www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE GRENOBLE
2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Exercices Académiques, Grenoble

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

L'épreuve se déroule par groupes de 1 à 4 élèves, chaque groupe rédige une seule copie, sans limitation du nombre de pages.

Il est conseillé aux groupes de candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition, ils pourront être restitués aux candidats le lendemain.

Chaque groupe de candidats traite **deux exercices.**

- Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices 1 et 2.
- Les autres candidats doivent traiter les exercices 1 et 3.

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Les nombres dociles et les nombres rebelles

Un nombre entier N positif est dit **docile** si on peut trouver deux entiers a et b positifs distincts ($a < b$) tels que $a + b = N$ et la somme des chiffres de a est égale à la somme des chiffres de b (on dira alors que (a, b) est une décomposition docile de N). Dans le cas contraire, l'entier N est dit **rebelle**.

Par exemple, 11 est docile car 10+1=11 tandis que 10 est rebelle.

On définit la fonction s qui à tout entier naturel n associe la somme des chiffres de n.
Ainsi, $s(13) = 4$.

1)
- a) Montrer que 2021 est docile en proposant une décomposition docile (a, b) de 2021 où a s'écrit avec un seul chiffre.
- b) Existe-t-il une décomposition docile (a, b) de 2021 où a s'écrit avec deux chiffres ? Même question avec a s'écrivant avec trois chiffres.

2)
- a) Montrer que 15 est docile.
- b) En déduire que 215, 2415 et 1415 le sont aussi.
- c) Démontrer la propriété suivante :

Soit p un entier naturel non nul. Soit d un nombre docile tel que $d < 10^p$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}, 2n \times 10^p + d$ est également docile.

3) Considérons l'algorithme suivant écrit sous la forme d'une fonction en langage Python :

```
def somme(n) :
    r = 0
    while n!=0 :
        r = r + n%10
        n = n//10
    return(r)
```

Rappelons que `x!=y` est vrai si `x` est différent de `y` et faux sinon, `x%y` renvoie le reste de la division euclidienne de `x` par `y` et `x//y` renvoie le quotient de la division euclidienne de `x` par `y`.

a) Que semble faire cette fonction Python ?
b) À partir de cette fonction, créer une fonction `decomposition` telle que l'appel `decomposition(n)` (en langage Python) affiche les différentes décompositions dociles de l'entier `n` si `n` est docile (et n'affiche rien si `n` est rebelle).

4)

a) Montrer que 9 et 999 sont des nombres rebelles.
b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres rebelles. Justifier.

Exercice académique 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Plus longue suite monotone extraite d'une suite finie de nombres

Dans tout cet exercice, on considère des suites finies (c'est-à-dire ayant un nombre fini de termes) de nombres réels.

Préambule.

Définition : *on considère une suite finie de $n+1$ éléments qu'on note S=$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ (on dira que S est de longueur $n+1$). On appelle suite extraite ou sous-suite de S toute suite obtenue de S en ayant éliminé certains éléments.*

Exemple : si $S = [1,5,3,8,3,4]$, alors $[5,3,3,4]$ est une sous-suite de S de longueur 4 (on a éliminé les termes 1 et 8 en conservant l'ordre des indices) mais $[1,4,8]$ n'est pas une sous-suite de S (car on n'a pas conservé l'ordre des indices).

1. Soit $S = [2,4,6,9,3,10,5]$. Donner deux sous-suites (distinctes) de S de longueur 1, puis donner deux sous-suites (distinctes) de S de longueur 5.

Définition : *on considère une suite $U = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_n]$. On dira que la suite U est croissante lorsque $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n$. On dira que la suite U est décroissante lorsque $u_n \leq u_{n-1} \leq u_{n-2} \leq \cdots \leq u_0$. Une suite monotone est soit une suite croissante soit une suite décroissante.*

D'une suite $S = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$, on peut ainsi considérer des sous-suites croissantes de S ou des sous-suites décroissantes de S.

