OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE LILLE
2022

SUJET DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

académie Lille

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

Olympiades Nationales de Mathématiques

Académie de Lille

Mercredi 09 mars 2022 de 8h à 12h10

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, séparées d'une pause de dix minutes. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents : 8h et 10h10.**

La première partie, constituée des exercices nationaux, est réalisée individuellement.

À son issue, les copies sont ramassées et une pause de dix minutes est prévue.

La seconde partie, constituée des exercices académiques, est réalisée en binôme.

Énoncés de la première partie de 08h00 à 10h00

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première partie

de 08h00 à 10h00

Exercices nationaux

Travail individuel

Pause de 10h00 à 10h10

EXERCICE 1

ETIQUETAGE GRACIEUX D'UNE FIGURE

On considère un ensemble fini de points. On relie certains de ces points par des segments. L'ensemble ainsi constitué est appelé *figure.*

On effectue l'*étiquetage* d'une *figure* comportant n segments en associant à chaque point un entier compris entre 0 et n, ces entiers étant distincts deux à deux.

On attribue à chaque segment la valeur absolue de la différence des entiers associés à ses extrémités. Cet entier est appelé *pondération* du segment.

On dit que l'*étiquetage* de la figure est *gracieux* si les n pondérations obtenues sur les segments sont exactement tous les entiers de 1 à n.

On donne ci-dessous un exemple d'*étiquetage gracieux* d'une figure comportant 6 points et 7 segments :

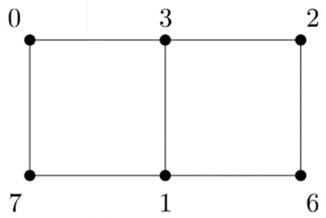


Figure étiquetée

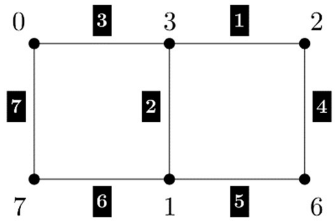
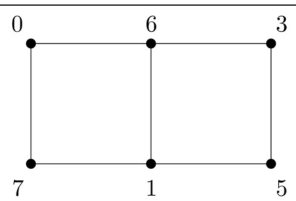
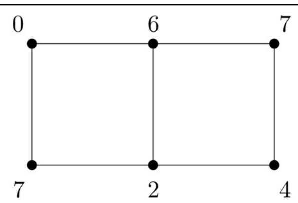


Figure étiquetée avec indication des pondérations

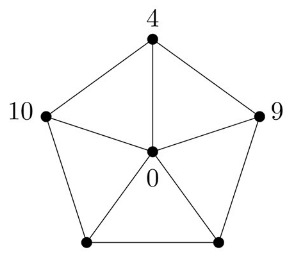
Partie A : Des exemples

1. Pour chacune des figures ci-contre, préciser si l'étiquetage proposé est un étiquetage gracieux.





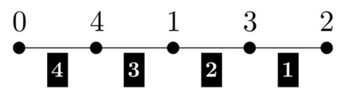
2. Compléter l'étiquetage de la figure ci-contre pour obtenir un étiquetage gracieux.



Partie B : Cas des lignes

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la figure L_n constituée de $n+1$ points alignés et des n segments joignant des points voisins.

On propose ci-contre l'étiquetage gracieux des points de la figure L_4.



1. Montrer qu'on peut trouver un étiquetage gracieux pour chacune des figures L_5, L_6 et L_7.
2. On admet qu'on peut trouver un étiquetage gracieux pour la figure L_{2022} tel que le point le plus à gauche soit étiqueté avec 0. Décrire cet étiquetage.

Partie C : Cas des polygones

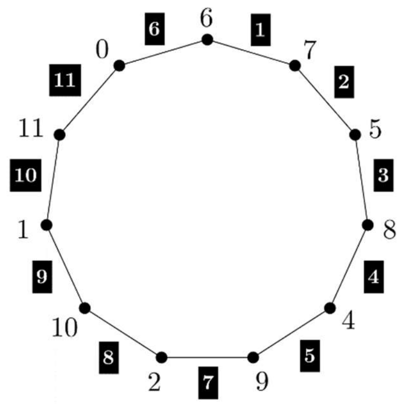
1. Montrer que tout triangle et tout quadrilatère peut être muni d'un étiquetage gracieux.

2. On a représenté ci-contre un polygone à 11 côtés, muni d'un étiquetage gracieux.
En déduire un étiquetage gracieux pour un polygone à 12 côtés.

3. Déterminer la parité de la pondération d'un segment lorsque les étiquettes de ses extrémités sont :

a. de parités différentes ;
b. de même parité.

4. En déduire qu'on ne peut pas trouver un étiquetage gracieux pour les pentagones.



Partie D : Une très grande figure

On note K_{2022} la figure constituée de 2022 points telle que tout couple de points est relié par un unique segment.

