OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

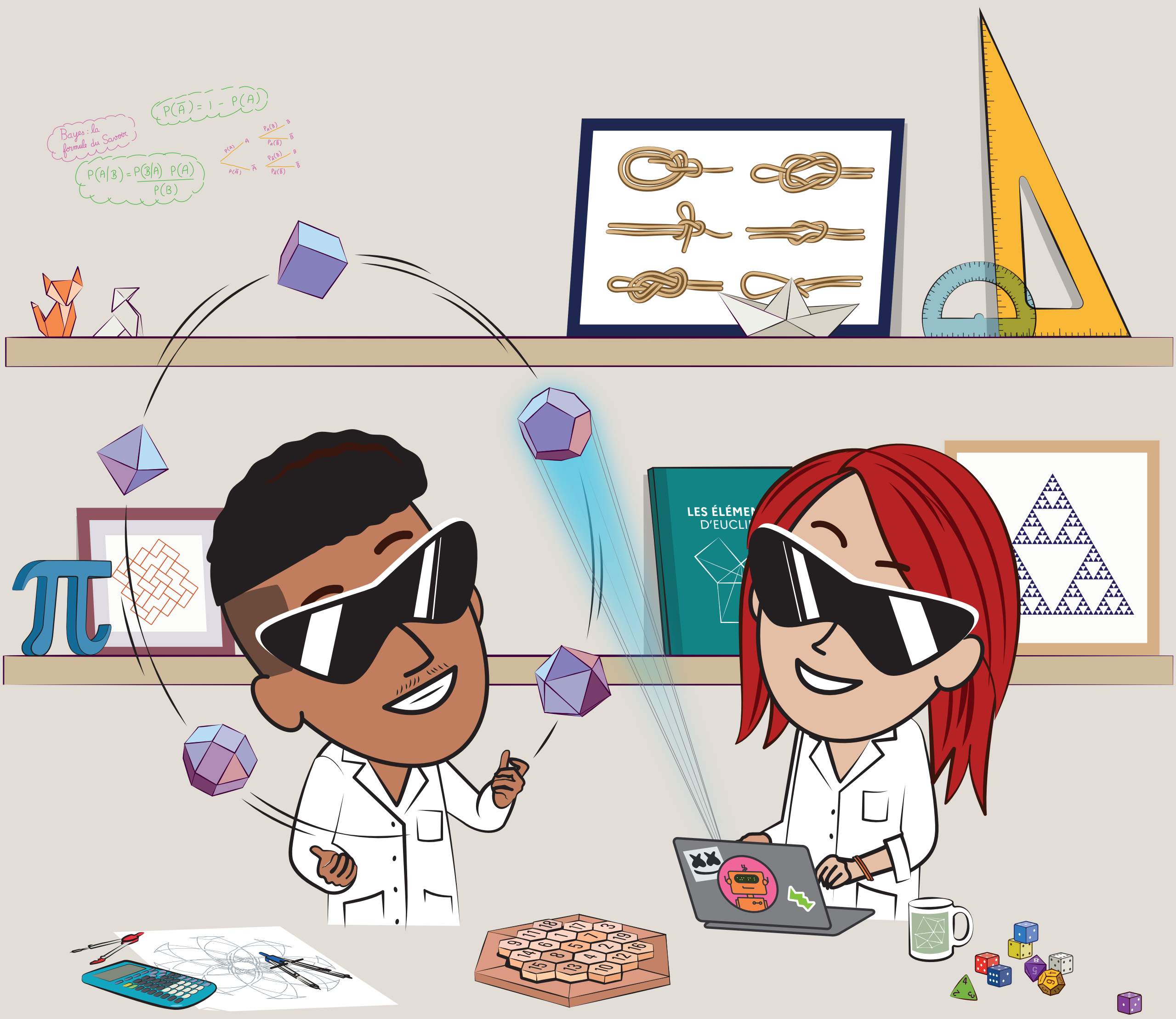
ACADÉMIE DE GRENOBLE
2023

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

Animath CASIO Crédit Mutuel Enseignant Inria Texas Instruments

Olympiades 2023

Élements de correction

Exercice 1 (pour tous)

Partie A : Deux exemples

1.

a) 7 fichiers de poids [10, 25, 40, 50, 60,75, 90] soit un poids total P = 350. On a aussi c =100
(60+25)+(50+40)+90+(10+75) soit 4 dd.

b) On ne peut pas avoir moins car 3 dd n'offrent qu'une capacité de 300 Go.

2. On ne peut stocker que $n \times c$ Go sur n dd de capacité c. Donc $nc \geqslant P$

Partie B Un algorithme d'enregistrement : l'enregistrement séquentiel.

