OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE GRENOBLE
2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

Eléments de corrections des exercices académiques Olympiades 2021

Exercice sur les nombres dociles :

1)
   a) 7+2014=2021
   b) 79+1942=2021
   c) 493+1528=2021

2)
   a) 12+3=15 donc 15 est docile.
   b) 215=100+100+12+3=112+103 donc 215 est docile.

De même, 2415=1212+1203 donc 2415 est docile. 1415 = 712 + 703.

   c) d est docile donc il existe deux entiers positifs a et b tels que a < b avec d=a+b, $s(a) = s(b)$.

$2n \times 10^p + d = n \times 10^p + n \times 10^p + a + b = n \times 10^p + a + n \times 10^p + b$.

Comme $d < 10^p$, a et b aussi donc $s(n \times 10^p + a) = s(a) + s(n)$ et $s(n \times 10^p + b) = s(b) + s(n)$.

Donc, comme $s(a) = s(b)$, $s(n \times 10^p + a) = s(n \times 10^p + b)$ et donc $2n \times 10^p + d$est docile.

3)
   a) Il calcule la somme des chiffres du nombre n.
   b)

```
def decomposition(n) :
    for k in range(n//2) :
        if somme(k)==somme(n-k) :
```

4)
   a) → 9=1+8=2+7=3+6=4+5 et aucune décomposition ne convient donc 9 est rebelle.

→ Si 999 = abc + edf avec a,b,c,d,e,f des chiffres entre 0 et 9 et abc > edf alors :
a+e = 9, b +d = 9 et c+f = 9
Ainsi, a et e sont de parité différente, b et d sont de parité différente et c et f sont de parité différente.
Donc si$\{a; b; c\}$contient un nombre pair de nombres impairs alors$\{d; e; f\}$contient un nombre impair de nombres impairs et si$\{a; b; c\}$contient un nombre impair de nombres impairs alors$\{d; e; f\}$contient un nombre pair de nombres impairs.
Donc les sommes $a+b+c$ et $d+e+f$ sont de parité différente, elles ne peuvent donc pas être égales. Donc 999 est un rebelle.

   b) Selon le même raisonnement que 999, nous pouvons montrer que tout nombre formé que de 9 avec un nombre impair de 9 est rebelle. Il y en a donc une infinité.

Exercice « une plus longue sous-suite monotone »

Partie A :

1. Une suite de nombres se notera d'une façon générale [a_0,a_1,a_2,…,a_k] et on notera M[i] une plus longue sous-suite croissante se terminant par a_i.

a) Soit S la suite de 10 nombres [7,4,1,5,8,2,1,6,9,8].

- Les plus longues sous-suites se terminant par a_7 sont [1,2,6] , [1,1,6], [1,5,6] et [4,5,6]

- Proposer une sous-suite croissante de longueur 4 : [1,5,6,9] par exemple

b) Soit S la suite de 5 nombres [10,8,7,5,6].

M[0]=[10], M[1]=[8], M[2]=[7] M[3]=[5] et M[4]=[5,6] donc une longueur maximale de 2

2. Soit n∈N et notons S=[a_0, a_1,…,a_(n^2)] une suite de n^2+1 nombres.

Supposons qu'il n'existe pas n+1 nombres classés dans l'ordre croissant.

a. Justifier que les sous-suites M[i] (avec 0⩽i⩽n^2) ont des longueurs comprises entre 1 et n.

La longueur minimale est 1, la longueur maximale est n car on n'a pas n+1 nombres classés dans l'ordre croissant.

b. On regroupe les suites M[i] de mêmes longueurs.

Montrer qu'il existe au moins n+1 sous-suites ayant la même longueur.

Si on avait toujours au plus n suites de même longueur, comme on n'a que n longueurs possibles (entre 1 et n), cela ferait au maximum n^2 suites M[i] alors qu'il y en a n^2+1.

Donc on a nécessairement au moins (n+1) suite de même longueur.

c. Appelons b_0,b_1,…,b_n les nombres qui terminent ces n+1 suites de même longueur (b_0,b_1,…,b_n sont pris dans l'ordre d'apparition de la suite S). Justifier pourquoi on a b_0>b_1.

b_0>b_1 sinon la suite se terminant par b_0 pourrait se prolonger par b_1 et la sous-suite se terminant par b_1 ne pourrait pas avoir la même longueur.

d. De la même façon, on peut montrer que b_1>b_2>b_3,…>b_n. Que peut-on en déduire ?

On a donc extrait une sous-suite décroissante b_0>b_1>b_2>b_3,…>b_n de longueur n+1.

S'il n'y a pas de sous-suite croissante de longueur n+1, alors on peut trouver une sous-suite décroissante de longueur n+1

Partie B :

Initialisation :	S=[4,3,6,1,8,5,10,3,9,7]	M=[[]]
i=0	M[0]=[4]	M=[[4]]
i=1	M[1]=[3]	M=[[4],[3]]
i=2	M[2]=M[1]+[6]=[3,6]	M=[[4],[2],[3,6]]
i=3	M[3]=[1]	M=[[4],[2],[3,6],[1]]
i=4	M[4]=[3,6]+[8]=[3,6,8]	M=[[4],[2],[2,6],[1],[3,6,8]]
i=5	M[5]=[1,5]	M=[[4],[2],[2,6],[1],[2,6,8],[1,5]]
i=6	M[6]=[3,6,8]+[10] =[2,6,8,10]	M=[[4],[2],[2,6],[1],[2,6,8],[1,5], [2,6,8,10]]
i=7	M[7]=M[3]+[3]=[1,3]	M=[[4],[2],[2,6],[1],[2,6,8],[1,5], [2,6,8,10],[1,3]]
i=8	M[8]=[3,6,8]+[9] =[3,6,8,9]	M=[[4],[2],[2,6],[1],[3,6,8],[1,5], [3,6,8,10],[1,3],[3,6,8,9]]
i=9	M[9]=[1,3,7]	M=[[4],[2],[2,6],[1],[3,6,8],[1,5], [3,6,8,10],[1,3],[3,6,8,9],[1,3,7]]

1. On en déduit qu'une plus longue sous-suite croissante de S sera [3,6,8,9] .

2.

```python
def plssc(S) :
    M=[[] for i in range(len(S))]     # on prepare une liste vide pour M

    M[0]=[S[0]]                       # cas de base

    for i in range(1,len(S)):
        M[i]=[S[i]]
        for j in range(0,i):
            if M[j][-1]<=S[i]:
                if len(M[j])+1>=len(M[i]):
                    M[i]=M[j]+[S[i]]
    return M
```