1. Montrer que K_{2022} est constituée de 2 043 231 segments.
2. On suppose qu'il existe d'un étiquetage gracieux de K_{2022}.
   - **a.** Quel est le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair ?
   - **b.** On note p le nombre de points étiquetés avec un nombre pair. Exprimer en fonction de p le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair.
3. Montrer finalement que K_{2022} ne peut pas être muni d'un étiquetage gracieux.

EXERCICE 2

NOMBRES SECTIONNABLES

Partie A : Nombres sectionnables unitaires

On dit qu'un nombre entier est *sectionnable unitaire* s'il est supérieur ou égal à 3 et s'il peut s'écrire sous la forme : $1+2+3+\cdots+p$ où p est un entier supérieur ou égal à 2.
Par exemple, 3 et 10 sont des nombres sectionnables unitaires car $3 = 1 + 2$ et $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.
On rappelle que pour tout entier naturel n non nul : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

1. **a.** Montrer que 21 et 136 sont sectionnables unitaires.
b. Est-ce que 1850 est sectionnable unitaire ?

2. Soit a un entier supérieur ou égal à 3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a pour que a soit un entier sectionnable unitaire.

Partie B : Nombres sectionnables

On dit qu'un nombre entier est *sectionnable* s'il peut s'écrire comme la somme d'au moins deux nombres entiers strictement positifs consécutifs.

Par exemple, 24 et 25 sont sectionnables car $24 = 7 + 8 + 9$ et $25 = 12 + 13$.
En revanche, 4 n'est pas sectionnable car $1+2<4<1+2+3$ et $2+3>4$.

1. Justifier que 9 et 15 sont sectionnables mais que 16 ne l'est pas.

2. Démontrer que si un entier est impair et supérieur ou égal à 3, alors il est sectionnable.

3. Soit k et q des entiers naturels avec $k \geqslant 2$. On pose $S=(q+1)+(q+2)+\cdots+(q+k)$.
Montrer que $2S = k(k+1+2q)$.

4. Montrer qu'une puissance de 2 n'est pas sectionnable.

5. On s'intéresse aux entiers strictement positifs pairs qui ne sont pas des puissances de 2.
Soit n un tel entier. On admet qu'il existe un unique couple d'entiers (r,m) où m est un entier impair supérieur ou égal à 3 et r un entier supérieur ou égal à 1, tel que $n=2^r\times m$.

a. Déterminer r et m quand $n=56$. En déduire que 56 est sectionnable et l'écrire comme somme d'entiers consécutifs.

b. Montrer que 44 est sectionnable.

c. Montrer que tout nombre entier positif pair qui n'est pas une puissance de 2 est sectionnable.

6. Déduire de ce qui précède l'ensemble des nombres sectionnables.

Partie C : Nombres uniquement sectionnables

On dit qu'un nombre entier est *uniquement sectionnable* lorsqu'il peut s’écrire de façon unique comme somme d’au moins deux nombres entiers strictement positifs consécutifs.

1. Montrer que le nombre 13 est uniquement sectionnable. Le nombre 25 est-il uniquement sectionnable ?

2. a. Soit un entier n qui est la somme de k entiers strictement positifs consécutifs, avec $k \geqslant 3$.
On peut donc écrire n sous la forme $n = (q+1) + (q+2) + \cdots + (q+k)$, avec q entier positif ou nul.
Montrer que n n’est pas un nombre premier.

b. En déduire que tout nombre premier supérieur ou égal à 3 est uniquement sectionnable.

Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades Nationales de Mathématiques

Académie de Lille

Mercredi 09 mars 2022 de 8h à 12h10

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, séparées d'une pause de dix minutes. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents : 8h et 10h10.**

La première partie, constituée des exercices nationaux, est réalisée individuellement.

À son issue, les copies sont ramassées et une pause de dix minutes est prévue.

La seconde partie, constituée des exercices académiques, est réalisée en binôme.

Énoncés de la seconde partie de 10h10 à 12h10

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Seconde partie

de 10h10 à 12h10

Exercices académiques

Travail en binôme

EXERCICE 1

LES NOMBRES AUTOMORPHES

Dans cet exercice, les parties sont dépendantes.

Définitions et exemples

Définitions

- Un **chiffre** est un élément de la liste suivante : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Un **nombre entier** est composé d'un ou plusieurs chiffres.
- On dit qu'un nombre entier $N \geq 2$ est un **NOMBRE AUTOMORPHE** lorsque l'écriture de son carré se termine par lui-même.

Remarque : 0 et 1 ne sont donc pas des nombres automorphes.

Quelques exemples

☞ 76 est un nombre automorphe à 2 chiffres car **76**^{2} = 5 7**76**.

