, 5\}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 2
UNE DESCENTE INFINIE

Dans tout l'exercice, α désigne un entier naturel supérieur ou égal à 4.

On considère l'équation (E) ci-dessous dont l'inconnue est le triplet d'entiers relatifs $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$.

(E) : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3$

Le but de l'exercice est de démontrer que le seul triplet dans $\mathbf{Z}^3$ solution de (E) est $(0,0,0)$.

Partie 1

Soient b et c deux réels. On considère la fonction polynôme P de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $P(x) = x^2 + bx + c$.

Un réel r tel que $P(r) = 0$ est appelé *racine* de P. On suppose dans cette partie que P admet deux racines distinctes, r_1 et r_2. Ainsi, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)$ pour tout réel x.

1. Exprimer b et c en fonction de r_1 et r_2.
2. On suppose ici $b \leq 0$ et $c \geq 0$
   Que peut-on dire du signe de r_1 et r_2 ?

Partie 2

1. ***a.*** On suppose que le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$ est solution de l'équation (E).
   Montrer que $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est aussi solution de l'équation (E).

   b. En déduire que, s'il existe un triplet d'entiers relatifs différent de $(0,0,0)$ solution de l'équation (E), alors il existe un triplet d'entiers naturels différent de $(0,0,0)$ solution de l'équation (E).
2. Si le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$ est solution de l'équation (E), que dire du triplet (x_2, x_1, x_3) ?
3. En déduire que, si l'équation (E) admet une solution dans $\mathbf{Z}^3$ différente du triplet $(0,0,0)$, alors elle admet une solution (x_1, x_2, x_3) dans $\mathbf{N}^3$ différente du triplet $(0,0,0)$ et telle que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Partie 3

On suppose donc dans cette partie qu'il existe un triplet d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3) différent de $(0,0,0)$ solution de (E) et tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. On fixe un tel triplet.

1. Démontrer que $x_1 > 0$.

2. On définit la fonction Q de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par $Q(x) = x^2 - \alpha x_1 x_2 x + x_1^2 + x_2^2$.
Un réel r tel que $Q(r) = 0$ est appelé *racine* de Q.

a. Soit y un réel. Montrer que (x_1, x_2, y) est solution de (E) si, et seulement si, y est une racine de Q.

b. Indiquer une première racine de Q à partir des données de l'énoncé.

c. Vérifier que $Q(x_2) = (3 - \alpha x_1)x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2)$ et en déduire que $Q(x_2) < 0$.

d. Quel est le signe de $Q(0)$?

e. Démontrer que Q a deux racines distinctes : celle donnée précédemment et une autre notée y ; ranger dans l'ordre croissant les nombres $0, x_2$ et x_3 et y et justifier qu'ils sont tous distincts.

f. Montrer que (x_1, x_2, y) est un triplet d'entiers naturels solution de l'équation (E).

3. Que donne le raisonnement de la question 2 en remplaçant le triplet solution (x_1, x_2, x_3) par le triplet constitué de x_1, x_2, y rangés dans l'ordre croissant ?

4. Expliquer comment aboutir à une absurdité et conclure quant aux triplets d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

5. Démontrer le résultat suivant :

« Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha > n \geq 2$. L'équation $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \alpha x_1 \dots x_n$ d'inconnue $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n'admet pas de n-uplet d'entiers relatifs solution autre que $(0,0, \dots ,0)$. »

Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades Nationales de Mathématiques

Académie de Lille

Mercredi 15 mars 2023 de 8h à 12h10

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, séparées d'une pause de dix minutes. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents : 8h et 10h10.**

La première partie, constituée des exercices nationaux, est réalisée individuellement.

À son issue, les copies sont ramassées et une pause de dix minutes est prévue.

La seconde partie, constituée des exercices académiques, est réalisée en binôme.

Énoncés de la seconde partie de 10h10 à 12h10

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Deuxième partie

de 10h10 à 12h10

Exercices académiques

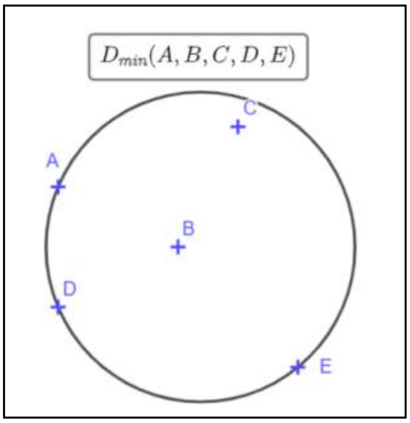
Travail en binôme

Exercice 1
ENCERCLEMENTS

On cherche à déterminer un disque de plus petit rayon contenant plusieurs points tracés dans le plan.

On appellera $D_{min}(A, B, \ldots)$ le disque solution, pour les points tracés A, B, ...

Un point sur le cercle est considéré comme étant contenu dans le disque solution.



Encerclement de deux points distincts du plan

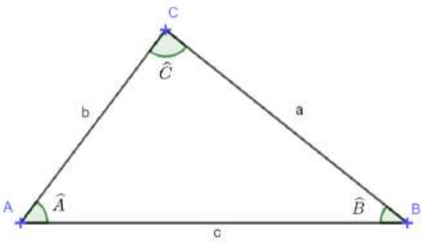
Question 1 :
Etant tracés deux points distincts du plan, **tracer $D_{min}(A, B)$ sur l'ANNEXE 1**.

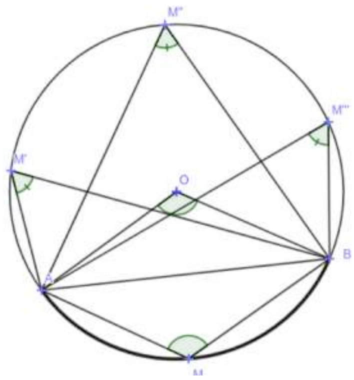
Encerclement de trois points distincts du plan

Partie A : Quelques résultats géométriques

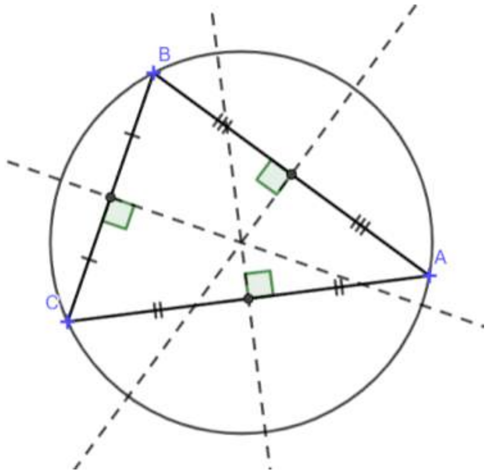
Pour un triangle ABC non plat, on adoptera les notations suivantes :

- $AB = c \quad AC = b \quad BC = a$ pour les longueurs,
- $\widehat{BAC} = \hat{A} \quad \widehat{ABC} = \hat{B} \quad \widehat{BCA} = \hat{C}$ pour les angles,
- $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC de centre O.