Numéro de lignes	Algorithme sto_seq

```
sto_seq (c , Liste_poids)
    R ← liste vide
    i←0
    R[0] ← Liste_poids[0]
    j←1
    Tant que j < nombre d'éléments de Liste_poids:
        Si Liste_poids[j] + R[i] ≤ c:
            R[i]← Liste_poids[j] + R[i]
        Sinon:
            R[i+1]← Liste_poids[j]
            i←i+1
        j←j+1
    renvoyer nombre d'éléments de R, R
```

Partie C :

1. **1er cas :** on a n fichiers de tailles > $c/2$

Donc $P > n \times \frac{c}{2}$

Donc $n < \frac{2P}{c}$

2. **2ième cas :** On va enregistrer sur n ($n \geqslant 2$) disques durs de poids respectifs $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$

a) $c - P_1$ est l'espace disponible sur le 2ième dd. Si $P_0 \leqslant c - P_1$, on aurait pu regrouper le fichier F1 et le fichier F0 sur le même dd, contraire à l'hypothèse de l'énoncé.

b) Montrons que : $P_0 + (n-1)P_1 < P$

F1 a le poids le plus petit parmi les fichiers F1, .., *Fn-1* : $P = P_0 + (P_1 + \cdots + P_{n-1}) \geq P_0 + (P_1 + P_1 + \cdots + P_1)$ d'où le résultat.

c) D'apèrs a) et b) : $P \geq P_0 + (n-1)P_1 \geq P_0 + (n-1)P_1 > c - P_1 + (n-1)P_1$

Ainsi $P > c + (n-2)P_1$ or $(n-2)P_1 > (n-2) \times \frac{c}{2}$
Donc $P > c + \frac{(n-2)c}{2}$
D'où le résultat.

3. On peut regrouper les fichier ainsi : on regroupe les fichiers de tailles <= à c/2 ensemble ainsi : on remplit le premier dd en parcourant la liste des fichiers de telles tailles jusqu'à ce qu'il n'y ait plus assez de place pour mettre un nouveau fichier. On fait la même chose avec les fichiers restant de taille >=c/2 et ainsi de suite. A la fin de ce processus, on ne peut se retrouver dans un cas avec plus de deux fichiers de taille >= c/2. En effet, sinon, on pourrait toujours les regrouper ensemble dans un nouveau disque dur. Ainsi on se retrouve dans le cas de la question 1 ou 2.

Exercice 2 (spécialité mathématiques)

Partie 1 : bon départ !

1. Alice s'élance perpendiculairement : va-t-elle réussir à atteindre l'autre rive sans se faire rattraper ?

Alice va trois fois plus vite que Bob mais doit faire trois fois plus de distance donc ils arriveront ensemble au point R.

2. Alice pourra-t-elle gagner 110 points ?

Pour cela, Alice doit parcourir $\sqrt{120^2 + 100^2} \approx 156$mètres et Bob doit parcourir 460 mètres et comme il va trois fois plus vite, Alice n'aura le temps de parcourir que $460/3 \approx 153$mètres et ne gagnera pas la course.

3. Combien de points peut-elle gagner au maximum ?

Notons d la distance associée au nombre maximal de points qu'elle peut gagner.
On a $t = \frac{\sqrt{d^2+120^2}}{8} = \frac{360+d}{24}$ce qui peut s'écrire $d(d-90) = 0$
Comme on cherche le nombre maximal de points, il s'agit de 90.
Soit 90+10=100 points

Partie 2 : mauvais départ !

4. Combien de points peut-elle gagner au maximum ?

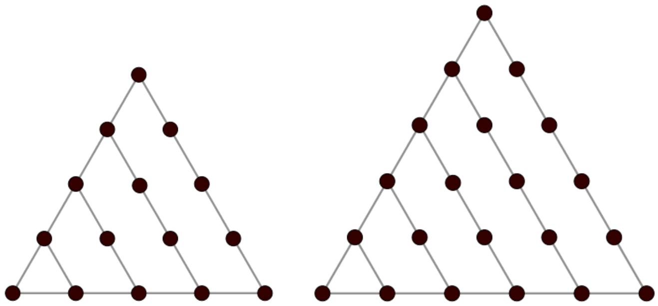
Au bout de dix secondes, Alice a parcouru 80 mètres et se trouve au point T. Pour gagner le nombre maximum de points, elle doit suivre pendant les 10 premières secondes la trajectoire de la question 3. On ainsi SR =90.
On note H le projeté orthogonal de T sur (RS).
D'après le théorème de Thalès (ou des triangles semblables), elle se trouve à TH=56 mètres de la rive et RH=42 m.