☞ 376 un nombre automorphe à 3 chiffres car **376**^{2} = 141 **376.**

☞ 212 890 625 est automorphe à 9 chiffres puisque son carré est égal à 45 322 418 **212 890 625.**

Partie I – Liste de nombres automorphes

Dans cette partie, on se propose d'établir une propriété arithmétique des nombres automorphes qui permettra de les lister à l'aide d'un algorithme.

1. Déterminer tous les nombres automorphes à 1 chiffre.

2. 25, 125 et 625 sont-ils des nombres automorphes ? Si oui, à combien de chiffres ?

3. a) Pour déterminer tous les nombres automorphes à 2 chiffres, combien de nombres entiers faudrait-il tester ?

   b) Même question avec les nombres à 3 chiffres.

4. a) Soit N un entier à k chiffres, montrer l'équivalence suivante :
   N est un nombre automorphe   si et seulement si $N(N-1)$ est multiple de 10^k.

   b) Reprendre la question **2.** en utilisant cette propriété.

5. Dans cette question, k désignera un entier supérieur ou égal à 1.
   On donne un script en langage Python qui a pour but de lister tous les nombres automorphes à k chiffres.

   a) Compléter la ligne 5 du script suivant pour qu'il teste tous les entiers à k chiffres :

```python
1 from math import*
2
3 def automorphe(k):
4     liste=[]
5     for n in range(...... , ....... ,1):
6         if n*(n-1)%(10**k)==0:
7             liste.append(n)
8     return liste
```

Notes

- La commande « *liste.append(élément)* » ajoute « élément » en fin de liste.
- La commande « *a%b* » renvoie le reste de la division euclidienne de l'entier *a* par l'entier *b*.

b) Exprimer, en fonction de k, la quantité de nombres testés dans la boucle « for » de la ligne 5.

Remarques

- « automorphe(3) » renvoie la liste [376 , 625].
- Avec une calculatrice, « automorphe(6) » renvoie la liste en 8 secondes.
  « automorphe(8) » renvoie, quant à elle, la liste en plus de 13 minutes !

Partie II – Accélération algorithmique

Dans cette partie, on suppose que N est un nombre automorphe à k chiffres.

On va chercher à améliorer le temps d'exécution du programme précédent.

1. a) Justifier que $N(N-1)$ est un multiple de $2^k \times 5^k$, de 2^k et de 5^k.
b) Justifier que si N est multiple de 2, alors $N-1$ ne l'est pas et réciproquement.
c) Déduire que, soit N est multiple de 2^k, soit $N-1$ est multiple de 2^k.

2. Par un raisonnement analogue, on admet que :

soit N est multiple de 5^k, soit $N-1$, est multiple de 5^k.

a) Dans le tableau 1, compléter par vraie ou fausse les propositions sur $N-1$.
b) Compléter les propositions du tableau 2.

	Tableau 1							**Tableau 2**	
Cas possibles		**est multiple de 2^k**	**est multiple de 5^k**		**est multiple de 2^k**	**est multiple de 5^k**	**donc**	**N est multiple de**	**$N-1$ est multiple de**
Cas 1	N	*Vraie*	*Vraie*	$N-1$	*Fausse*	*Fausse*	$\Rightarrow$	$2^k \times 5^k$	
Cas 2	N	*Vraie*	*Fausse*	$N-1$			$\Rightarrow$		
Cas 3	N	*Fausse*	*Vraie*	$N-1$			$\Rightarrow$		
Cas 4	N	*Fausse*	*Fausse*	$N-1$			$\Rightarrow$		

3. **Etude des cas :**
   a) **Cas 1 et 4.**
   Montrer que les cas où N ou $N-1$ est un multiple de 10^k ne sont pas possibles.
   b) **Cas 2 et 3.**
   Finalement, quelles sont les seules valeurs de N à tester ?

4. En déduire ce qui doit être modifié dans le script de la question **5. Partie I** pour réduire le nombre de tests.

Remarque : Avec une telle modification, « automorphe(8) » renvoie la liste en 2 secondes !

Partie III – Une approche différente et optimale

Pour étendre la définition de nombre automorphe à k chiffres, on décide de faire évoluer l'écriture des nombres
à k chiffres en acceptant qu'ils puissent commencer par un ou plusieurs 0 ce qui permet une nouvelle exploitation informatique.

Exemples

- 15 est un nombre à 2 chiffres, 015 est un nombre à 3 chiffres, 0015 est un nombre à 4 chiffres …
- 25 est un nombre automorphe à 2 chiffres car **25**^{2} = 6**25 qui se termine par 25.**
- 09376 est un nombre automorphe à 5 chiffres car **09376**^{2} = 879**09376 qui se termine par 09376.**

Contre-exemples

- 025 n'est pas un nombre automorphe à 3 chiffres car 0**25**^{2} = 6**25 ne se termine pas par 025.**
- 0025 n'est pas un nombre automorphe à 4 chiffres car : 00**25**^{2} = 6**25 ne se termine pas par 0025.**

1. **Recherche de quelques nombres automorphes.**
   a) Les nombres 6 et 06 sont-ils automorphes respectivement à 1 et 2 chiffres ?
   b) Les nombres 625, 0625 et 00625 sont-ils automorphes respectivement à 3, 4 et 5 chiffres ?