<table>
<tr><th>Loi des sinus</th><th>Théorème de l'angle au centre</th></tr>
<tr><td>

$$\frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$$</td>
<td>Pour tout point M d'un cercle de centre O et deux points distincts A et B du cercle, on a :
$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$ ou
$= 180 - \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$
selon l'arc de cercle sur lequel se situe M.
Ainsi, selon le théorème de l'angle au centre, pour tout point M sur un même arc de ce cercle, l'angle $\widehat{AMB}$ reste constant.

</td></tr>
<tr><th colspan="2">Cercle circonscrit à un triangle</th></tr>
<tr><td colspan="2">La médiatrice d'un segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à $[AB]$, passant par son milieu.

Dans un triangle ABC, les médiatrices des 3 côtés sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Le disque circonscrit au triangle ABC est le disque dont le périmètre est le cercle circonscrit au triangle ABC.

</td></tr>
</table>

Question 2 :

2a) A l'aide du théorème de l'angle au centre, justifier que, si $[AB]$ est un diamètre du cercle, alors pour tout point M du cercle, distincts de A et B, AMB est rectangle en M.

2b) Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et deux points distincts A et B du cercle. On considère un point C à l'intérieur du cercle. On prolonge la demi-droite $[AC)$ qui croise le cercle en un point M.
Justifier que : $\widehat{ACB} \geq \widehat{AMB}$.

Question 3 :

Soient ABC un triangle non plat et les propositions suivantes :

P_1 : « [AB] est le plus grand côté du triangle ABC. Autrement dit $AB \geq AC$ et $AB \geq BC$»
P_2 : « $\sin(\hat{C})$ est le plus grand des 3 sinus. Autrement dit, $\sin(\hat{C}) \geq \sin(\hat{A})$ et $\sin(\hat{C}) \geq \sin(\hat{B})$ »
P_3 : « $\hat{C}$ est le plus grand des 3 angles. Autrement dit, $\hat{C} \geq \widehat{A}$ et $\hat{C} \geq \widehat{B}$ ».
A l'aide de la loi des sinus, montrer que ces trois propositions sont équivalentes.

Partie B : Régionnements du point C

On considère 2 points A et B distincts du plan.

Question 4

Construire sur l'ANNEXE 2 la partie Z du plan qui contient tous les points C tels que $[AB]$ soit le plus grand côté du triangle ABC.
Justifier la construction.

Question 5

A partir de cette question, on choisit **un point C dans la partie Z**.

5a) Montrer que $\hat{C} \geq 60°$.

5b) Justifier que si $\hat{C} = 60°$, alors le point C est tel que le triangle ABC soit équilatéral.

Question 6

6a) Justifier que, si $\hat{C} = 90°$, alors C est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

6b) Justifier que, si $\hat{C} > 90°$, alors C est strictement à l'intérieur du cercle de diamètre $[AB]$.

On appellera cette zone la zone 1. Hachurer en noir ou bleu la zone 1 sur l'ANNEXE 2

6c) **Hachurer en rouge ou vert sur l'ANNEXE 2**, l'ensemble des points C tels que $60° \leq \hat{C} \leq 90°$.

On appellera cette zone la zone 2.

Partie C : Encerclements de trois points A, B et C.

On considère 3 points A, B et C distincts du plan, **en notant $[AB]$ le plus grand des 3 segments.**

Question 7 avec A, B et C points alignés :

7a) Justifier que le point C appartient au segment $[AB]$.

7b) Déterminer $D_{min}(A, B, C)$. Justifier la réponse.

Question 8 avec A, B et C points non alignés :

8a) Justifier que C ne peut se situer qu'en zone 1 ou en zone 2.

8b) Si $\hat{C} \geq 90°$, déterminer $D_{min}(A, B, C)$.

8c) Si $60° \leq \hat{C} < 90°$, justifier que $D_{min}(A, B, C)$ n'est pas le disque de diamètre $[AB]$.

A partir du cercle de diamètre $[AB]$, on trace des cercles passant par A et B dont le rayon est de plus en plus grand. Conjecturer $D_{min}(A, B, C)$, dans le cas où $60° \leq \hat{C} < 90°$, puis justifier cette conjecture.

Question 9

Compléter, selon les disques solutions, le(s) position(s) du point C et la/les mesure(s) possible(s) de l'angle $\hat{C}$

$D_{min}(A, B, C)$ est	Lorsque C est placé ….	On a alors l'angle $\hat{C}$…
Le disque de diamètre $[AB]$		
Le disque circonscrit au triangle ABC		
Le disque qui est à la fois circonscrit au triangle ABC et de diamètre $[AB]$		

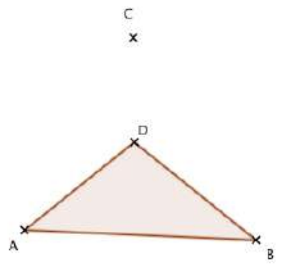
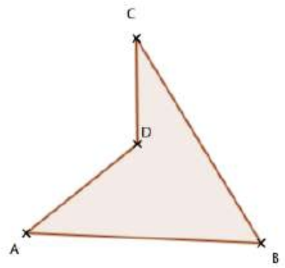
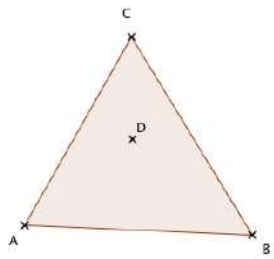
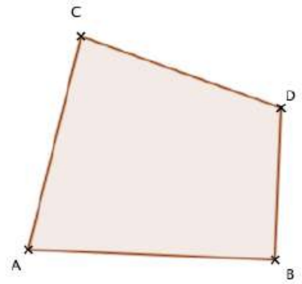
Prolongement des encerclements avec 4 points

On cherche $D_{min}(A, B, C, D)$ dans certaines configurations des quatre points A, B, C, D.

On appelle **polygone « englobant » de 4 points** le polygone :

- Dont les sommets font partie des 4 points.
- Qui a le moins de côtés possibles (3 ou 4).
- Qui contient les 4 points.

Parmi les 4 configurations qui suivent, les polygones tracés ne sont pas les polygones englobants pour les deux premières configurations mais le sont dans les deux dernières configurations.

Configuration 1	Configuration 2	Configuration 3	Configuration 4
			

<u>Question 10</u>

<u>10a)</u> Compléter les 6 figures de l'ANNEXE 3 en respectant les étapes suivantes :

- Tracer le polygone « englobant » les 4 points.
- Nommer A et B les extrémités du plus long des 6 segments qu'on peut tracer à partir des 4 points.
- Nommer C et D les deux autres sommets.
- Tracer, à partir de $[AB]$, la zone 1 et/ou la zone 2 nécessaire(s) contenant les points C et D.
- En laissant apparents les traits de construction, tracer $D_{min}(A, B, C, D)$.

