OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE LILLE 2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

21^{e} OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Exercice 3 : Philuménistie

1) De plaque en plaque…

a) $T_3 = 19$

b) Voir l'annexe. On obtient : $T_4 = 31$.

c) Pour tout entier $n \geq 1$, $T_n = T_{n-1} + 3 \times n$

Algorithme en langage naturel

```
Algorithme ALGO1
Fonction NTC( k : entier naturel ) :
Début
    L ⟵ []
    T ⟵ 1
    Pour i Variant de 0 à k Faire
        T ⟵ T + 3 × i
        Ajouter T à la liste L
    Fin du Pour
    Retourner L
Fin
```

Programme en Python

```python
import math
#######ALGO1#########
def NTC(k):
        L=[]
    T=1
    for i in range(k):
        T=T+3*i
        L.append(T)
    return(L)
```

2) On considère l'algorithme suivant en langage naturel et sa programmation en Python

a) Ces lignes génèrent la liste des valeurs de T_n pour $n \in [\![0;k[\![$

b) Si $k = 5$, l'algorithme renvoie la liste [1, 4, 10, 19, 31]

c) $n = 36$ (Voir annexe)

(i) $T_{36} = 1999$ est le premier T_n se terminant par 3 chiffres identiques.

(ii) $T_{12} + T_{34} = 235 + 1786 = 2021$.

3) On admet que, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

a) Pour tout entier $n \geq 1$, $T_n = T_{n-1} + 3 \times n$ donc

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = T_0 + 3 \times 1 \\ T_2 = T_1 + 3 \times 2 \\ T_3 = T_2 + 3 \times 3 \\ \ldots \\ T_n = T_{n-1} + 3n \end{array}\right\} Donc\ T_n = T_0 + 3 \times S_n = 1 + 3S_n$$

b) On a donc $T_n = 1 + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n^2 + 3n + 2}{2}$.

c) Pour réaliser la plaque 100, il lui faut donc prévoir $T_{100} = 15151$ allumettes.

Partie B – Construction pyramidale en 3D

1) Etude de la conjecture de Leblanc.

a)
$$\left.\begin{array}{l} P_0 = 1 = 7\times 0 + 1 \\ P_1 = 1 + 4 = 5 = \frac{29\times 1 - 19}{2} \\ P_2 = 1 + 4 + 10 = 15 = 7\times 2 + 1 \\ P_3 = 1 + 4 + 10 + 19 = 34 = \frac{29\times 3 - 19}{2} \end{array}\right\}$$
Donc la conjecture est correcte jusque là ...

b)
$$\left.\begin{array}{l} P_4 = 1+4+10+19+31 = 65 \\ \text{et } 7\times 4 + 1 = 29 \\ P_5 = 1+4+10+19+31+46 = 111 \\ \text{et } \dfrac{29\times 5 - 19}{2} = 63 \end{array}\right\}$$
Donc François Pignon ne peut dire :« C'est juste, Leblanc. »

2) Etude de la conjecture de Marlène.

On admet que, pour tout n entier naturel non nul :

$$C_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a)
$$\left.\begin{array}{l} P_0 = 1 = \frac{0*1*2}{2} + 0 + 1 \\ P_1 = 1 + 4 = 5 = \frac{1*2*3}{2} + 1 + 1 \\ P_2 = 1 + 4 + 10 = 15 = \frac{2*3*4}{2} + 2 + 1 \\ P_3 = 1 + 4 + 10 + 19 = 34 = \frac{3*4*5}{2} + 3 + 1 \end{array}\right\}$$
Donc la conjecture est correcte jusque là....

b) D'après la partie A 3)b), on a $T_n = \dfrac{3n^2+3n+2}{2}$ donc $P_n = \dfrac{3}{2}(1^2+2^2+\ldots+n^2) + \dfrac{3}{2}(1+2+\ldots+n) + n + 1$.

Donc $P_n = \dfrac{3}{2}C_n + \dfrac{3}{2}S_n + n + 1$.

c) On a : $P_n = \dfrac{3}{2}C_n + \dfrac{3}{2}S_n + n + 1$ donc $P_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{4} + \dfrac{3n(n+1)}{4} + n + 1$.

Après factorisation par $(n+1)$, on obtient : $P_n = \dfrac{(n+1)\left((2n^2+n)+3n+4\right)}{4} = \dfrac{(n+1)\left(n^2+2n+2\right)}{2}$.

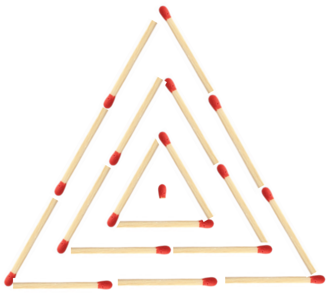
d) François Pignon peut donc affirmer que « Marlène Hatorré a raison. »

3) François Pignon doit prévoir $P_{100} = 515\ 201$ allumettes pour une pyramide constituée des plaques 0 à 100.

