OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE DIJON 2022

SUJET DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Académie de DIJON

ACADÉMIE DE DIJON
Liberté Égalité Fraternité

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.

Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La deuxième partie de l'épreuve, réalisée en équipe, contient trois exercices : une copie par équipe est à rendre.

Les candidats de voie générale, ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques, doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 et 3.

PARTIE 2

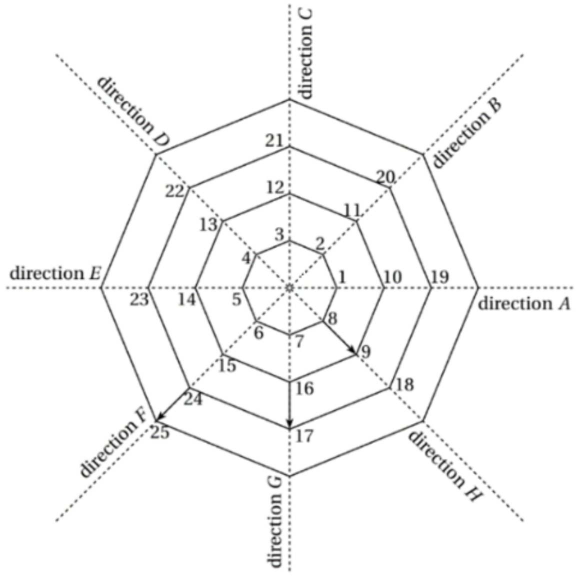
Ce sujet comprend 6 pages, celle-ci incluse.

Exercice académique 1 (à traiter par tous les candidats)

Octogone !

On écrit les entiers naturels non nuls sous la forme de la « spirale d'octogones » dont les premières étapes sont décrites ci-contre. Précisons le vocabulaire utilisé dans l'exercice :

- La première couronne est composée des entiers $1, 2, \dots, 8$.
- La deuxième couronne est composée des entiers $9, 10, \dots, 16$.
- Les entiers $1, 10$ et 19 se situent dans la direction A.
- Les entiers $9, 17$ et 25 sont dits fléchés.
- La toile d'une couronne est la somme des entiers qui la composent. Par exemple, la toile de la première couronne est égale à : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$.



1. a. Déterminer les huit entiers de la quatrième couronne.
   b. Déterminer les huit entiers de la cinquième couronne.

2. a. Quel est le nombre fléché de la sixième couronne ? Dans quelle direction se situe-t-il ?
   b. Quel est le nombre fléché de la dixième couronne ? Dans quelle direction se situe-t-il ?
   c. Les nombres fléchés sont-ils toujours impairs ?

3. a. Sur quelle couronne et dans quelle direction le nombre 100 se situe-t-il ?
   b. Quel est le nombre situé dans la direction E de la centième couronne ?

4. a. Sur quelle couronne et dans quelle direction le nombre 2022 se situe-t-il ?
   b. À partir de quelle couronne la somme des entiers de la direction A dépasse-t-elle 2022 ?

5. a. Combien de carrés parfaits une couronne peut-elle contenir au maximum ?
   b. Sur quelle couronne trouve-t-on le plus de nombres premiers ?

6. a. Calculer la toile des deuxième, troisième et quatrième couronnes.
   b. Déterminer une relation entre la toile d'une couronne et celle de la couronne suivante.
   c. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n la toile de la n^{e} couronne.

Exercice académique 2 (à traiter par les candidats ayant suivi la spécialité de mathématiques de première générale)

Dans cette famille, c'est carré !

La partie 3 est indépendante des deux premières

I. Quand un carré a un fils

On considère un carré $OABC$. Le cercle de centre B passant par le point C coupe le segment $[OB]$ en D. Soit E le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (OB) passant par D avec le côté $[OC]$. Finalement on note F le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (DE) en E et de la perpendiculaire à la droite (DO) en O. Le quadrilatère $ODEF$ est appelé « le fils » du carré $OABC$. Dans la suite de cette partie, on note a la longueur OA, b la longueur OB, et ainsi de suite jusqu'à f la longueur OF.