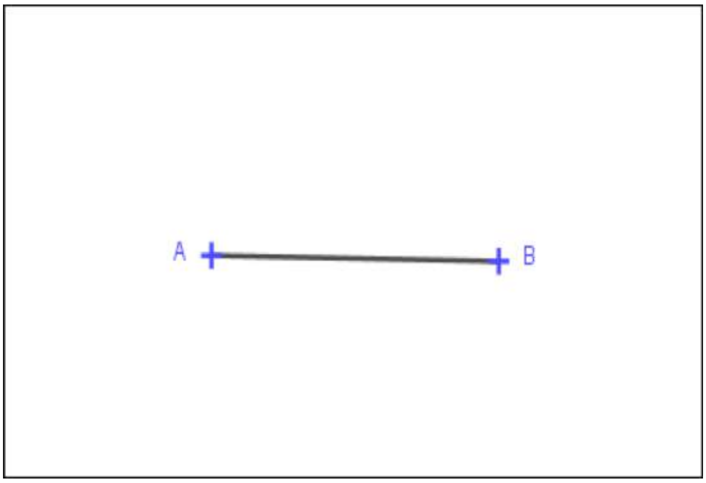
<u>10b)</u> Compléter le tableau suivant concernant les figures 1 à 5 et justifier la réponse de la dernière colonne.

Figure	Polygone englobant à 3 ou 4 sommets	Position de C et D (Zone 1 ou Zone 2)	$D_{min}(A, B, C, D)$.
Figure 1			
Figure 2			
Figure 3			
Figure 4			
Figure 5			

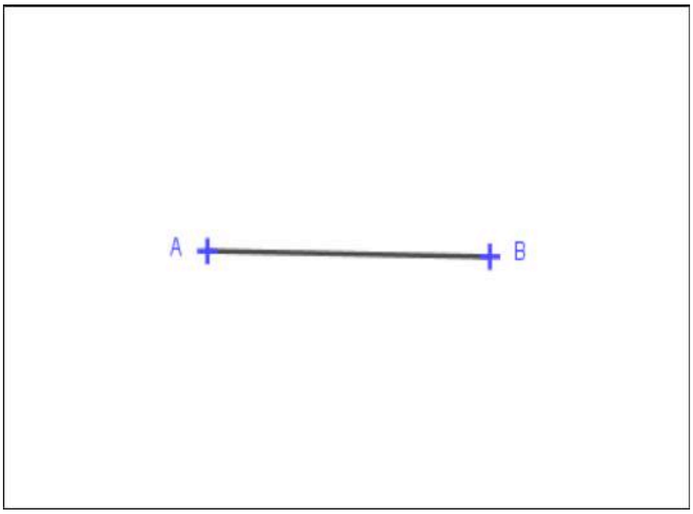
<u>10c)</u> En quoi la figure 6 diffère-t-elle des 5 autres figures ?

<u>10d)</u> Quels sont les cas non gérés par les 6 figures précédentes ?

Exercice 1 : ANNEXE 1



Exercice 1 : ANNEXE 2



Exercice 1 : ANNEXE 3

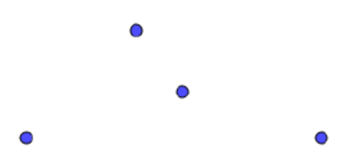


Figure 1

Figure 2

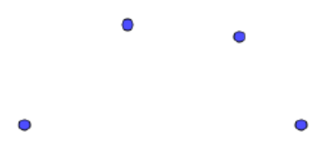


Figure 3

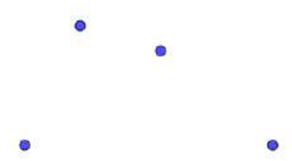


Figure 4

Figure 5

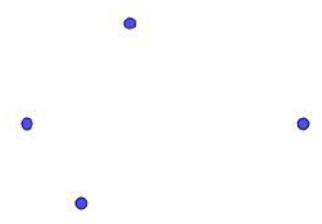


Figure 6

Exercice 2
LE LEMME DE SPERNER

Partie 1 : Portes d'une LIGNE BICOLOREE

Définitions :

- On appelle GRAPHE un ensemble de points du plan, appelés sommets, et de segments, appelés arêtes, reliant certains de ces sommets.

- On appelle GRAPHE COLORE un GRAPHE dont **tous les sommets sont colorés**.

- On appelle LIGNE un GRAPHE constitué de plusieurs **sommets alignés** et des **arêtes les reliant consécutivement** comme suit :

- On appelle LIGNE BICOLOREE toute LIGNE dont on colore les sommets avec **seulement deux couleurs** de telle sorte que les couleurs soient **différentes aux extrémités**.

- On appelle PORTE d'un GRAPHE COLORE une arête reliant **deux sommets de couleurs différentes**.

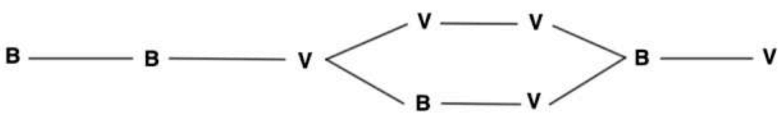
*On choisit 3 « couleurs » **R**ouge (**R**), Vert(**V**) et **B**leu(**B**).*

Question 1

Expliquer pourquoi les GRAPHES suivants ne sont pas des LIGNES BICOLOREES.

GRAPHE 1 :


GRAPHE 2 :


GRAPHE 3 :


Question 2

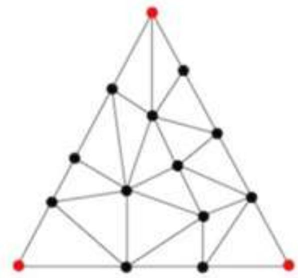
Dessiner trois LIGNES BICOLOREES à plus de 8 sommets et hachurer les arêtes correspondant à des PORTES.

Question 3 : **Lemme de Sperner de dimension 1**

Justifier que toute LIGNE BICOLOREE contient un nombre impair de PORTES.

Partie 2 : COLORATION de SPERNER d'une TRIANGULATION d'un triangle

TRIANGULATION d'un triangle



- ☞ On considère un triangle nommé T.
- ☞ On partitionne l'intérieur du triangle T en un ensemble de PETITS TRIANGLES.
- ☞ L'ensemble des sommets et des côtés de ces PETITS TRIANGLES forment un GRAPHE.

Un tel GRAPHE est appelé TRIANGULATION du triangle T.

COLORATION DE SPERNER d'une TRIANGULATION du triangle T

Avec les 3 couleurs choisies, on colore tous les sommets de T comme suit :

- ☞ On colore chaque sommet de T d'une couleur différente des sommets voisins.
- ☞ Chaque côté du triangle T est une LIGNE BICOLOREE.
- ☞ On colore, à l'intérieur de T, chaque sommet par une des trois couleurs, au hasard.

Un tel GRAPHE COLORE est appelé une COLORATION DE SPERNER

Question 4 :

4a) Procéder à une COLORATION DE SPERNER sur la figure fournie en ANNEXE.

4b) Dans cette figure, hachurer tous les PETITS TRIANGLES dont les 3 sommets sont de couleurs différentes.

Partie 3 : Lemme de SPERNER de dimension 2

Il s'agit de démontrer que pour tout triangle ayant fait l'objet d'une COLORATION DE SPERNER, il existe un PETIT TRIANGLE dont les sommets sont de couleurs différentes.

PARCOURS dans un triangle muni d'une COLORATION DE SPERNER

- Au départ, toutes les PORTES du GRAPHE COLORE sont considérées comme « *ouvertes* ».
- Franchir une PORTE, c'est couper une arête de la TRIANGULATION. Une fois franchie, cette PORTE sera ensuite définitivement « *fermée* ».