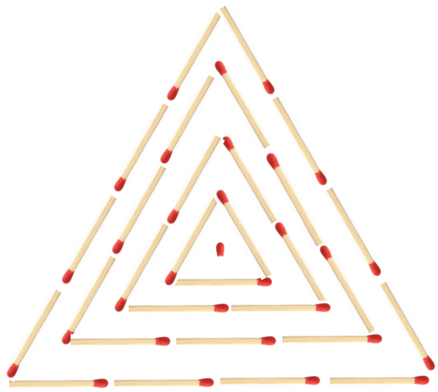
ANNEXE

Partie A 1) b)

Plaque 3



Plaque 4 à compléter



Partie A 2) c)

Compléter le tableau suivant :

On s'arrêtera à la première valeur de T_n suffisante pour répondre aux questions 2)c) (i) et 2)c) (ii)

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
4	10	19	31	46	64	85	109	136	166
T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{17}	T_{18}	T_{19}	T_{20}
199	235	274	316	361	409	460	514	571	631
T_{21}	T_{22}	T_{23}	T_{24}	T_{25}	T_{26}	T_{27}	T_{28}	T_{29}	T_{30}
694	760	829	901	976	1054	1135	1219	1306	1396
T_{31}	T_{32}	T_{33}	T_{34}	T_{35}	T_{36}	T_{37}	T_{38}	T_{39}	T_{40}
1489	1585	1684	1786	1891	1999				
T_{41}	T_{42}	T_{43}	T_{44}	T_{45}	T_{46}	T_{47}	T_{48}	T_{49}	T_{50}
T_{51}	T_{52}	T_{53}	T_{54}	T_{55}	T_{56}	T_{57}	T_{58}	T_{59}	T_{60}

Exercice 4 : Phil-harmonie

Partie A

1. <u>Moyenne harmonique et division harmonique</u>
   a. Moyenne harmonique des nombres 1, 2, 3 et 6
   $MH(1\,;2\,;3\,;6) = \frac{4}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 2$ donc $\boxed{MH(1\,;2\,;3\,;6) = 2}$
   b. 6 en division harmonique ?
   Diviseurs de 6 : {1 ; 2 ; 3 ; 6}
   $MH(1\,;2\,;3\,;6) = 2 \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{\text{6 est en division harmonique}}$
   c. Soit n un entier naturel non nul.
   On pose $D(n) = \{a_1; a_2; \dots; a_k\}$
   Alors $ND(n) = k$
   Et $SID(n) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \frac{1}{a_k}$
   $\boxed{n \text{ en division harmonique}} \Leftrightarrow MH(a_1; a_2; \dots; a_k) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \boxed{\frac{ND(n)}{SID(n)} \in \mathbb{N}}$
2. <u>Soit n un entier naturel non nul</u>
   a. <u>Pour n=25</u>
   $D(25) = \{1\,;5\,;\ 25\}\,; SID(25) = \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{25+5+1}{25} = \frac{SD(25)}{25}$
   Donc $\boxed{25 \times SID\ (25) = SD\ (25)}$

   <u>Pour n=35</u>
   $D(35) = \{1\,;5\,;\ 7\,;\ 35\}\,; SID(35) = \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{35} = \frac{35+7+5+1}{25} = \frac{SD(35)}{35}$
   Donc $\boxed{35 \times SID\ (35) = SD\ (35)}$
   b. <u>Soit n un entier naturel non nul</u> et $D(n) = \{a_1; a_2; \dots; a_k\}$ avec les diviseurs a_i rangés dans l'ordre croissant.
   Sauf, éventuellement pour le diviseur $\sqrt{n}$ s'il est entier, les diviseurs fonctionnent par paires sur lesquelles on a $a_i \times a_{k-i} = n$ d'où $n \times \left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{k-i}}\right) = \frac{n}{a_i} + \frac{n}{a_{k-i}} = a_{k-i} + a_i$.
   Pour le diviseur $\sqrt{n}$ s'il est entier, on a $n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.
   En sommant tous les termes, on obtient $n \times \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_k}\right) = \frac{n}{a_1} + \cdots + \frac{n}{a_k} = a_k + \cdots + a_1$.
   Soit $\boxed{n \times SID(n) = SD(n).}$
   c. <u>Soit n un entier naturel non nul</u>, on en déduit, d'après le 1)c) et le 2)b) que :
   $\boxed{n \text{ en division harmonique}} \Leftrightarrow \frac{ND(n)}{SID(n)} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{ND(n)}{\frac{SD(n)}{n}} = \boxed{\frac{n \times ND(n)}{SD(n)} \in \mathbb{N}}$
   d. <u>28 et 32 en division harmonique ?</u>
   $D(28) = \{1\,;2\,;4\,;7\,;14\,;28\}$
   $ND(28) = 6$
   $n \times ND(28) = 28 \times 6 = 168$
   $SD(28) = 56$
   $\frac{n \times ND(28)}{SD(28)} = \frac{168}{56} = 3 \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{\text{28 est en division harmonique}}$