On suppose $k \geq 1$ et on considère un nombre N_k dont les k chiffres de droite à gauche sont $c_1, c_2, c_3 \ldots, c_k$.

2. **Raccourcissement d'un nombre automorphe**.

On notera $N_k = \overline{c_k \ldots\ c_3c_2c_1}$ et on considère le nombre $N_{k+1} = \overline{c_{k+1}c_k \ldots c_3c_2c_1}$.

a) Justifier que $N_{k+1} = N_k + c_{k+1} \times 10^k$.
b) Montrer que si N_{k+1} est automorphe alors N_k est aussi automorphe.
c) En déduire que $c_1 = 5$ ou 6.

3. Allongement d’un nombre automorphe.

On choisit un nombre N_k automorphe et on décide d’allonger par la gauche son écriture en lui ajoutant un chiffre.

On note M_{k+1} le prolongé de N_k et d le chiffre ajouté à gauche c’est-à-dire : $M_{k+1} = \overline{d\ c_k \ldots\ c_3 c_2 c_1}$.

On note c, le $(k+1)^{ième}$ chiffre de ${N_k}^2$ en partant de la droite c’est-à-dire : ${N_k}^2 = \overline{\ldots c\ c_k \ldots\ c_3 c_2 c_1}$.

a) 76 est un nombre automorphe qu’on décide d’allonger par la gauche.
Exemple : 076 est un prolongé de 76.
Parmi les 10 nombres à 3 chiffres que l’on peut ainsi obtenir, lister ceux automorphes à 3 chiffres.

b) Même question avec le nombre 25.

c) ***Cas où $c_1 = 5$.***
Justifier que la seule possibilité pour que M_{k+1} soit automorphe est de choisir $d = c$.

d) ***Cas où $c_1 = 6$.***
Justifier qu’il n’existe qu’un choix possible pour d qui rende M_{k+1} automorphe.
On donnera alors ce choix lorsque $c = 0$ et celui lorsque $c \neq 0$.

e) Combien d’entiers faut-il tester pour lister les nombres automorphes à k chiffres ?
Lesquels sont à tester ? Lesquels sont automorphes ?

A noter : cette nouvelle approche permet d’établir un petit programme Python qui trouve assez rapidement un nombre automorphe à 1000 chiffres !

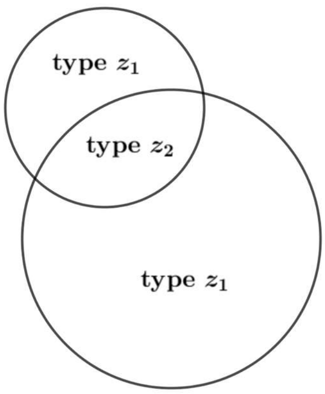
1278125400133690086034889084364023875765936821979626181917833520492704199324875
2378258671482789053448974401426123170356995484194994446106081462072540365599982
7158835603504932779554074196184928095209375302685239093756283914857161236735197
0609224242398777007574955787271559767413458997537695515862718887941516307569668
8163521550488982717043785080284340844126441268218485141577299160344970178923357
9668499144738956600193254582767800061832985442623282725755611073316069701586498
4222291255485729879337147866323172405515756102352543994999345608083801190741530
0600560557448187096927850997759180500754164285277081620113502468060581632761716
7676526093752805684421448619396049983447280672190667041724009423446619781242669
0787535944616698508064636137166384049029219341881909581659524477861846140912878
2984384317032481734288865727376631465191049880294479608146737605039571968937146
7180137561905546299681476426390395300731910816980293850989006216650958086381100
0557423423230896109004106619977392256259918212890625

EXERCICE 2

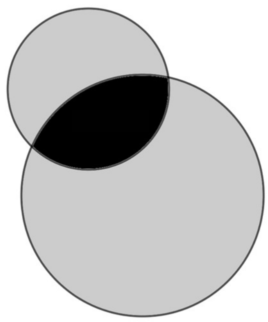
FORMES DISCOLOREES

N désigne un entier supérieur ou égal à 2.
Dans le plan, on trace n cercles de rayons quelconques qui délimitent des zones.
Ces zones se distinguent par le nombre de disques qui les recouvrent.
On les classifie de la manière suivante :

- Les zones de « **type z_1** » : celles recouvertes par un seul disque. On note NZ_1le nombre de zones de ce type.
- Les zones de « **type z_2** » : celles recouvertes par exactement deux disques. On note NZ_2 le nombre de zones de ce type.
- Les zones de « **type z_3 » :** celles recouvertes par exactement trois disques. On note NZ_3 le nombre de zones de ce type.
- Et ainsi de suite…
- Cette classification ne tient pas compte des zones non recouvertes.
- On appelle N le nombre total de zones classifiées : $N = NZ_1 + NZ_2 + \cdots$
- On choisit également d'attribuer une couleur par type de zone :
- Par exemple, dans le cas de 2 cercles, la couleur grise pour les zones de type z_1 et la couleur noire pour la zone de type z_2.