- ☞ Un PARCOURS commence à l'extérieur au triangle T.
- ☞ On trace le PARCOURS en forme de ligne, sans lever le crayon.
- ☞ On entre dans le triangle T par une PORTE *ouverte*.
- ☞ Le PARCOURS se poursuit en ne franchissant que des PORTES *ouvertes*.
- ☞ Si le PARCOURS ressort du triangle T, il se poursuit en pénétrant à nouveau dans le triangle T par une PORTE ouverte sur l'un quelconque des trois côtés.
- ☞ Le PARCOURS ne prend fin que lorsqu'il n'y a plus de possibilité de franchir une PORTE *ouverte*.

Question 5 :

5a) Sur la figure en ANNEXE, tracer un PARCOURS en partant du point E donné.

5b) Quelles sont les couleurs des sommets du dernier PETIT TRIANGLE visité par ce PARCOURS ?

Question 6 :

De manière générale, démontrer qu'il est toujours possible de pénétrer à nouveau dans le triangle T une fois que le PARCOURS en est sorti.

Question 7 :

Justifier qu'un PARCOURS prend forcément fin.

Question 8 :

Dans cette question, on se focalise sur les couleurs appliquées aux sommets d'un PETIT TRIANGLE de la TRIANGULATION et leurs effets lors du PARCOURS.

8a) Quel type de PETITS TRIANGLES ne peut pas être pénétré par un PARCOURS ?

8b) Quel type de PETITS TRIANGLES peut être traversé (entrée puis sortie) une et une seule fois par un PARCOURS ?

8c) Quel type de PETITS TRIANGLES peut laisser entrer le PARCOURS et l'empêcher d'en ressortir ?

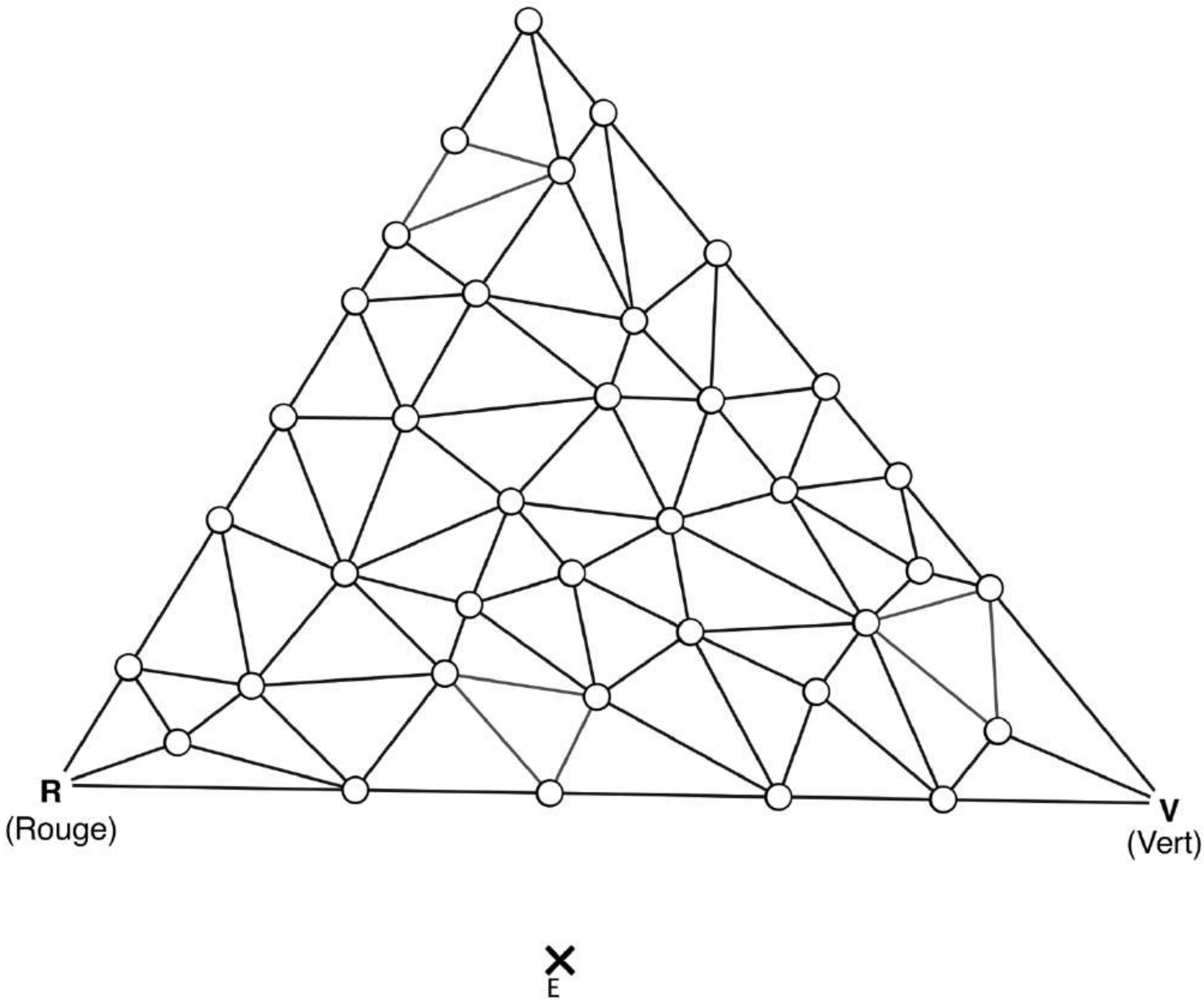
Question 9 :

Des questions précédentes, démontrer le lemme de SPERNER de dimension 2.

Question 10 :

Le lemme de SPERNER en dimension 2 s'applique-t-il sur un carré faisant l'objet d'une TRIANGULATION et d'une COLORATION de SPERNER à trois couleurs ?

Exercice 2 : Annexe



Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades Nationales de Mathématiques

Académie de Lille

Mercredi 15 mars 2023 de 8h à 12h10

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, séparées d'une pause de dix minutes. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents : 8h et 10h10.**

La première partie, constituée des exercices nationaux, est réalisée individuellement.

À son issue, les copies sont ramassées et une pause de dix minutes est prévue.

La seconde partie, constituée des exercices académiques, est réalisée en binôme.

Énoncés de la première partie de 08h00 à 10h00

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première partie

de 08h00 à 10h00

Exercices nationaux

Travail individuel

Pause de 10h00 à 10h10

Exercice 1
PLUS FORT !

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un joueur dispose de n cartes numérotées de 1 à n. Il les mélange puis note dans l'ordre la suite des numéros des cartes obtenue. On appelle *liste* la suite des numéros ainsi observés.
Le nombre n sera appelé *longueur* de la liste.
Par exemple, avec $n = 8$, une liste possible est $L = [2,5,7,6,1,8,4,3]$.
Avec une liste donnée, le joueur marque un point chaque fois que le numéro d'une carte est supérieur à celui de la carte précédente.
Par exemple avec la liste $L = [2,5,7,6,1,8,4,3]$, le joueur marque 3 points.
On appelle *score* le nombre de points marqués par le joueur. Le score précédent est donc 3.

1. Quelques exemples

a. Donner un autre exemple de liste de longueur 8 et de score 3.
b. Donner toutes les listes de longueur 3 possibles ainsi que les scores correspondants.

