OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE DIJON 2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

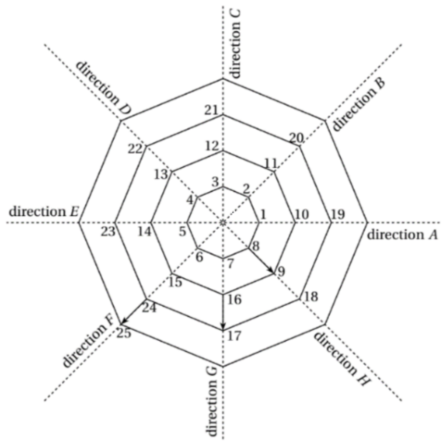
22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

OLYMPIADES ACADEMIQUES DIJON 2022

EXERCICE 1



<u>Remarque 1</u> : comment calculer le fléché d'une couronne donnée ?

- 25 est le fléché de la <u>4</u>ème couronne car $25 = 8 \times (4-1) + 1$
- 33 est le fléché de la <u>5</u>ème couronne car $33 = 8 \times (5-1) + 1$
- etc.

<u>Remarque 2</u> : comment déterminer dans quelle direction se situe le fléché d'une couronne donnée ?

Soit n le numéro de la couronne.

Si $n = 2\ [8]$ (c'est-à-dire le reste dans la division euclidienne de n par 8 est égal à 2), alors la direction du fléché est H

Si $n = 3\ [8]$, la direction du fléché est G

Si $n = 4\ [8]$: F et ainsi de suite 5 : E 6 : D 7 : C 0 : B 1 : A

1. a. Déterminer les huit entiers de la quatrième couronne.
   $\mathbf{25\ 26\ 27\ \dots\ 32}$
   b. Déterminer les huit entiers de la cinquième couronne.
   $\mathbf{33\ 34\ 35\ \dots\ 40}$

2. a. Quel est le nombre fléché de la sixième couronne ? Dans quelle direction se situe-t-il ?
   Le fléché de la 6ème couronne est 41, il se situe dans la direction D.
   En effet $41 = 8 \times (6-1) + 1$ et comme $6 = 6[8]$, l'entier 41 se situe dans la direction D.

   b. Quel est le nombre fléché de la dixième couronne ? Dans quelle direction se situe-t-il ?
   Le fléché de la 10ème couronne est 73, il se situe dans la direction H.
   En effet, $73 = 8 \times (10-1) + 1$ et comme $10 = 2[8]$, il se situe dans la direction H.

   c. Les nombres fléchés sont-ils toujours impairs ?
   OUI
   Par construction, le dernier entier de chaque couronne est un multiple de 8, donc toujours pair.
   Le fléché d'une couronne donnée est toujours impair car c'est le successeur d'un nombre pair.

3. a. Sur quelle couronne et dans quelle direction le nombre 100 se situe-t-il ?
   13ème couronne direction H.
   Comme $8 \times 12 = 96$, le dernier entier de la 12ème couronne est 96. Le nombre 100 se situe sur le 13ème couronne, qui débute par le fléché 97. Or, $13 = 5[8]$, donc l'entier 97 se situe dans la direction E.
   On en déduit que l'entier 100 se situe donc dans la direction H.

   b. Quel est le nombre situé dans la direction E de la centième couronne ?
   800.

La 99ème couronne se termine par $99 \times 8 = 792$. La 100ème couronne débute donc par le fléché 793 qui se situe dans la direction F car $100 = 4[8]$. Dans la direction E de le 100ème couronne on aura donc le nombre $793 + 7 = 800$.

4 a. Sur quelle couronne et dans quelle direction le nombre 2022 se situe-t-il ?

253ème couronne, direction B.

Comme $8 \times 252 = 2016$, le dernier entier de la 252ème couronne est 2016. Le nombre 2022 se situe donc sur la 253ème couronne, qui débute par le fléché 2017. Or, $253 = 5[8]$ donc l'entier 2017 se situe dans la direction E. On en déduit que l'entier 2022 se situe donc dans la direction B.

b. À partir de quelle couronne la somme des entiers de la direction A dépasse-t-elle 2022 ? **23ème couronne** (Excel ou Python)

Direction A				
Fléchés				
	1	65	129	
	10	74	138	
	19	83	147	
	28	92	156	
	37	101	165	
	46	110	174	
	55	119	183	
	64	128		
Sommes	22 couronnes	1 + ... + 174 =	1941	< 2022
	23 couronnes	1 + ... + 183 =	2124	> 2022

5. a. Combien de carrés parfaits une couronne peut-elle contenir au maximum ?

Au maximum 2

Les première et deuxième couronnes contiennent deux carrés parfaits. Or, $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$. Plus n grandit plus l'écart entre deux carrés consécutifs est grand et il dépasse 8 (le nombre d'entiers sur une couronne) dès que n dépasse 4. Or, les 3ème et 4ème couronnes ne contiennent pas plus de deux carrés parfaits. Au-delà, chaque couronne contient soit un soit aucun carré parfait.

b. Sur quelle couronne trouve-t-on le plus de nombres premiers ?

La première couronne.