Classification
$NZ_1 = 2$
$NZ_2 = 1$
$NZ_3 = 0$
$N = 3$



Exemple de configuration avec $n = 2$ et des cercles de rayons différents

L'objectif du problème est d'étudier la valeur maximale de N en traçant une configuration à n cercles.

Une telle configuration est alors appelée « **configuration optimale** » et $\boldsymbol{N_{max}}$ la valeur maximale atteinte par N.

Partie I - Configurations pour n=3

1. **a)** Proposer une configuration quelconque avec 3 cercles.
   b) Donner le tableau « Classification » de cette configuration.

2. **a)** Dessiner une configuration colorée avec $NZ_1 = 3, NZ_2 = 3$ et $NZ_3 = 1$.
   b) Dessiner une configuration colorée avec $NZ_1 = 4, NZ_2 = 2$ et $NZ_3 = 1$.
   c) Dessiner une configuration colorée avec $NZ_1 = 2, NZ_2 = 4$ et $NZ_3 = 1$.
   d) Dessiner une configuration colorée avec $NZ_3 = 0$.
   e) Peut-on obtenir une configuration avec $NZ_4 = 1$?

3. Conjecturer la valeur de N_{max} pour $n = 3$.

4. **a)** Les configurations obtenues en 2.a), b), c) sont-elles encore réalisables avec 3 cercles de même rayon ? Si oui, dessiner un exemple.
   b) Cette condition sur l'égalité des rayons modifie-t-elle la valeur conjecturée de N_{max}?

Partie 2 - Configurations pour n quelconque avec des rayons égaux

On choisit d'étudier les configurations qui remplissent les conditions suivantes :
- ☞ Les n cercles ont le même rayon,
- ☞ Le tableau « Classification » est :

Classification
$NZ_1 = n$
$NZ_2 = n$
...
$NZ_{n-1} = n$
$NZ_n = 1$
…
N

1. Que valent les NZ_k pour $k > n$? Justifier.
2. Exprimer en fonction de n le nombre N de zones obtenues en respectant les conditions imposées.
3. <u>On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, il existe une configuration respectant les conditions de la Partie 2.</u>
   Tracer une configuration respectant les conditions imposées pour $n = 4$ puis pour $n = 5$.
4. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $N_{max} \geq \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.
5. Mohamed affirme : « *avec 17 cercles, je peux créer 275 zones colorées* ». Au vu de l'étude précédente, que pensez-vous de cette affirmation ? Argumenter.

Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades Nationales de Mathématiques

Académie de Lille

Mercredi 09 mars 2022 de 8h à 12h10

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, séparées d'une pause de dix minutes. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents : 8h et 10h10.**

La première partie, constituée des exercices nationaux, est réalisée individuellement.

À son issue, les copies sont ramassées et une pause de dix minutes est prévue.

La seconde partie, constituée des exercices académiques, est réalisée en binôme.

Énoncés de la première partie de 08h00 à 10h00

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première partie

de 08h00 à 10h00

Exercices nationaux

Travail individuel

Pause de 10h00 à 10h10

EXERCICE 1

ETIQUETAGE GRACIEUX D'UNE FIGURE

On considère un ensemble fini de points. On relie certains de ces points par des segments. L'ensemble ainsi constitué est appelé *figure.*

On effectue l'*étiquetage* d'une *figure* comportant n segments en associant à chaque point un entier compris entre 0 et n, ces entiers étant distincts deux à deux.

On attribue à chaque segment la valeur absolue de la différence des entiers associés à ses extrémités. Cet entier est appelé *pondération* du segment.

On dit que l'*étiquetage* de la figure est *gracieux* si les n pondérations obtenues sur les segments sont exactement tous les entiers de 1 à n.