2. Écrire sur votre copie la syntaxe d'une fonction Python qui, prenant en argument une liste L et sa longueur n, renvoie le score de la liste L.

On revient au cas général ainsi qu'à des considérations théoriques.
3. Démontrer que tout score est compris entre 0 et $n - 1$. Donner une liste dont le score vaut 0 et une liste dont le score vaut $n - 1$.
4. Soit k un entier compris entre 1 et $n - 2$.
a. Démontrer qu'il existe une liste de longueur n et de score k.
b. Peut-on trouver deux listes de longueur n et de score k ?

On note désormais $L_n(s)$ le nombre de listes de longueur n et de score s.
5. Déterminer $L_n(0)$ et $L_n(n - 1)$.
6. *Une relation de récurrence*
a. Déterminer $L_3(0), L_3(1)$ et $L_3(2)$. Comment insérer dans la liste $[3,1,2]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score vaut encore 1 ?
b. Comment insérer dans la liste $[3,2,1]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score reste nul ?
c. Vérifier que $L_4(1) = 2L_3(1) + 3L_3(0)$.
d. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$$L_{n+1}(1) = 2L_n(1) + nL_n(0).$$

e. Pour tout n et pour tout entier naturel k non nul, exprimer $L_{n+1}(k)$ à l'aide de $L_n(k)$ et $L_n(k-1)$.
f. Dresser un tableau des valeurs de $L_n(k)$ pour $n \in \{3, 4, 5\}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 2
CODES DÉTECTEURS ET CORRECTEURS

Question préliminaire

1. Soient a et b deux nombres entiers.
Montrer que le nombre $a + b$ est pair si, et seulement si, a et b sont de la même parité.

Codage d'un message

Un *message* est ici un nombre M codé sous la forme d'un quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) où x_1, x_2, x_3 et x_4 sont des « bits », c'est-à-dire des nombres ne pouvant valoir que 0 ou 1. Le nombre M que représente le quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4), appelé aussi demi-octet *d'information*, vaut par définition :

$$M = x_1 + 2\times x_2 + 4\times x_3 + 8\times x_4$$

Par exemple, le code $(0,0,1,1)$ représente le nombre $M = 12$ puisque $12 = 0 + 2\times 0 + 4\times 1 + 8\times 1$.

2. ***a.*** Quel est le message M que code le quadruplet $(1,0,0,1)$?
b. Trouver un code qui représente $M = 10$. Trouver un code qui représente $M = 15$.
c. Peut-on trouver un code pour représenter $M = 20$?
d. Quels sont les différents messages possibles ?

Un message est parfois altéré (on dit aussi « corrompu ») lors de sa transmission du fait d'un matériel défectueux ou de signaux parasites. Des erreurs modifient des bits, un 0 se transformant en 1 ou un 1 se transformant en 0. Aussi des techniques permettant de détecter et de corriger ces anomalies ont-elles été mises au point. Ceci fait l'objet de la suite.

Codage d'un message avec protection contre les erreurs

3. ***Principe du bit de parité***

Le code (x_1, x_2, x_3, x_4) est transformé en le quintuplet (x_1, x_2, x_3, x_4, y), dont le dernier bit y, dit de *parité*, vaut 0 si la somme $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ est paire, et 1 si elle est impaire. C'est ce quintuplet qui est transmis, il représente le même message M que le code (x_1, x_2, x_3, x_4), à savoir $M = x_1 + 2\times x_2 + 4\times x_3 + 8\times x_4$. Les bits dits d'information demeurent x_1, x_2, x_3, x_4 et le bit de parité, y, est transmis avec les plus grandes précautions.
Par exemple, pour transmettre le nombre $M = 12$ correspondant à $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ et $x_4 = 1$, on calcule d'abord $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, qui est pair ; on pose donc $y = 0$ et on émet le quintuplet $(0,0,1,1,0)$.

a. Quel est le bit y de parité associé au quadruplet $(1,0,0,1)$ codant le nombre $M = 9$ à l'émission ?
b. On reçoit le quintuplet $(1,1,0,1,0)$ dont on suppose le bit de parité (le cinquième, donc) fiable. Justifier que l'information véhiculée par le code a été corrompue.
c. Si on est sûr du bit de parité, peut-on détecter une altération, et peut-on la localiser
- dans le cas où un seul bit d'information est faux à l'arrivée ?
- dans le cas où deux bits d'information sont faux à l'arrivée ?

4. ***Principe des bits de contrôle***

Le code (x_1, x_2, x_3, x_4) est transformé en l'heptuplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$, où
$y_1 = 0$ si $x_1 + x_2 + x_3$ est pair, $y_1 = 1$ sinon ; $y_2 = 0$ si $x_2 + x_3 + x_4$ est pair, $y_2 = 1$ sinon ; $y_3 = 0$ si $x_1 + x_3 + x_4$ est pair, $y_3 = 1$ sinon. Les bits dits d'information demeurent x_1, x_2, x_3, x_4.
L'heptuplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$ code toujours le message $M = x_1 + 2\times x_2 + 4\times x_3 + 8\times x_4$.

a. Quels sont les bits y_1, y_2, y_3, dits de *contrôle*, associés au quadruplet $(1,0,0,1)$ codant le nombre $M = 9$?
b. Pourquoi est-on certain que l'heptuplet reçu $(1,1,0,1,0,0,1)$ résulte d'une altération de transmission dans le cas où on est sûr des bits de contrôle ?
c. Si on est sûr de la justesse des bits de contrôle, dans l'hypothèse où exactement un des quatre bits d'information est erroné, pourquoi peut-on détecter qu'il y a eu une altération et pourquoi peut-on la localiser (et donc la corriger) ? Peut-on détecter l'erreur quand exactement deux des quatre bits d'information sont erronés ?

Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades Nationales de Mathématiques

Académie de Lille

Mercredi 15 mars 2023 de 8h à 12h10

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, séparées d'une pause de dix minutes. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents : 8h et 10h10.**

La première partie, constituée des exercices nationaux, est réalisée individuellement.

À son issue, les copies sont ramassées et une pause de dix minutes est prévue.

La seconde partie, constituée des exercices académiques, est réalisée en binôme.

Énoncés de la seconde partie de 10h10 à 12h10

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Deuxième partie

de 10h10 à 12h10

Exercices académiques

Travail en binôme

Exercice 1
LE LEMME DE SPERNER

Partie 1 : Portes d'une LIGNE BICOLOREE

Définitions :

- On appelle GRAPHE un ensemble de points du plan, appelés sommets, et de segments, appelés arêtes, reliant certains de ces sommets.
- On appelle GRAPHE COLORE un GRAPHE dont **tous les sommets sont colorés**.
- On appelle LIGNE un GRAPHE constitué de plusieurs **sommets alignés** et des **arêtes les reliant consécutivement** comme suit :

- On appelle LIGNE BICOLOREE toute LIGNE dont on colore les sommets avec **seulement deux couleurs** de telle sorte que les couleurs soient **différentes aux extrémités**.
- On appelle PORTE d'un GRAPHE COLORE une arête reliant **deux sommets de couleurs différentes**.

