OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE GRENOBLE
2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Exercices Académiques, Grenoble

Proposition de correction

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Les Q-suites

Partie A. Etude mathématique

1. Déterminer les six premiers éléments de la Q-suite de base $(2,6)$.
   (2,6,7,10,11,14)
2. La suite des entiers naturels non nuls : $1, 2, 3, 4$… est-elle une Q-suite ? Même question pour la suite des nombres pairs non nuls $2, 4, 6, 8$…
   non pour les deux car $u_2 = 1 + 2 = u_0 + u_1$
3. On note, dans cette question, u la Q-suite de base $(1, 3)$.
   a. Donner les six premiers termes de u.
   (1,3,5,7,9,11)
   b. Soit un entier $k_0 \geq 2$ fixé. Supposons que les k_0 premiers termes de u soient :
   $$(1, 3, 5, \dots, 2k_0 - 1).$$
   Déterminer le terme suivant de la suite u en fonction de k_0. On expliquera le raisonnement avec soin.
   $2k_0 + 1$ ne peut être égal à la somme de deux termes de rangs inférieurs à $k_0 + 1$ (la somme étant forcément paire) et comme $2k_0 = u_0 + u_{k_0}$, c'est le plus petit nombre strictement supérieur à $2k_0 - 1$ qui n'est pas la somme de deux termes de rangs inférieurs.
4. On note, dans cette question, u la Q-suite de base $(1, 2)$. On a donc $u_0 = 1, u_1 = 2$. Soit un entier $k_0 \geq 2$ fixé. On suppose qu'on a réussi à prouver que pour tous les entiers i entre 2 et k_0, $u_i = 3i - 2$. Montrer que cette expression est encore valable pour le rang suivant (il s'agit donc de montrer que le terme suivant u_{k_0+1} peut s'écrire $3(k_0 + 1) - 2$ c'est-à-dire $3k_0 + 1$).
   Le terme u_{k+1} est strictement supérieur à $3k_0 - 2$, ne peut être égal à $3k_0$ qui est égal à $u_{k_0} + u_1$, ni à $3k_0 - 1$ (égal à $u_{k_0} + u_0$). Or $3k_0 + 1$ n'est égal à aucune somme de deux termes de rangs inférieurs ($u_0 + u_1, u_i + u_1$ et $u_i + u_0$ impossible pour i inférieur à k_0 car $u_i < 3k_0 - 2$ et par l'absurde : si c'était le cas, il existerait i et j entiers entre 2 et k_0 tels que $3k_0 + 1 = 3i - 2 + 3j - 2$ donc $5 = 3(i + j - k_0)$ Impossible (si i+j-k nul impossible et sinon, 3 ne divise pas 5).
5. Soit b tel que $b \geq 1$ et u la Q-suite de base $(1, b)$.
   a. Montrer que pour tout $n \geq 1$:
   $$2 + u_n \leq u_{n+1} \leq 2u_n.$$
   Inégalité de droite : u_n est non nul donc 2u_n est strictement supérieur à u_n. Il suffit donc de montrer que $2u_n$ n'est pas égal à la somme de deux termes de rangs inférieurs : cela vient de $u_n > u_{n-1} > \cdots > u_1 \geq u_0$ (par définition de la suite). Or u_n+1 est le plus petit entier satisfaisant les deux propriétés d'où l'inégalité de droite.
   Inégalité de gauche : $u_n + 1 > u_n$, u_{n+1} entier différent de $u\_0 + u\_n = 1 + u_n$ donc $u_n + 1 > u_n + 1$ d'où le résultat.
   b. En déduire, pour $n \geq 2$ un encadrement de u_n en fonction de n et b.
   On obtient de proche en proche $2(n-1) + b \leq u_n \leq 2^{n-1}b$

Partie B. Approche algorithmique

1. La fonction Est_somme ci-dessous prend un nombre et une liste en arguments, et renvoie True si le nombre peut s'écrire comme la somme de deux termes d'indices différents de la liste, ou False sinon.
   Recopier sur votre copie, en la complétant, l'instruction de la ligne 4 commençant par « if ».

```
def Est_somme(nombre, liste):
    for j in range(len(liste)):
        for i in range(j):
            if ......................
                return True
    return False
```

if nombre==liste[i]+liste[j]:

2. Ecrire une fonction Terme_suivant qui prend en argument une liste non vide, et qui renvoie le plus petit entier strictement supérieur au dernier élément de la liste et qui n'est pas la somme de deux termes d'indices différents de la liste.

```
def Terme_suivant(liste):
    n=len(liste)
    i=liste[n-1]+1
    while Est_somme(i,liste):
        i=i+1
    return i
```

3. Ecrire une fonction Complete_suite qui prend en arguments un entier n, supérieur ou égal à 2 et deux entiers a et b, et qui renvoie la liste des n premiers termes de la Q-suite de base (a, b).

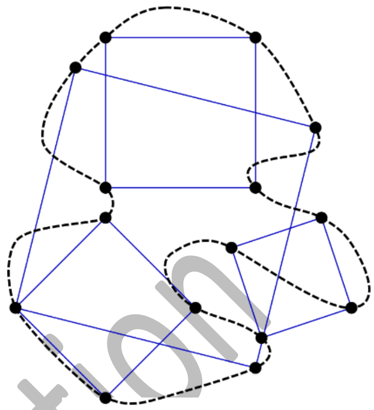
```
def Complete_suite(n,a,b):
    liste=[a,b]
    for i in range(n-1):
        liste.append(Terme_suivant(liste))
    return liste
```

Exercice académique 2 (à traiter par les candidats de voie générale ayant choisi la spécialité mathématiques)

Parallélogrammes inscrits sur une courbe.

La conjecture de Toeplitz affirme que toute courbe fermée simple admet (au moins) un carré inscrit (un carré inscrit dans une courbe est un carré dont les sommets appartiennent à la courbe).

C'est un problème que les mathématiciens n'ont toujours pas résolu dans le cas général !



Source : Wikipedia

On s'intéresse ici à un problème lié : la courbe d'une fonction polynomiale (dans un repère orthogonal) possède-t-elle au moins un parallélogramme inscrit ? (Un parallélogramme est inscrit sur une courbe si ses quatre sommets sont placés sur la courbe).

On considère dans toute la suite le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A. Une infinité de parallélogrammes inscrits ?

1. Un exemple : la fonction cube.
   a. Tracer sur votre copie la courbe représentative Γ de la fonction f définie par $f(x) = x^3$. On pourra se limiter à l'intervalle $[-2\,;2]$.
   b. Tracer de deux couleurs différentes deux parallélogrammes inscrits sur la courbe Γ.
   c. Quel semble être le centre de ces parallélogrammes ? On ne demande pas de justification dans cette question.

      Centre 0

   d. On considère les points $B(-2\,;\,-8)$ et $C(-1\,;\,-1)$. Déterminer les coordonnées de deux points D et E tels que $BCDE$ soit un parallélogramme inscrit sur la courbe Γ.

      D(2,8) et E(1,1) : les 4 points appartiennent à la courbe. Par symétrie, O est le milieu de [BD] et de [CE]. Les diagonales de BCDE se coupent en leur milieu d'où la conclusion.

2. Rappel : *on dit qu'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ est impaire si pour tout réel x, $g(-x) = -g(x)$.*
   Démontrer que si la fonction polynomiale g est impaire alors la courbe d'équation $y = g(x)$ possède au moins un parallélogramme inscrit (éventuellement aplati). Possède-t-elle une infinité de polynômes inscrits ?
   De manière générale, il suffit de prendre les quadrilatères dont les sommets ont pour coordonnées $(1, g(1)), (n, g(n)), (-1, -g(1)), (-n, -g(n))$. Ce sont des parallélogrammes (arguments similaires à la question précédente) et les points appartiennent à la courbe par parité de la fonction.

Partie B. Aucun parallélogramme inscrit ?

Dans cette partie, on pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant : *quels que soient les réels α et β, l'équation $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ possède au plus deux solutions.*

On considère un point A de coordonnées (a, b) et la courbe Γ d'équation $y = x^2$.