Exemple : d'une suite finie de nombres $S = [4,3,6,1,8,5,10,3,9,7]$, on peut extraire la sous-suite croissante [3,8,10] ou la sous-suite décroissante [4,3,3] ou [10,9,7].

2. Soit $S = [3,3,2,5,4,6,1,10,3]$. Donner une sous-suite de S croissante de longueur 3 puis un sous-suite décroissante de longueur 2 puis de longueur 3.

On va s'intéresser maintenant aux plus longues sous-suites monotones d'une suite. Comme plus longue sous-suite croissante de $S = [4,3,6,1,8,5,10,3,9,7]$, on peut proposer [4,6,8,10] ou [3,6,8,9] qui sont toutes les deux de longueur 4 : on peut en effet vérifier qu'il n'existe pas de sous-suite de S de longueur strictement supérieure à 4. De même, $[8,5,3]$ sera une plus longue sous-suite décroissante.

Dans la partie A, on va démontrer dans un cas particulier un résultat sur la longueur des plus longues sous-suites monotones.

Dans la partie B, on se donnera un algorithme efficace pour trouver ces plus longues sous-suites.

Partie A : un résultat sur les plus longues sous-suites monotones

Une suite de nombres se notera d'une façon générale $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ et on notera $M[i]$ l'une des plus longues sous-suites croissantes se terminant par a_i.

1.

a) On considère la suite S de longueur 10 : $[7,4,1,5,8,2,1,6,9,8]$. Ainsi, on a $M[0] = [7]$.

Donner toutes les plus longues sous-suites croissantes se terminant par $a_7 = 6$.

On pourra donc choisir $M[7] = [1,2,6]$.

b) Soit S la suite de 5 nombres $[10,8,7,5,6]$.

Construire des sous-suites $M[0], M[1], M[2], M[3]$ et $M[4]$ et en déduire la longueur maximale d'une sous-suite croissante de S.

2. Soit $n \in N$ et notons $S = [a_0, a_1, \dots, a_{n^2}]$ une suite de $n^2 + 1$ nombres. On va démontrer le résultat suivant :

Propriété : Dans une suite de $n^2 + 1$ nombres, s'il n'y a pas de sous-suite croissante de longueur $n + 1$, alors on peut trouver une sous-suite décroissante de longueur $n + 1$.

On suppose qu'il n'existe pas de sous-suite croissante de S de longueur $n + 1$.

On rappelle que pour chaque entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant n^2$, on choisit une plus longue sous-suite croissante de S se terminant par a_i et on la note $M[i]$.

a. Justifier que les sous-suites $M[i]$ (avec $0 \leqslant i \leqslant n^2$) ont des longueurs comprises entre 1 et n.

b. On regroupe entre elles les suites M[i] (avec $0 \leqslant i \leqslant n^2$) en fonction de leurs longueurs : on aura donc les sous-suites de longueur 1, de longueur 2, *etc*.

Montrer qu'il existe au moins $n + 1$ sous-suites ayant la même longueur.

c. Soit $b_0, b_1, \dots, b_n$ les nombres qui terminent ces $n + 1$ suites de même longueur ($b_0, b_1, \dots, b_n$ sont pris dans l'ordre d'apparition de la suite S). Justifier que $b_0 > b_1$.

d. De la même façon, on peut montrer que $b_1 > b_2 > b_3 \dots > b_n$. Que peut-on en déduire ?

Partie B : algorithme de recherche d'une plus longue sous-suite croissante (plssc).

Soit $S = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ (n un entier naturel) une suite de n+1 nombres.

On notera encore dans cette partie $M[i]$ une plus longue sous-suite croissante de S se terminant par a_i.

On admettra que l'algorithme suivant permet de calculer $M[i+1]$ connaissant

$M[0], M[1], \dots., M[i]$ pour $i \geqslant 0$.