   $D(32) = \{1\,;2\,;4\,;8\,;16\,;32\}$
   $ND(32) = 6$
   $n \times ND(32) = 32 \times 6 = 192$
   $SD(32) = 63$
   $\frac{n \times ND(32)}{SD(32)} = \frac{192}{63} \notin \mathbb{N}$ donc $\boxed{\text{32 n'est pas en division harmonique}}$

Partie B

1. Pour tout entier naturel n non nul, $p_n = 2^{n+1} - 1$

   Pour $n = 1$, $p_1 = 2^2 - 1 = 3$ est un nombre premier
   Pour $n = 2$, $p_2 = 2^3 - 1 = 7$ est un nombre premier
   Pour $n = 3$ $p_3 = 2^4 - 1 = 15$ n'est pas un nombre premier
   Pour $n = 4$, $p_4 = 2^5 - 1 = 31$ est un nombre premier
   Pour $n = 5$, $p_5 = 2^6 - 1 = 63$ n'est pas un nombre premier

2. Pour tout entier naturel n non nul, $q_n = 2^n p_n$

   Pour $n = 1$, $q_1 = 2^1 p_1 = 6$ $\boxed{\text{est en division harmonique}}$
   Pour $n = 2$, $q_2 = 2^2 p_2 = 28$ $\boxed{\text{est en division harmonique}}$
   Pour $n = 3$, $q_3 = 2^3 p_3 = 120$ $\boxed{\text{n'est pas en division harmonique}}$ car $\frac{120 \times ND(120)}{SD(120)} = \frac{120 \times 16}{360} = \frac{16}{3} \notin \mathbb{N}$
   $D(120) = D(2^3 \times 15) = D(2^3 \times 3 \times 5) = \{1; 2; 4; 8; 3\ ; 6\ ; 12\ ; 24; 5\ ; 10; 20; 40; 15; 30; 60; 120\}$
   Pour $n = 4$, $q_1 = 2^4 p_4 = 496$ $\boxed{\text{est en division harmonique}}$ car $\frac{496 \times ND(496)}{SD(496)} = \frac{496 \times 10}{992} = 5 \in \mathbb{N}$
   $D(496) = D(2^4 \times 31) = \{1; 2; 4; 8; 16\ ; 31\ ; 62\ ;\ 124\ ; 248\ ; 496\}$
   Pour $n = 5$, $q_5 = 2^5 p_5 = 2016$ $\boxed{\text{n'est pas en division harmoniq}}$ car $\frac{2016 \times ND(2016)}{SD(2016)} = \frac{2016 \times 36}{6552} = \frac{144}{13} \notin \mathbb{N}$
   $D(2016) = D(2^5 \times 63) = D(2^5 \times 3^2 \times 7) = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 12; 14; 16; 18; 21; 24;$
   $28; 32; 36; 42; 48; 56; 63; 72; 84; 96; 112; 126; 144; 168; 224; 252; 288; 336; 504; 672; 1008; 2016\}$

3. Conjecture
   Pour tout entier naturel n non nul
   $\boxed{\text{si } p_n = 2^{n+1} - 1 \text{ est un nombre premier alors } q_n = 2^n p_n \text{ est en division harmonique}}$.

Partie C
Soit entier naturel n non nul tel que $p_n = 2^{n+1} - 1$ soit un nombre premier

1. Déterminer $D\ (p_n)$ et $D\ (q_n)$
   $\boxed{D\ (p_n) = \{1; p_n\}}$
   $q_n = 2^n p_n$ Donc $\boxed{D\ (q_n) = \{1; 2; 2^2; 2^3; \dots; 2^n, p_n;\ 2p_n; 2^2 p_n; 2^3 p_n; \dots; 2^n p_n\}}$
   D'où $\boxed{ND(q_n) = 2(n+1)}$
2. Somme des termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1
   $\boxed{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1}$.
3. Montrer que q_n est en division harmonique
   $ND(q_n) = 2(n+1)$

$$SD(q_n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k + p_n \sum_{k=0}^{n} 2^k = (1 + p_n) \sum_{k=0}^{n} 2^k = (1 + p_n)(2^{n+1} - 1) = (1 + p_n) p_n$$

$$\frac{q_n \times ND(q_n)}{SD(q_n)} = \frac{2^n p_n \times 2(n+1)}{(1 + p_n) p_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)}{1 + p_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}} = n + 1 \in \mathbb{N}$$

Conclusion

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{ non nul si } p_n \text{ est un nombre premier alors } q_n \text{ est en division harmonique.}}$