1. Dans cette question, on suppose que A a pour coordonnées $(1, -2)$.
   Justifier que Γ ne possède pas de parallélogramme inscrit dont le centre est A.

S'il existait un tel parallélogramme, l'ordonnée de l'un des points serait négative ce qui n'est pas possible.

2. Dans cette question, on suppose que A a pour coordonnées $(2, 5)$.
   a. Démontrer que le point $N(1, 1)$ est sur Γ et que son symétrique par rapport au point A est lui aussi sur Γ.
   On calcule les coordonnées du point P symétrique de N par rapport à A (en utilisant le fait que A milieu de [NP]) : N(3,9) et on vérifie que N appartient à la courbe.
   b. Déterminer les points $M(x, y)$ qui sont sur Γ et qui sont tels que leur symétrique par rapport à A soit lui aussi sur Γ.

   On calcule les coordonnées de M'(x',y') symétrique de M(x,y) par rapport à A comme précédemment. On obtient $x' = 4 - x$ et $y + y' = 10$.

   M(x,y) est sur la courbe et son symétrique M'(x',y') aussi ssi y=x^2 et y'=x'^2 ssi y=x^2 et (10-y)=(4-x)^2 ssi y=x^2 et x^2-4x+ 3=0
   On conclut soit en résolvant l'équation, soit en utilisant le résultat donné en introduction (deux solutions au maximum et on a les deux solutions d'apèrs la question précédente).
   Les points cherchés sont N(1,1) et P(3,9).

   c. En déduire qu'il n'existe pas de parallélogramme inscrit sur la courbe Γ dont le centre est A.
   S'il existait un tel parallélogramme, il y aurait au moins quatre points distincts sur la courbe dont le symétrique serait lui aussi sur la courbe ce qui n'est pas le cas.

3. Dans cette question, $A(a, b)$ est un point quelconque.
   a. Démontrer que si $M(x, y)$ est sur Γ et que son symétrique par rapport à A est lui aussi sur Γ alors $x^2 - 2ax + 2a^2 - b = 0$.
   Même calculs et même raisonnement avec x+x'=a et y+y'=b.
   b. En déduire qu'il n'existe pas de parallélogramme inscrit sur la courbe Γ.
   Même raisonnement qu'au 2c.

Partie C. Le problème inverse avec une fonction polynomiale du quatrième degré.

On s'intéresse aux points $M(-2, 1), N(-1, 0), P(2, -1)$ et $Q(1, 0)$.

1. Vérifier que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.
   On montre par exemple que [MP] et [NQ] ont le même milieu.

2. Déterminer une fonction polynomiale du quatrième degré f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe Γ passe par les quatre points M, N, P et Q. On pourra chercher quatre réels b, c, d et e tels pour tout réel x, $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.
Indication : selon la méthode utilisée, il pourra être utile de poser à un moment du raisonnement : $V = 4c + e, X = c + e, Y = b + d, Z = 4b + d$.

On remplace x et y par les abscisses et ordonnées des points donnés dans l'équation de la courbe.

On obtient un système de quatre équations :

$$-8b + 4c - 2d + e = -15$$
$$8b + 4c + 2d + e = -17$$
$$-b + c - d + e = -1$$
$$b + c + d + e = -1$$

Avec les indications de l'énoncé, on obtient le système équivalent plus simple :

$$-2Z + V = -15$$
$$2Z + V = -17$$
$$-Y + X = -1$$
$$Y + X = -1$$

Qui se résout facilement.

On trouve $f(x) = x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{6}x + 4$

Exercice académique 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale)

Plus il y a de trous … plus il y a de carrés !

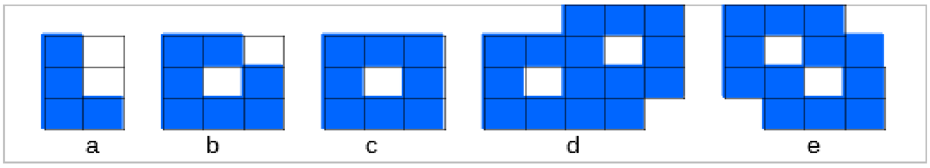
Très largement inspiré par l'article de Jean-Paul Delahaye, paru dans le numéro 501 de la revue « Pour la Sciences ».