Algorithme plssc :

- Chaque fois que cela est possible, on complète $M[0], M[1], \dots, M[i]$ avec a_{i+1} et on choisit pour $M[i+1]$ l'une des plus longues sous-suites parmi les suites complétées.
- Si aucune ne peut se prolonger par a_i, on pose $M[i+1] = [a_{i+1}]$

1. Exemple d'exécution :

En Python, on peut représenter les suites par des listes.

Soit la liste de 10 nombres S $= [4,3,6,1,8,5,10,3,9,7]$. $S[0]$ désigne le premier élément de la liste (ici 4) et le dernier se note S[9] et contient la valeur 7.

La fonction `len(S)` donne le nombre d'éléments de `S` (ici `len(S)=10`).

`M` contiendra la liste des sous-suites `M[i]` (`M` est donc une liste de listes).

a) Utiliser l'algorithme précédent pour compléter le tableau d'exécution fourni en annexe (à rendre avec la copie).

b) En déduire une plus longue sous-suite croissante de S.

2. Algorithme plssc en Python

En Python, M[-1] désigne le dernier élément de la liste M.

Compléter le programme Python fourni en annexe (à rendre avec la copie) qui réalise l'algorithme plssc.

Exercice académique 3 (à traiter par les candidats n’ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

La fourmi un peu particulière

Pour un pavé droit donné ABCDEFGH donné, on considère le chemin d’une fourmi un peu particulière : elle raisonne en une dimension et se déplace toujours en ligne droite.

Départ : elle part du sommet A et parcourt la face ADHE en suivant la bissectrice de l’angle $\widehat{DAE}$.

Ensuite, pour déterminer son trajet, la fourmi adopte le principe suivant : elle se déplace en ligne droite et sur chaque face parcourue :

- Soit la fourmi rencontre un sommet. Alors elle s’arrête. Le chemin est terminé.
- Soit la fourmi rencontre une arête en un point qui n’est pas un sommet du pavé, elle poursuit son chemin sur la face adjacente en suivant le même chemin que s’il avait suivi la ligne droite du patron du pavé.

Remarque : le pavé est supposé être en lévitation (il ne repose pas sur le sol et il n’y a donc aucun obstacle pour la fourmi) !

<u>Exemple :</u> la *Figure 1,* qui n’est pas en vraies grandeurs, représente le chemin de cette fourmi sur un pavé droit dont les dimensions sont AB=4, AD=7 et AE=4 (chemin AIJKLA) :

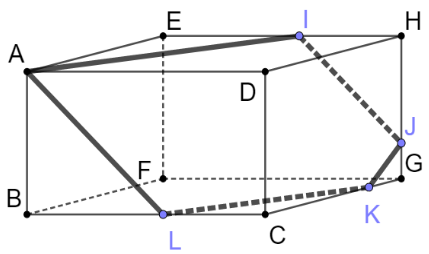
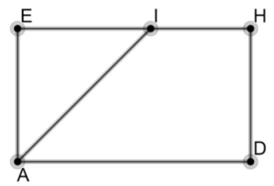
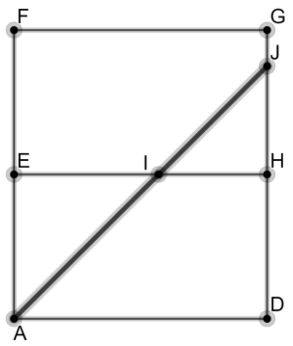
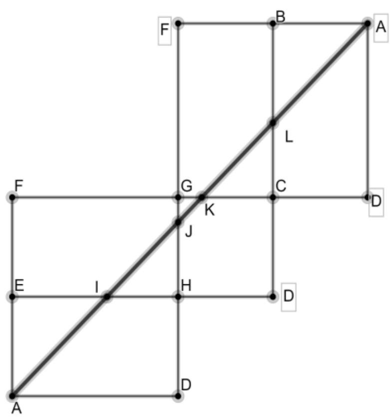


Figure 1

Ci-dessous, on indique comment on a pu déterminer le trajet de la fourmi :







La figure de gauche montre comment placer le point I : le triangle AEI est isocèle rectangle en E. La figure du milieu montre comment placer le point J : le triangle IHJ est isocèle rectangle en H. Enfin, la figure de droite donne le trajet entier lorsqu'on représente un patron, ici incomplet, du pavé.