En notant d’ la distance SU, on a $t=\frac{\sqrt{d\prime^2+56^2}}{8}=\frac{408+d\prime}{24}$ équation qui s’écrit $d'^2-102d'-17280=0$ qui a une solution réelle positive : 192
Donc Alice va gagner d’+48+10=250 points !

Exercice 3 (non spécialité)

Partie A : étude des nombres triangulaires et pentagonaux :

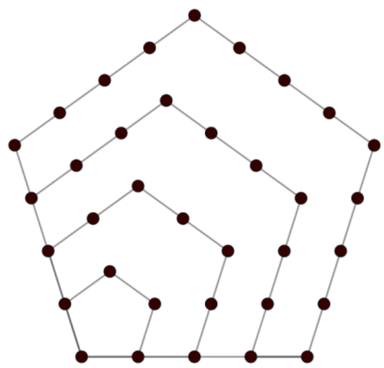
1)



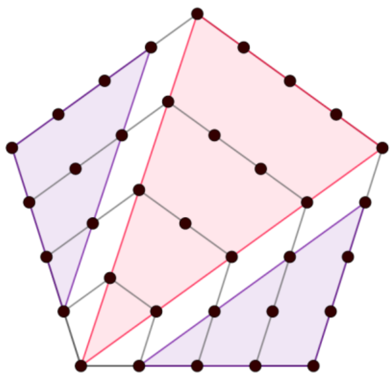
$T_5=15\,;T_6=21$

2)

a)



b)



$P_5=T_5+2T_4.$

3)

a) Formule de la somme des premiers termes d’une suite arithméique

b) $P_n=T_n+2T_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}+2\frac{(n-1)n}{2}=\frac{n}{2}(n+1+2n-2)=\frac{n}{2}\times(3n-1)=\frac{1}{2}n(3n-1)$ pour tout entier naturel n non nul.

c) $\frac{1}{3}T_{3n-1}=\frac{1}{3}\frac{(3n-1)(3n-1+1)}{2}=\frac{1}{3}\frac{(3n-1)\times 3n}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}=P_n.$

4) Par exemple :

Numéro de lignes	Code de la fonction Penta
1	def Penta(n):
2	P = 0.5 * n * (3n-1)

	return P

Ou

Numéro de lignes	Code de la fonction Penta

	def Penta(n):
	    P = Triang(3*n-1)/3
	    return P

Partie B : Utilisation des nombres triangulaires et pentagonaux :

1) a) $220 = 10 + 105 + 105$
   b) $220 = T_9 + T_{10} + T_{15}$
2) a) $P_6 = \frac{6(3\times 6-1)}{2} = 51$; $P_9 = \frac{9(3\times 9-1)}{2} = 117$. $P_2 + P_3 + P_5 + P_6 + P_9 = 5 + 12 + 35 + 51 + 117 = 220$.
   b) $220 = 5 + 70 + 145$

Partie C.

1)$P_n = \frac{1}{2}n(3n-1) \Leftrightarrow 2P_n = 3n^2 - n \Leftrightarrow 3n^2 - n - 2P_n = 0$ où n est un nombre entier naturel non nul.

Donc N est un nombre pentagonal si et seulement si il est solution de l'équation $(E) :\ 3n^2 - n - 2N = 0$ où n est un nombre entier naturel non nul.

2) Soit $x = \frac{1+\sqrt{24N+1}}{6}$

$3x^2 - x - 2N = 3\left(\frac{1+\sqrt{24N+1}}{6}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{24N+1}}{6} - 2N = 3 \times \frac{1+2\sqrt{24N+1}+24N+1}{36} - \frac{1+\sqrt{24N+1}}{6} - 2N$

$= \frac{1+2\sqrt{24N+1}+24N+1}{12} - \frac{2+2\sqrt{24N+1}}{12} - \frac{24N}{12} = 0$

Donc $x = \frac{1+\sqrt{24N+1}}{6}$ est une solution de (E).

3) Avec $N = 330$: $\frac{1+\sqrt{24N+1}}{6} = \frac{1+\sqrt{24\times 330+1}}{6} = 15 \in \mathbb{N}$. Donc 330 est un nombre pentagonal dont la base contient 15 disques. $P_{15} = 330$.
   Pour 329, on n'obtient pas un nombre entier avec la formule précédente. Donc ce n'est pas un nombre pentagonal.
4)

Numéro de lignes	Algorithme 1
	N ← nombre entier non nul à tester si $\frac{1+\sqrt{24N+1}}{6}$ est un nombre entier alors afficher « **VRAI** » sinon afficher « **FAUX** »