Des formes trouées avec des carrés.

Une « forme » désigne un assemblage de pièces carrées de même taille collées côté contre côté.

Un trou est un assemblage de carrés non colorés complètement entourés de carrés colorés, y compris en diagonale.

Des trous distincts ne doivent pas se toucher.



Par exemple, dans la figure ci-dessus, les formes a et b n'ont pas de trou, les formes c et e ont un seul trou, la figure d possède deux trous.

La question étudiée dans cet exercice est la suivante : **pour un entier *n* donné, combien faut-il au minimum de carrés colorés pour construire une forme présentant *n* trous ?**

Dans la suite, nous noterons $f(n)$ ce nombre minimal où n désigne un entier naturel non nul.

Partie A. Quelques petites valeurs de *n*.

1. Déterminer $f(1)$ et $f(2)$

   $f(1)=8$ et $f(2) = 13$

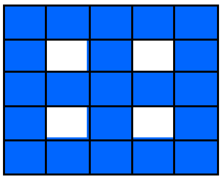
2. Trouver trois formes différentes (non superposables) montrant que 18 carrés colorés suffisent pour entourer trois trous. Que peut-on en déduire concernant $f(3)$?

   On en déduit que $f(3)$ est **inférieur ou égal** à 18.

3.
   a. Proposer un majorant de $f(n)$ en fonction de *n.*

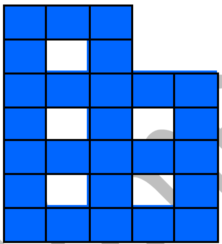
      3 carrés colorés au départ et il suffit d'ajouter « en ligne » 5 carrés colorés pour chaque trous : $f(n) \leq 3 + 5n$

   b. Trouver une forme à 21 carrés colorés et quatre trous. Que peut-on en déduire ?



5x4+3 = 23, la majoration obtenue ci-dessus n'est donc pas optimale.

4. Montrer que $f(5) \leq 26$. Illustrer ce résultat.



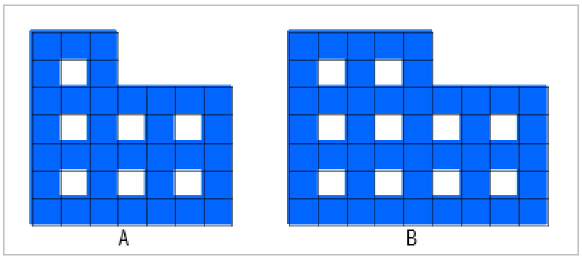
On obtient 26 carrés colorés.

Partie B. Etude d'un cas particulier : les formes standard.

Nous appellerons rangée pleine de taille l une forme sur une seule ligne, composée de $2l + 1$ carrés colorés ; nous appellerons rangée alternée de taille l une forme sur une seule ligne comprenant $2l + 1$ carrés, commençant par un carré coloré, finissant par un carré coloré et alternant carré coloré et carré non coloré.

Nous appellerons forme standard de taille $h \times l$ une forme obtenue en partant d'une rangée pleine d'une taille l, puis en « posant » une rangée alternée de même taille et ainsi de suite jusqu'à la rangée $2h - 1$ où on pose une rangée alternée de taille inférieure ou égale à l puis à la dernière rangée, une rangée pleine de même taille que l'avant dernière rangée.

Dans l’exemple ci-dessous, la forme A est une forme standard de taille 3×3 et la forme B est une forme standard de taille 4×3.

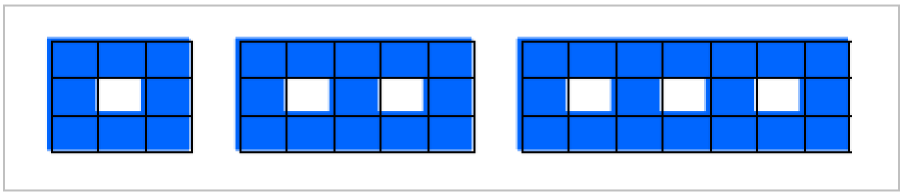


Nous noterons $g(n)$ le nombre minimal de carrés colorés permettant de construire une forme standard présentant n trous.