*On choisit 3 « couleurs » **R**ouge (**R**), Vert(**V**) et **B**leu(**B**).*

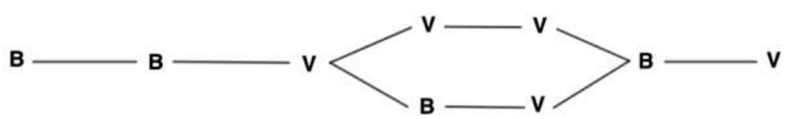
Question 1

Expliquer pourquoi les GRAPHES suivants ne sont pas des LIGNES BICOLOREES.

GRAPHE 1 :

GRAPHE 2 :

GRAPHE 3 :



Question 2

Dessiner trois LIGNES BICOLOREES à plus de 8 sommets et hachurer les arêtes correspondant à des PORTES.

Question 3 : **Lemme de Sperner de dimension 1**

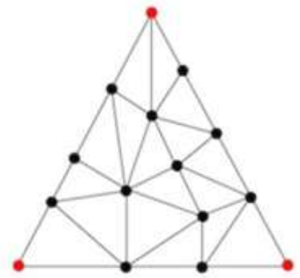
Justifier que toute LIGNE BICOLOREE contient un nombre impair de PORTES.

Partie 2 : COLORATION de SPERNER d'une TRIANGULATION d'un triangle

TRIANGULATION d'un triangle

- ☞ On considère un triangle nommé T.
- ☞ On partitionne l'intérieur du triangle T en un ensemble de PETITS TRIANGLES.
- ☞ L'ensemble des sommets et des côtés de ces PETITS TRIANGLES forment un GRAPHE.

Un tel GRAPHE est appelé TRIANGULATION du triangle T.



COLORATION DE SPERNER d'une TRIANGULATION du triangle T

Avec les 3 couleurs choisies, on colore tous les sommets de T comme suit :

- ☞ On colore chaque sommet de T d'une couleur différente des sommets voisins.
- ☞ Chaque côté du triangle T est une LIGNE BICOLOREE.
- ☞ On colore, à l'intérieur de T, chaque sommet par une des trois couleurs, au hasard.

Un tel GRAPHE COLORE est appelé une COLORATION DE SPERNER

Question 4 :

4a) Procéder à une COLORATION DE SPERNER sur la figure fournie en ANNEXE.

4b) Dans cette figure, hachurer tous les PETITS TRIANGLES dont les 3 sommets sont de couleurs différentes.

Partie 3 : Lemme de SPERNER de dimension 2

Il s'agit de démontrer que pour tout triangle ayant fait l'objet d'une COLORATION DE SPERNER, il existe un PETIT TRIANGLE dont les sommets sont de couleurs différentes.

PARCOURS dans un triangle muni d'une COLORATION DE SPERNER

- o Au départ, toutes les PORTES du GRAPHE COLORE sont considérées comme « *ouvertes* ».
- o Franchir une PORTE, c'est couper une arête de la TRIANGULATION. Une fois franchie, cette PORTE sera ensuite définitivement « *fermée* ».

- ☞ Un PARCOURS commence à l'extérieur au triangle T.
- ☞ On trace le PARCOURS en forme de ligne, sans lever le crayon.
- ☞ On entre dans le triangle T par une PORTE *ouverte*.
- ☞ Le PARCOURS se poursuit en ne franchissant que des PORTES *ouvertes*.
- ☞ Si le PARCOURS ressort du triangle T, il se poursuit en pénétrant à nouveau dans le triangle T par une PORTE ouverte sur l'un quelconque des trois côtés.
- ☞ Le PARCOURS ne prend fin que lorsqu'il n'y a plus de possibilité de franchir une PORTE *ouverte*.

Question 5 :

5a) Sur la figure en ANNEXE, tracer un PARCOURS en partant du point E donné.

5b) Quelles sont les couleurs des sommets du dernier PETIT TRIANGLE visité par ce PARCOURS ?

Question 6 :

De manière générale, démontrer qu'il est toujours possible de pénétrer à nouveau dans le triangle T une fois que le PARCOURS en est sorti.

Question 7 :

Justifier qu'un PARCOURS prend forcément fin.

Question 8 :

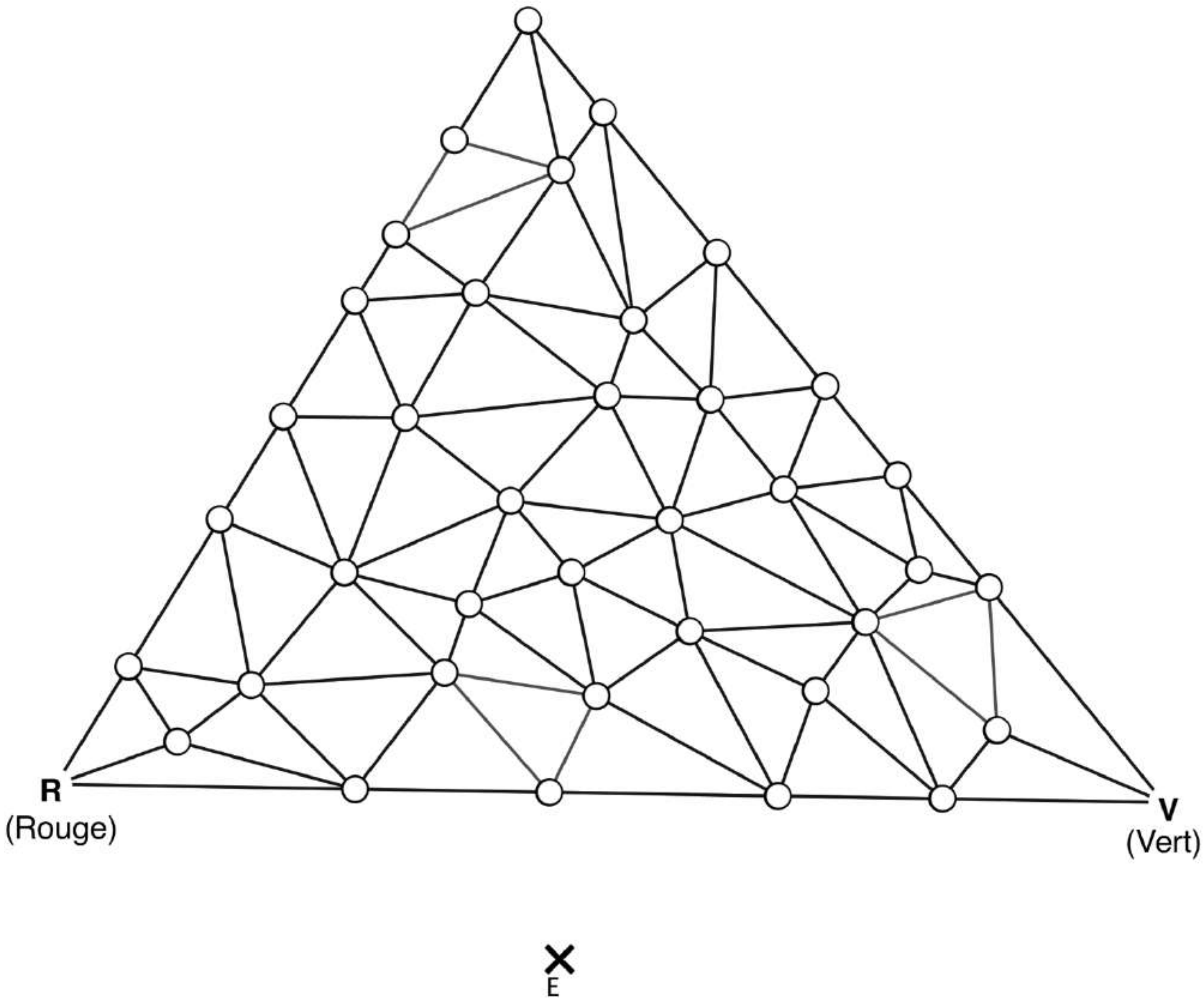
Dans cette question, on se focalise sur les couleurs appliquées aux sommets d'un PETIT TRIANGLE de la TRIANGULATION et leurs effets lors du PARCOURS.