On donne ci-dessous un exemple d'*étiquetage gracieux* d'une figure comportant 6 points et 7 segments :

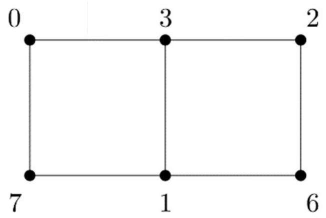


Figure étiquetée

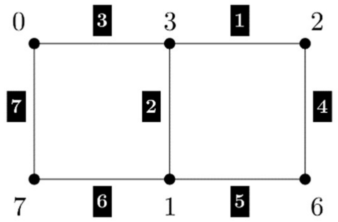
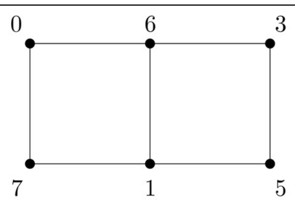
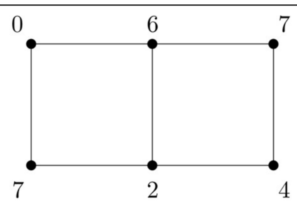


Figure étiquetée avec indication des pondérations

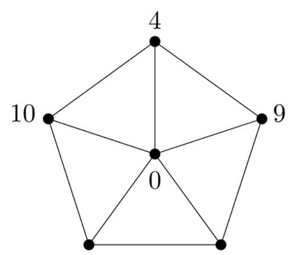
Partie A : Des exemples

1. Pour chacune des figures ci-contre, préciser si l'étiquetage proposé est un étiquetage gracieux.





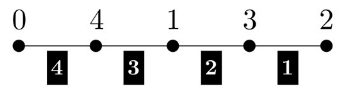
2. Compléter l'étiquetage de la figure ci-contre pour obtenir un étiquetage gracieux.



Partie B : Cas des lignes

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la figure L_n constituée de $n+1$ points alignés et des n segments joignant des points voisins.

On propose ci-contre l'étiquetage gracieux des points de la figure L_4.

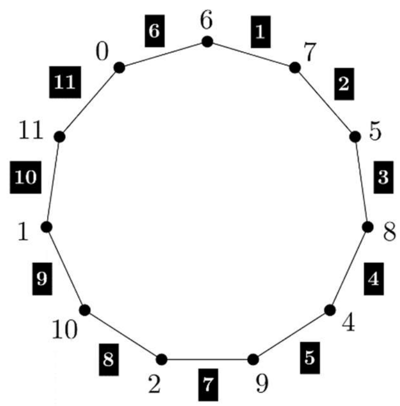


1. Montrer qu'on peut trouver un étiquetage gracieux pour chacune des figures L_5, L_6 et L_7.
2. On admet qu'on peut trouver un étiquetage gracieux pour la figure L_{2022} tel que le point le plus à gauche soit étiqueté avec 0. Décrire cet étiquetage.

Partie C : Cas des polygones

1. Montrer que tout triangle et tout quadrilatère peut être muni d'un étiquetage gracieux.

2. On a représenté ci-contre un polygone à 11 côtés, muni d'un étiquetage gracieux.
En déduire un étiquetage gracieux pour un polygone à 12 côtés.



3. Déterminer la parité de la pondération d'un segment lorsque les étiquettes de ses extrémités sont :
   a. de parités différentes ;
   b. de même parité.

4. En déduire qu'on ne peut pas trouver un étiquetage gracieux pour les pentagones.

Partie D : Une très grande figure

On note K_{2022} la figure constituée de 2022 points telle que tout couple de points est relié par un unique segment.

1. Montrer que K_{2022} est constituée de 2 043 231 segments.
2. On suppose qu'il existe d'un étiquetage gracieux de K_{2022}.
   a. Quel est le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair ?
   b. On note p le nombre de points étiquetés avec un nombre pair. Exprimer en fonction de p le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair.
3. Montrer finalement que K_{2022} ne peut pas être muni d'un étiquetage gracieux.

EXERCICE 2

TROIS

Le protocole suivant permet de construire une suite d'entiers naturels.

Le premier terme de la suite est 4.

Pour passer d'un nombre au suivant, on réalise au choix une des opérations suivantes :

- multiplier le nombre par 3 ;
- multiplier le nombre par 3 puis ajouter 2 ;
- si le nombre est pair, le diviser par 2.

Si une des suites construites de cette façon a pour terme un certain nombre N, on dira que N est *atteignable*.

Par exemple, le nombre 11 est atteignable : on part de 4, on multiplie par 3 pour obtenir 12, on divise deux fois successivement par 2 pour obtenir 3, qu'on multiplie par 3 avant d'ajouter 2.

1. Montrer que tous les entiers naturels compris entre 1 et 12 sont atteignables.

2. Montrer que 2 022 est atteignable.

3. On suppose qu'il existe des entiers non atteignables. On note m le plus petit d'entre eux.

a. Montrer que m n'est pas un multiple de 3.

b. Montrer que $m - 2$ n'est pas un multiple de 3.

c. Montrer que $m - 1$ n'est pas non plus un multiple de 3.

d. Conclure.

Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

Olympiades Nationales de Mathématiques

Académie de Lille

Mercredi 09 mars 2022 de 8h à 12h10

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, séparées d'une pause de dix minutes. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents : 8h et 10h10.**

La première partie, constituée des exercices nationaux, est réalisée individuellement.

À son issue, les copies sont ramassées et une pause de dix minutes est prévue.

La seconde partie, constituée des exercices académiques, est réalisée en binôme.

Énoncés de la seconde partie de 10h10 à 12h10

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Seconde partie

de 10h10 à 12h10

Exercices académiques

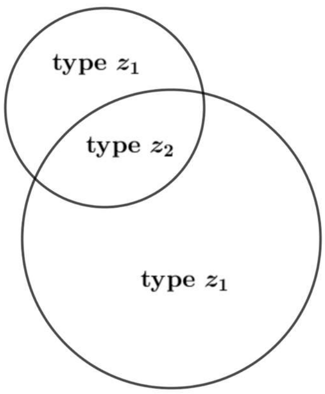
Travail en binôme

EXERCICE 1

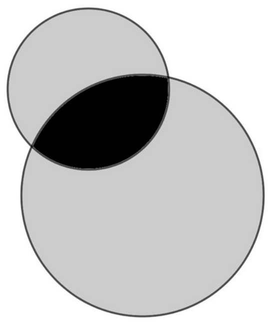
FORMES DISCOLOREES

N désigne un entier supérieur ou égal à 2.
Dans le plan, on trace n cercles de rayons quelconques qui délimitent des zones.
Ces zones se distinguent par le nombre de disques qui les recouvrent.
On les classifie de la manière suivante :

- ☞ Les zones de « **type $\boldsymbol{z_1}$** » : celles recouvertes par un seul disque. On note NZ_1le nombre de zones de ce type.
- ☞ Les zones de « **type $\boldsymbol{z_2}$** » : celles recouvertes par exactement deux disques. On note NZ_2 le nombre de zones de ce type.
- ☞ Les zones de « **type $\boldsymbol{z_3}$ » :** celles recouvertes par exactement trois disques. On note NZ_3 le nombre de zones de ce type.
- ☞ Et ainsi de suite…
- ☞ Cette classification ne tient pas compte des zones non recouvertes.
- ☞ On appelle N le nombre total de zones classifiées : $N = NZ_1 + NZ_2 + \cdots$
- ☞ On choisit également d'attribuer une couleur par type de zone :
- ☞ Par exemple, dans le cas de 2 cercles, la couleur grise pour les zones de type z_1 et la couleur noire pour la zone de type z_2.



Classification
$NZ_1 = 2$
$NZ_2 = 1$
$NZ_3 = 0$
$N = 3$



Exemple de configuration avec $n = 2$ *et des cercles de rayons différents*

L'objectif du problème est d'étudier la valeur maximale de N en traçant une configuration à n cercles.

Une telle configuration est alors appelée « **configuration optimale** » et $\boldsymbol{N_{max}}$ la valeur maximale atteinte par N.

Partie I - Configurations pour n=3

1. **a)** Proposer une configuration quelconque avec 3 cercles.
   b) Donner le tableau « Classification » de cette configuration.

2. **a)** Dessiner une configuration colorée avec $NZ_1 = 3, NZ_2 = 3$ et $NZ_3 = 1$.
   b) Dessiner une configuration colorée avec $NZ_1 = 4, NZ_2 = 2$ et $NZ_3 = 1$.
   c) Dessiner une configuration colorée avec $NZ_1 = 2, NZ_2 = 4$ et $NZ_3 = 1$.
   d) Dessiner une configuration colorée avec $NZ_3 = 0$.
   e) Peut-on obtenir une configuration avec $NZ_4 = 1$?

3. Conjecturer la valeur de N_{max} pour $n = 3$.

4. **a)** Les configurations obtenues en 2.a), b), c) sont-elles encore réalisables avec 3 cercles de même rayon ? Si oui, dessiner un exemple.
   b) Cette condition sur l'égalité des rayons modifie-t-elle la valeur conjecturée de N_{max}?

Partie 2 - Configurations pour n quelconque avec des rayons égaux

On choisit d'étudier les configurations qui remplissent les conditions suivantes :

- ☞ Les n cercles ont le même rayon,
- ☞ Le tableau « Classification » est :

Classification
$NZ_1 = n$
$NZ_2 = n$
...
$NZ_{n-1} = n$
$NZ_n = 1$
...
N

1. Que valent les NZ_k pour $k > n$? Justifier.
2. Exprimer en fonction de n le nombre N de zones obtenues en respectant les conditions imposées.
3. <u>On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, il existe une configuration respectant les conditions de la Partie 2.</u>
   Tracer une configuration respectant les conditions imposées pour $n = 4$ puis pour $n = 5$.
4. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $N_{max} \geq \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.
5. Mohamed affirme : « *avec 17 cercles, je peux créer 275 zones colorées* ». Au vu de l'étude précédente, que pensez-vous de cette affirmation ? Argumenter.