1. Tracer un carré $OABC$ puis construire le quadrilatère $ODEF$, fils du carré $OABC$.

2. a. Combien mesure l'angle $\widehat{DOE}$? En déduire la mesure de l'angle $\widehat{DEO}$ puis que $OD = DE$.
   b. Justifier que le quadrilatère $ODEF$ est également un carré.

3. Construire le quadrilatère $OGHI$, fils du carré $ODEF$.

4. Montrer que $f = b - c$.

5. a. Montrer que les triangles EBC et EDB sont égaux (c'est-à-dire superposables).
   b. En déduire que $ED = EC$.
   c. Montrer que $e = 2c - b$.

6. Sachant que $OA = 15$, en déduire les valeurs exactes de e et f.

II. Les descendants des carrés

1. En utilisant la première partie, recopier et compléter la fonction en langage python qui renvoie la longueur du côté du $\underbrace{petit - petit - \cdots - petit}_{(n-1)\ fois}$ fils (avec $n \geq 1$) du carré OABC.

```
from math import sqrt
def longueur_descendant(n):
    b=15*sqrt(2)
    c=15
    for i in range [      ]
        t=b
        b= [      ]
        c= [      ]
    return(c)
```

2. Déterminer à la calculatrice la valeur arrondie à 10^{-3} du côté du petit-petit-petit fils du carré $OABC$.

3. Déterminer la valeur exacte du côté du petit-petit-petit fils du carré $OABC$ sous la forme $\alpha + \beta\sqrt{2}$ où α et β sont des entiers relatifs.

III. Je suis ton père !

Par analogie avec la première partie, on dit qu'un couple de nombres $(v\,;\ w)$ a pour fils le couple $(y\,;\ z)$ défini par $\begin{cases} z = v - w \\ y = 2w - v \end{cases}$. On dit aussi que $(v\,;\ w)$ est le père (ou premier ancêtre) du couple $(y\,;\ z)$.

1. Exprimer v et w en fonction de z et y.

2. Démontrer que $v^2 - 2w^2 = -(y^2 - 2z^2)$.

3. On note $(\ y_{100}\ \ ;\ z_{100}\ )$ le couple associé au 100^e ancêtre du couple $(1\,;\ 1)$.
   Déterminer $(\ y_{100}\ )^2 - 2\ (\ z_{100}\ )^2$.

D'après une idée de J. Lubczanski et G. Chaumeil

Exercice académique 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de première générale)

Produits régionaux

Les deux parties sont indépendantes

Partie 1 - Des produits maximaux

1. On dispose des cinq cartes suivantes :

   1 | 2 | 3 | 4 | ×

   On peut par exemple former les produits :

   4 | × | 1 | 3 | 2 ou 2 | 1 | × | 4 | 3

   Quel produit maximal peut-on ainsi obtenir ?

2. Même question avec les six cartes suivantes :

   1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ×

3. Même question avec les dix cartes suivantes :

   1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ×

Partie 2 - Des produits avec une calculatrice

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Comment afficher 12345 sur une calculatrice qui ne dispose que des treize touches suivantes ?

   $0 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad \times \quad + \quad - \quad \div \quad x^2 \quad (\quad) \quad \boxed{\text{ENTRER}}$

   Proposer une solution, utilisant le moins de touches possibles.

Dans le grenier de Robert, on a retrouvé une calculatrice qui ne dispose que des dix-huit touches :

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad + \quad - \quad \div \quad \boxed{1/x} \quad x^2 \quad (\quad) \quad$ ENTRER

Attention : la touche × est en panne !

2. En utilisant l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, proposer une méthode permettant d'effectuer une multiplication à l'aide de notre calculatrice.

3. Deux nouvelles touches tombent alors en panne : $\div$ et x^2.
   a. Soit a un réel strictement positif.
      (i) Justifier que $\frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+2}} = \frac{a^2}{2} + a$.
      (ii) Proposer une méthode permettant de calculer le carré de a à l'aide de notre calculatrice.

   b. Soient a et b deux réels distincts strictement positifs.
      (i) Simplifier l'expression $\frac{1}{\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+b+4}}$.
      (ii) Comment calculer le produit de a par b à l'aide de notre calculatrice ?