Dans le cas de l'exemple, la fourmi s'arrête sur le point de départ A (on ne demande pas de le démontrer).

Cet exercice s'intéresse aux différents types de chemins possibles de cette fourmi suivant les dimensions du pavé.

1. Quelques exemples numériques.

   Tracer le chemin pour chacun des pavés droits proposés ci-dessous (le chemin sera tracé avec une couleur différente de celle utilisée pour tracer le pavé droit ; le pavé droit sera toujours orienté comme sur la *Figure 1 :* en particulier, la face représentée devant sera le rectangle ABCD et celle du dessus AEHD).

   a) AB = 6, AD = 3 et AE = 3
   b) AB = 3, AD = 4 et AE = 1
   c) AB = 3, AD = 3 et AE = 2
   d) AB = 2, AD = 4 et AE = 5
   e) AB = 6, AD = 5 et AE = 3

2. Quelques exemples littéraux.

   a) Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur les longueurs AB, AD et AE pour que cette fourmi parte du point A et arrive au point H sans franchir d'arête.

   b) Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur les longueurs AB, AD et AE pour partir du point A et arriver au point G en ne franchissant qu'une seule arête.

   c) Donner les conditions nécessaires et suffisantes sur les longueurs AB, AD et AE pour partir du point A et arriver au point C en ne franchissant que deux arêtes.

3. Que peut-on dire du chemin de la fourmi si AB =2, $\mathrm{AD} = \pi$ et $\mathrm{AE} = \sqrt{2}$?
   On pourra s'aider pour établir une conjecture, **avant de la justifier**, d'une représentation du pavé utilisant des valeurs approchées : par exemple, 3,1 pour π et 1,4 pour $\sqrt{2}$.

4. On considère maintenant que $\mathrm{AB} = \mathrm{AE} = b$ et $\mathrm{AD} = a$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a > b$.

   a) Montrer que si b divise a avec $a = nb$, alors la fourmi s'arrête après avoir traversé $n - 1$ fois des arêtes du pavé.
   b) Montrer que si b ne divise pas a, alors la fourmi s'arrête aussi. Combien de fois a-t-elle traversé des arêtes du pavé (on donnera le résultat en fonction du quotient de la division euclidienne de b par a) ?

Etablissement :	Numéro du groupe :

ANNEXE à rendre avec la copie (exercice 2 pour les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques) :

Exemple d'exécution : (question B 1))

Remarque 1 : pour i=2, on aurait pu choisir M[2]=[4,6].

Remarque 2 : le signe « + » permet de concaténer deux listes : [1,2,3]+[6,8] renvoie [1,2,3,6,8].

Initialisation :	S=[4,3,6,1,8,5,10,3,9,7]	M=[[]]
i=0	M[0]=[4]	M=[[4]]
i=1	M[1]=[3]	M=[[4],[3]]
i=2	M[2]=[3]+[6]=[3,6]	M=[[4],[3],[3,6]]
i=3		
i=4		
i=5		
i=6		
i=7		
i=8		
i=9		

Algorithme en Python à compléter : (question B2)).

```
def plssc(S) :
    M=[[] for i in range(len(S))]      # on prépare une liste vide pour M

    M[0]=[S[0]]                        # cas de base

    for i in range(1,...):
        M[i]=[S[i]]
        for j in range(0,i):
            if M[j][-1]<=...:
                if len(M[j])+1>=len(M[i]):
                    M[i]=M[j]+[S[i]]
    return M
```

Remarque : le signe « + » permet de concaténer deux listes : [1,2,3]+[6,8] renvoie [1,2,3,6,8].