EXERCICE 2

LES NOMBRES AUTOMORPHES

Dans cet exercice, les parties sont dépendantes.

Définitions et exemples

Définitions

- Un **chiffre** est un élément de la liste suivante : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Un **nombre entier** est composé d'un ou plusieurs chiffres.
- On dit qu'un nombre entier $N \geq 2$ est un **NOMBRE AUTOMORPHE** lorsque l'écriture de son carré se termine par lui-même.

Remarque : 0 et 1 ne sont donc pas des nombres automorphes.

Quelques exemples

- ☞ 76 est un nombre automorphe à 2 chiffres car **76**^{2} = 5 7**76**.
- ☞ 376 un nombre automorphe à 3 chiffres car **376**^{2} = 141 **376.**
- ☞ 212 890 625 est automorphe à 9 chiffres puisque son carré est égal à 45 322 418 **212 890 625.**

Partie I – Liste de nombres automorphes

Dans cette partie, on se propose d'établir une propriété arithmétique des nombres automorphes qui permettra de les lister à l'aide d'un algorithme.

1. Déterminer tous les nombres automorphes à 1 chiffre.

2. 25, 125 et 625 sont-ils des nombres automorphes ? Si oui, à combien de chiffres ?

3. a) Pour déterminer tous les nombres automorphes à 2 chiffres, combien de nombres entiers faudrait-il tester ?

b) Même question avec les nombres à 3 chiffres.

4. a) Soit N un entier à k chiffres, montrer l'équivalence suivante :
N *est un nombre automorphe* *si et seulement si* $N(N-1)$ *est multiple de* 10^k.

b) Reprendre la question **2.** en utilisant cette propriété.

5. Dans cette question, k désignera un entier supérieur ou égal à 1.
On donne un script en langage Python qui a pour but de lister tous les nombres automorphes à k chiffres.

Compléter la ligne 5 du script suivant pour qu'il teste tous les entiers à k chiffres :

```
1 from math import*
2
3 def automorphe(k):
4     liste=[]
5     for n in range(...... , ....... ,1):
6         if n*(n-1)%(10**k)==0:
7             liste.append(n)
8     return liste
```

Notes

- La commande « *liste.append(élément)* » ajoute « élément » en fin de liste.
- La commande « *a%b* » renvoie le reste de la division euclidienne de l'entier a par l'entier b.

Remarques

- « automorphe(3) » renvoie la liste [376 , 625].
- Avec une calculatrice, « automorphe(6) » renvoie la liste en 8 secondes.
  « automorphe(8) » renvoie, quant à elle, la liste en plus de 13 minutes !

Partie II – Accélération algorithmique

Dans cette partie, on suppose que N est un nombre automorphe à k chiffres.

On va chercher à améliorer le temps d'exécution du programme précédent.

1. a) Justifier que $N(N-1)$ est un multiple de $2^k \times 5^k$, de 2^k et de 5^k.
b) Justifier que si N est multiple de 2, alors $N-1$ ne l'est pas et réciproquement.
c) Déduire que, soit N est multiple de 2^k, soit $N-1$ est multiple de 2^k.

2. Par un raisonnement analogue, on admet que :
soit N est multiple de 5^k, soit $N-1$, est multiple de 5^k.
a) Dans le tableau 1, compléter par vraie ou fausse les propositions sur $N-1$.
b) Compléter les propositions du tableau 2.

	Tableau 1							**Tableau 2**	
Cas possibles		**est multiple de 2^k**	**est multiple de 5^k**		**est multiple de 2^k**	**est multiple de 5^k**	**donc**	***N* est multiple de**	***N* − 1 est multiple de**
Cas 1	***N***	***Vraie***	***Vraie***	***N* − 1**	***Fausse***	***Fausse***	$\Rightarrow$	$2^k \times 5^k$	
Cas 2	***N***	***Vraie***	***Fausse***	***N* − 1**			$\Rightarrow$		
Cas 3	***N***	***Fausse***	***Vraie***	***N* − 1**			$\Rightarrow$		
Cas 4	***N***	***Fausse***	***Fausse***	***N* − 1**			$\Rightarrow$		

3. **Etude des cas :**

   a) **Cas 1 et 4.**

   Montrer que les cas où N ou $N - 1$ est un multiple de 10^k ne sont pas possibles.

   b) **Cas 2 et 3.**

   Finalement, quelles sont les seules valeurs de N à tester ?

4. En déduire ce qui doit être modifié dans le script de la question **5. Partie I** pour réduire le nombre de tests.

<u>*Remarque :*</u> Avec une telle modification, « automorphe(8) » renvoie la liste en 2 secondes !