8a) Quel type de PETITS TRIANGLES ne peut pas être pénétré par un PARCOURS ?

8b) Quel type de PETITS TRIANGLES peut être traversé (entrée puis sortie) une et une seule fois par un PARCOURS ?

8c) Quel type de PETITS TRIANGLES peut laisser entrer le PARCOURS et l'empêcher d'en ressortir ?

Exercice 1 : ANNEXE

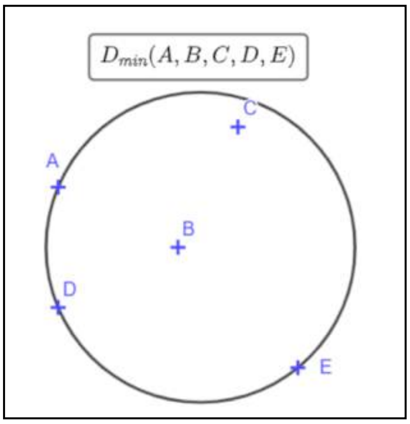


Exercice 2
ENCERCLEMENTS

On cherche à déterminer un disque de plus petit rayon contenant plusieurs points tracés dans le plan.

On appellera $D_{min}(A, B, \dots)$ le disque solution, pour les points tracés A, B, ...

Un point sur le cercle est considéré comme étant contenu dans le disque solution.



Encerclement de deux points distincts du plan

Question 1 :

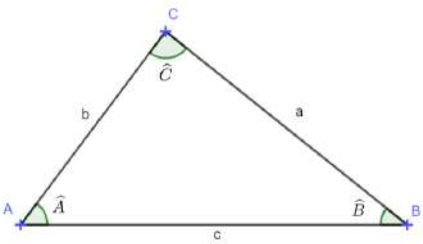
Etant tracés deux points distincts du plan, **tracer $D_{min}(A, B)$ sur l'ANNEXE 1**.

Encerclement de trois points distincts du plan

Partie A : Quelques résultats géométriques

Pour un triangle ABC non plat, on adoptera les notations suivantes :

- $AB = c \quad AC = b \quad BC = a$ pour les longueurs,
- $\widehat{BAC} = \hat{A} \quad \widehat{ABC} = \hat{B} \quad \widehat{BCA} = \hat{C}$ pour les angles,
- $\boldsymbol{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC de centre O.

<table>
<tr><th>Loi des sinus</th><th>Théorème de l'angle au centre</th></tr>
<tr><td>


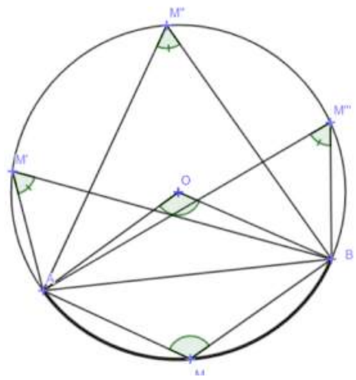
$$\frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$$
</td><td>
Pour tout point M d'un cercle de centre O et deux points distincts A et B du cercle, on a :

$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$ ou

$= 180 - \frac{1}{2} \times \widehat{AOB}$

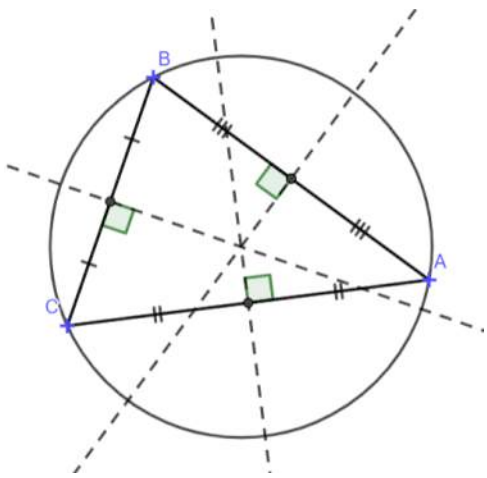
selon l'arc de cercle sur lequel se situe M.

Ainsi, selon le théorème de l'angle au centre, pour tout point M sur un même arc de ce cercle, l'angle $\widehat{AMB}$ reste constant.


</td></tr>
<tr><th colspan="2">Cercle circonscrit à un triangle</th></tr>
<tr><td colspan="2">
La médiatrice d'un segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à $[AB]$, passant par son milieu.

Dans un triangle ABC, les médiatrices des 3 côtés sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

Le disque circonscrit au triangle ABC est le disque dont le périmètre est le cercle circonscrit au triangle ABC.



</td></tr>
</table>

Question 2 :

2a) A l'aide du théorème de l'angle au centre, justifier que, si $[AB]$ est un diamètre du cercle, alors pour tout point M du cercle, distincts de A et B, AMB est rectangle en M.

2b) Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et deux points distincts A et B du cercle. On considère un point C à l'intérieur du cercle. On prolonge la demi-droite $[AC)$ qui croise le cercle en un point M.

Justifier que : $\widehat{ACB} \geq \widehat{AMB}$.

Question 3 :

Soient ABC un triangle non plat et les propositions suivantes :

P_1 : « [AB] est le plus grand côté du triangle ABC. Autrement dit $AB \geq AC$ et $AB \geq BC$»
P_2 : « $\sin(\hat{C})$ est le plus grand des 3 sinus. Autrement dit, $\sin(\hat{C}) \geq \sin(\hat{A})$ et $\sin(\hat{C}) \geq \sin(\hat{B})$ »
P_3 : « $\hat{C}$ est le plus grand des 3 angles. Autrement dit, $\hat{C} \geq \widehat{A}$ et $\hat{C} \geq \widehat{B}$ ».
A l'aide de la loi des sinus, montrer que ces trois propositions sont équivalentes.

Partie B : Régionnements du point C
On considère 2 points A et B distincts du plan.

Question 4

Construire sur l'ANNEXE 2 la partie Z du plan qui contient tous les points C tels que $[AB]$ soit le plus grand côté du triangle ABC.
Justifier la construction.

Question 5

A partir de cette question, on choisit **un point C dans la partie Z**.

5a) Montrer que $\hat{C} \geq 60°$.

5b) Justifier que si $\hat{C} = 60°$, alors le point C est tel que le triangle ABC soit équilatéral.

Question 6

6a) Justifier que, si $\hat{C} = 90°$, alors C est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

6b) Justifier que, si $\hat{C} > 90°$, alors C est strictement à l'intérieur du cercle de diamètre $[AB]$.