1. On considère un entier naturel non nul n. Comparer $f(n)$ et $g(n)$.

   Les formes standard étant des cas particuliers de ce qui précède, on a $f(n) \leq g(n)$.

2. En considérant des formes standard particulières (du type de la figure ci-dessous), proposer un majorant de $g(n)$ en fonction de n.



Le nombre de carrés utilisés est $5n+3$, d’où $g(n) \leq 5n+3$

3. Donner un exemple de forme standard pour laquelle il est possible de créer un nouveau trou en ajoutant trois carrés colorés.

   La figure A est un exemple : il suffit d’ajouter 3 carrés sur la rangée du haut pour former un trou de plus.

4. Trouver une expression dépendant de n qui minore $g(n)$.

   Il faut toujours au moins 3 carrés pour border un nouveau trou, et comme il en faut 8 pour le premier trou, on obtient le minorant $8+3(n-1)= 5+ 3n$. Pour tout entier naturel n non nul $g(n) \geq 5+3n$.

5. **Une tentative de minimisation du nombre de carrés pour les formes standard.**
   En construisant pas à pas certaines formes standard, on constate qu’il faut trois carrés colorés supplémentaires pour entourer chaque nouveau carré non coloré pour former un trou, sauf pour certaines valeurs de n pour lesquelles 5 nouveaux carrés colorés sont nécessaires.

   Nous considérons dans cette question une forme standard de taille $l \times h$. On note n le nombre de trou de cette forme standard.

   a. Déterminer un encadrement de n en fonction de l et h.

Pour une forme standard dont la dernière rangée est « complète », il y a l x h trous.

Si la dernière rangée contient uniquement un seul trou, on a au total l x (h-1) trous pour les rangées complètes + 1 trous sur la dernière rangées soit l (h-1)+1

Ainsi $l(h-1)+1 \leq\ n \leq\ lh$

b. Quel est le nombre total de carrés colorés utilisés dans cette forme standard (c'est-à-dire le nombre de carrés colorés utilisés pour border les n trous organisés en h rangées de longueur l) ? On donnera le résultat en fonction de n, l et h.

Jusqu'à l'avant dernière rangée comprise, il s'agit de rangée complète : il y a

- h rangées pleines avec 2l+1 carrés colorés
- h-1 rangées alternées avec l+1 carrés colorées

Pour la dernière rangée, il y a n- l(h-1) trous. Pour les entourer, il faut deux carrés colorés au début + 3 x nombre de trous soit 2+3(n-l(h-1)).

Au total il faut : $(2l+1)h+(h-1)(l+1)+2+3(n-l(h-1))$ c'est-à-dire $2h+2l+3n+1$ carrés colorés.

Partie C. Deux cas particuliers

1. Pour $n\ =\ p^2, p$ étant un entier naturel : démontrer que $f(n) \leq 3p^2+4p+1$.
   D'après B.5b) pour n=p^2 en prenant l=p et h=p dans la forme standard (forme « carrée »).

2. Pour $n\ =\ p(p+1), p$ étant un entier naturel : démontrer que $f(n) \leq 3p^2+7p+3$

   On peut prendre l= p+1 et h=p pour construire une forme standard « rectangulaire » avec n trous et on utilise B5b).

3. Déterminer alors un majorant de $f(64)$ et un majorant de $f(90)$.
   Il résulte de la question a) pour p=8 que $f(64) \leq 3\times 64+4\times 8+1$ d'après la question C1. Un majorant : 225.
   Idem avec la question C.2) avec p = 9 : $f(90) \leq\ \ 309$

Remarque : Il semble que les formes standard minimisent le nombre de carrés colorés nécessaires pour entourer n trous, mais ce résultat n'est qu'une conjecture.