La première couronne contient 4 nombres premiers : 2, 3, 5 et 7. On ne peut pas faire mieux.

Parmi 8 entiers consécutifs, à partir de la deuxième couronne (9 − 10 − 11 − 12 − 13 − 14 − 15 − 16) on aura quatre nombres pairs, et au moins un multiple de 3 impair, donc seulement au maximum $8 - 5 = 3$ nombres premiers potentiels restants, ce qui est inférieur à 4.

6. a. Calculer la toile des deuxième, troisième et quatrième couronnes

$T_n = 9 + 10 + \cdots + 16 = 8 \times (9 + 16)/2 = \mathbf{100}$ (somme de termes d'une SA de raison 1)

$T_3 = 17 + \cdots + 24 = \mathbf{164}$ et $T_4 = 25 + \cdots + 32 = \mathbf{228}$

b. Déterminer une relation entre la toile d'une couronne et celle de la couronne suivante

Conjecture : $T_{n+1} = T_n + 64$

Si les entiers de la $n$ème couronne sont : a, b, c, d, e, f, g, h

ceux de la couronne suivante sont $a + 8, b + 8, \ldots, h + 8$ et donc $T_{n+1} = T_n + 8 \times 8 = T_n + 64$.

c. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n la toile de la n^{e} couronne.

SA de raison 64 et de premier terme $T_1 = 36$.

$T_n = \mathbf{36 + 64} \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{1}) = \mathbf{64}\boldsymbol{n} - \mathbf{28}$.

EXERCICE 2

Partie 1

1. 32×41.
2. 431×52.
3. 87531×9642.
4. Le nombre le plus « court » commence par le chiffre le plus grand, puis on alterne (ou pas : il suffit de tester à chaque étape) dans chacun des deux facteurs la répartition des chiffres décroissants.

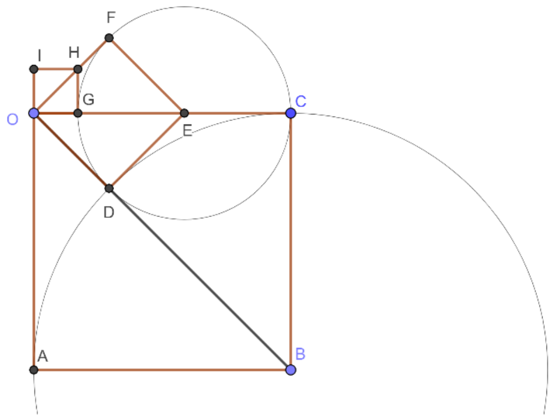
Partie 2

1. $98760 \div 8$ $\boxed{\text{EXE}}$ (la plus courte en seulement 8 touches).
   $(99+6+6)^2+9+8+7$ $\boxed{\text{EXE}}$
2. $ab = \frac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}$.
3. Carré d'un réel strictement positif a :
   a. $\frac{a^2}{2}+a$.
   b. $\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}}+\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}}-a-a$.
4. Produit de deux réels positifs a et b distincts :
   a. $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-\frac{ab}{2}+a-b$.
   b. $\frac{1}{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b+4}}-\frac{1}{\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-b+4}}-b-b$ si $a-b \neq -4$. Si $a-b=-4$, il suffit d'inverser le rôle de a et b.

EXERCICE 3

I.

1) et 3)



2) a) $\widehat{DOE} = 45 = \widehat{DEO}$ donc DOE isocèle donc OD=DE

b) 3 angles droits et 2 côtés consécutifs égaux donc ODEF carré

4) $f = OF = OD = OB - DB = OB - OC = b - c$

5) a) $DB = BC$ par construction donc ces triangles ont 2 cotés égaux et un angle droit donc ils sont isométriques.

b) ils sont isométriques d'où $ED = EC$.

c) $e = OE = OC - CE = c - DE = c - OD = c - (OB - BD) = c - (OB - OC) = c - (b - c) = 2c - b$

6) $c = 15$ et b = $15\sqrt{2}$.

Donc $f = 15\sqrt{2} - 15$ et $e = 30 - 15\sqrt{2}$ (en cm)

II. 1)

```
def longueur_descendant(n):
   b = 15*sqrt(2)
   c = 15
   for i in range(n) :
      t=b
      b=2*c-b
      c=t-c
     return c
```

2) on obtient 0,442 arrondi à 0,001 près.

3) on obtient $255 - 180\sqrt{2}$.

III. 1) on obtient facilement $\begin{cases} v = y + 2z \\ w = y + z \end{cases}$

2) $v^2 - 2w^2 = (y+2z)^2 - 2(y+z)^2 = \ldots = -(y^2 - 2z^2)$

3) d'après 2) on a $y_n{}^2 - 2z_n{}^2 = -(y_{n-1}{}^2 - 2z_{n-1}{}^2)$ pour tout *n* et pour (1 ; 1) on a $1^2 - 2\times 1^2 = -1$

Donc pour *n* pair, $y_n{}^2 - 2z_n{}^2 = -1$ et pour *n* impair $y_n{}^2 - 2z_n{}^2 = 1$

D'où $(y_{100})^2 - 2(z_{100})^2 = -1$.