On appellera cette zone la zone 1. Hachurer en noir ou bleu la zone 1 sur l'ANNEXE 2

6c) **Hachurer en rouge ou vert sur l'ANNEXE 2**, l'ensemble des points C tels que $60° \leq \hat{C} \leq 90°$.

On appellera cette zone la zone 2.

Partie C : Encerclements de trois points A, B et C.

On considère 3 points A, B et C distincts du plan, **en notant $[AB]$ le plus grand des 3 segments.**

Question 7 avec A, B et C points alignés :

7a) Justifier que le point C appartient au segment $[AB]$.

7b) Déterminer $D_{min}(A, B, C)$. Justifier la réponse.

Question 8 avec A, B et C points non alignés :

8a) Justifier que C ne peut se situer qu'en zone 1 ou en zone 2.

8b) Si $\hat{C} \geq 90°$, déterminer $D_{min}(A, B, C)$.

8c) Si $60° \leq \hat{C} < 90°$, justifier que $D_{min}(A, B, C)$ n'est pas le disque de diamètre $[AB]$.

A partir du cercle de diamètre $[AB]$, on trace des cercles passant par A et B dont le rayon est de plus en plus grand. Conjecturer $D_{min}(A, B, C)$, dans le cas où $60° \leq \hat{C} < 90°$, puis justifier cette conjecture.

Question 9

Compléter, selon les disques solutions, le(s) position(s) du point C et la/les mesure(s) possible(s) de l'angle $\hat{C}$

$D_{min}(A, B, C)$ est	Lorsque C est placé ….	On a alors l'angle $\hat{C}$…
Le disque de diamètre $[AB]$		
Le disque circonscrit au triangle ABC		
Le disque qui est à la fois circonscrit au triangle ABC et de diamètre $[AB]$		

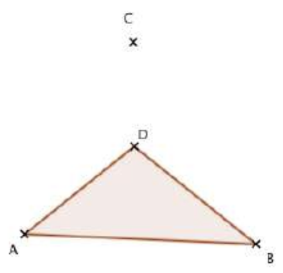
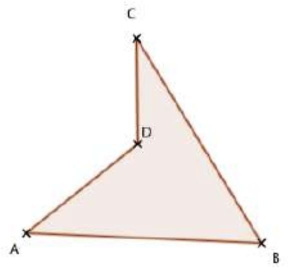
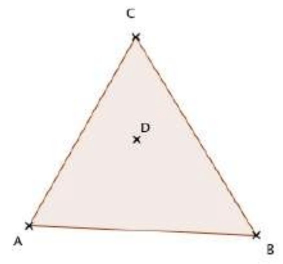
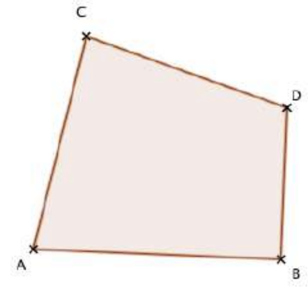
Prolongement des encerclements avec 4 points

On cherche $D_{min}(A, B, C, D)$ dans certaines configurations des quatre points A, B, C, D.

On appelle **polygone « englobant » de 4 points** le polygone :

- Dont les sommets font partie des 4 points.
- Qui a le moins de côtés possibles (3 ou 4).
- Qui contient les 4 points.

Parmi les 4 configurations qui suivent, les polygones tracés ne sont pas les polygones englobants pour les deux premières configurations mais le sont dans les deux dernières configurations.

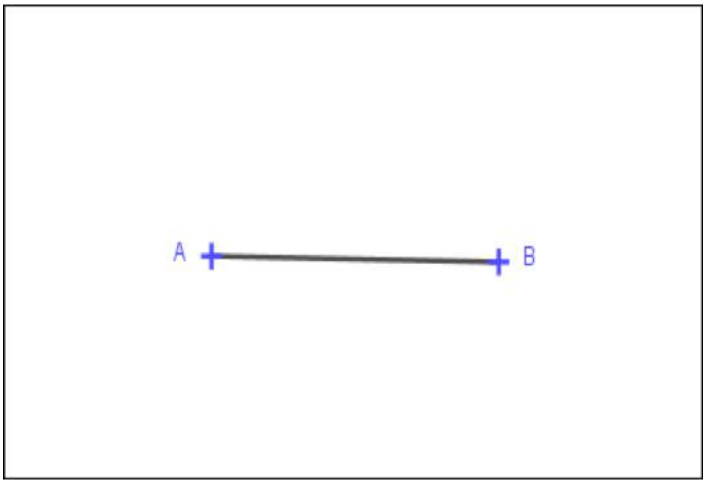
Configuration 1	Configuration 2	Configuration 3	Configuration 4
			

Question 10

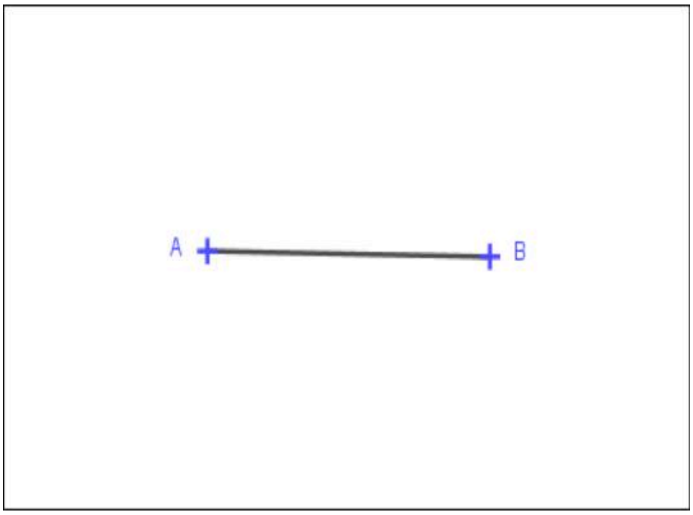
Compléter les 6 figures de l'ANNEXE 3 en respectant les étapes suivantes :

- Tracer le polygone « englobant » les 4 points.
- Nommer A et B les extrémités du plus long des 6 segments qu'on peut tracer à partir des 4 points.
- Nommer C et D les deux autres sommets.
- Tracer, à partir de $[AB]$, la zone 1 et/ou la zone 2 nécessaire(s) contenant les points C et D.
- En laissant apparents les traits de construction, tracer $D_{min}(A, B, C, D)$.

Exercice 2 : ANNEXE 1



Exercice 2 : ANNEXE 2



Exercice 2 : ANNEXE 3

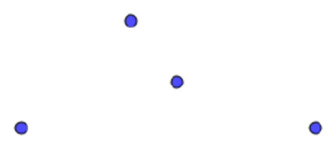
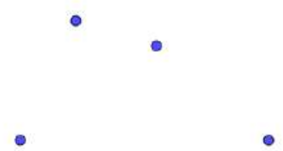
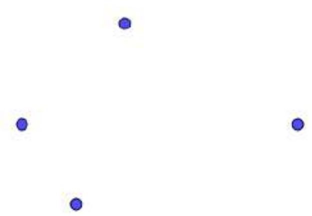


Figure 1	Figure 2
	
Figure 3	Figure 4
	
Figure 5	Figure 6