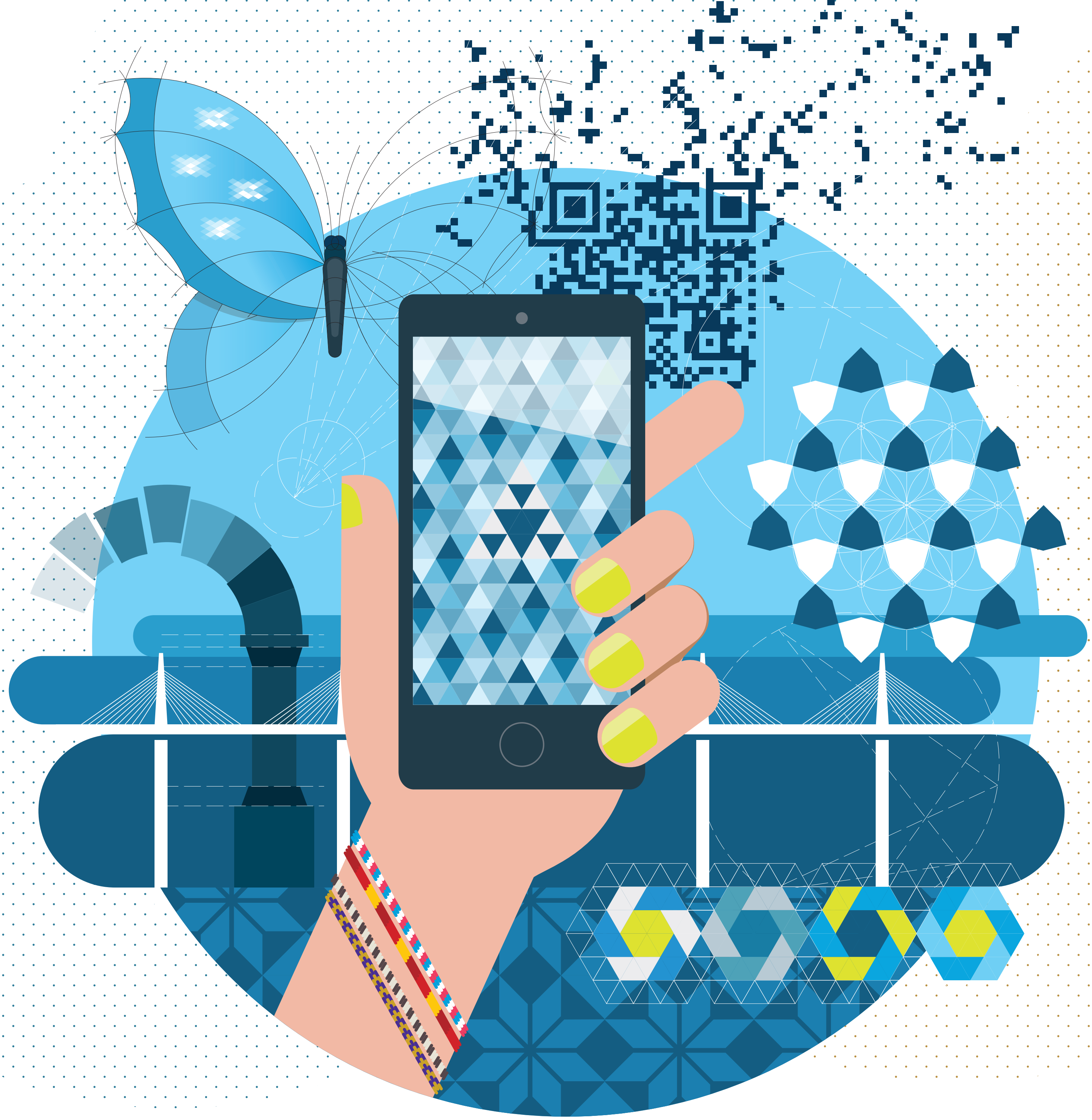
OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE DIJON
2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE



21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

SUJET ACADEMIQUE

Exercice 1

Q.	**R.**
1.	Les termes « aigu » et « grave » évoquent la forme des accents.
2.a.	Un nombre aigu à quatre chiffres est 2358.
2.b.	Un nombre grave à quatre chiffres est 7633.
2.c.	Un nombre obtus à quatre chiffres est 2351.
2.d.	Un nombre léger à quatre chiffres est 7638.
3.	Un nombre aigu n'est pas nécessairement léger : le nombre 333 est aigu ($3 \leq 3 \leq 3$), mais aussi grave ($3 \geq 3 \geq 3$) donc pas léger. De, même un nombre grave n'est pas nécessairement obtus : 333 est grave et aigu, donc pas obtus.
4.	Il n'existe pas de plus grand nombre aigu : on peut en fabriquer un aussi long que l'on veut en répétant autant que l'on veut le même chiffre. Pour la même raison, il n'existe pas de plus grand nombre grave.
5.	La suite d'entiers $111, 112, 113, \dots\ 199$ est constituée de 89 entiers tous légers, et c'est la plus grande. • Si on commence la liste à 101 (qui est le premier nombre léger), elle s'arrête à 109 (car 110 est grave), et elle ne contient que 9 entiers. • Si on la commence à 201(qui est léger), elle s'arrête à 209 (car 210 est grave), et elle ne contient que 9 entiers. • Si on la commence à 212 (qui est léger), elle s'arrête à 219 (car 220 est grave), et elle ne contient que 8 entiers. • Etc.
6.a.	La somme de deux nombres aigus n'est pas nécessairement un nombre aigu : un contre-exemple est $128 + 237 = 365$.
6.b.	La somme de deux nombres graves n'est pas nécessairement un nombre grave : un contre-exemple est $987 + 875 = 1862$.
6.c.	Il n'existe pas de règle concernant la somme d'un nombre aigu et d'un nombre grave : Cette somme peut être un nombre aigu ($347 + 321 = 668$), ou grave ($138 + 843 = 981$) ou ni l'un ni l'autre ($158 + 810 = 968$).
7.a.	Le produit de deux nombres aigus peut être un nombre grave : $58 \times 13 = 754$.
7.b.	Le produit de deux nombres graves peut être un nombre aigu : $74 \times 32 = 2368$.
7.c.	Il n'existe pas de règle concernant le produit d'un nombre aigu et d'un nombre grave : Ce produit peut être aigu ($58 \times 96 = 5568$), ou grave ($78 \times 84 = 6552$), ou ni l'un ni l'autre ($89 \times 31 = 2759$).
8.a.	Il existe 45 nombres aigus à deux chiffres : • Les neuf entiers de 11 à 19, • Les huit entiers de 22 à 29, • … • Les deux entiers 88 et 89, • L'entier 99. Il existe 165 nombres aigus à trois chiffres : • Comme précédemment, il y en a 45 entre 111 et 199, • Puis 36 entre 222 et 299, • Puis 28 entre 333 et 399, • Etc.
8.b.	On trouve qu'il existe 465 entiers aigus ou graves parmi les 990 entiers compris entre 10 et 999. On en déduit qu'il en existe 525 qui ne sont ni aigus ni graves. Ainsi, la probabilité qu'un entier choisi au hasard entre 10 et 999 ne soit ni aigu ni grave est $p = \frac{525}{990} \approx 0{,}53$.
9.a.	Le plus petit nombre strictement aigu à 7 chiffres est 1 234 567
9.b.	Le plus petit nombre strictement grave à 7 chiffres est 7 654 321
9.c.	Le plus grand nombre strictement aigu est 123 456 789 : ce nombre est strictement aigu, et si on lui ajoute un chiffre à gauche (autre que 0) ou à droite, il ne sera plus strictement aigu.
9.d.	Le plus grand nombre strictement grave est 9 876 543 210 : ce nombre est strictement grave, et si on lui ajoute un chiffre à gauche ou à droite, il ne sera plus strictement grave.

10.a.	Un script est :
	`def chiffres_3(n):`
	`    c = []`
	`    for k in range(3):`
	`        chiffre = n % 10`
	`        c = c + [chiffre]`
	`        n = (n-chiffre) // 10`
	`    return c`

10.b.	Un script est :
	`def nature(n):`
	`    c = chiffres(n)`
	`    aigu = True`
	`    grave = True`
	`    for i in range(len(c)-1):`
	`        if c[i] < c[i+1]:`
	`            aigu = False`
	`        if c[i] > c[i+1]:`
	`            grave = False`
	`    resultat = "Le nombre " + str(n) + " est "`
	`    if aigu:`
	`        resultat = resultat + "aigu et "`
	`    else:`
	`        resultat = resultat + "obtus et "`
	`    if grave:`
	`        resultat = resultat + "grave."`
	`    else:`
	`        resultat = resultat + "léger."`
	`    return resultat`

10.c.	Un script est :
	`def chiffres(n):`
	`    k = 0`
	`    while n >= 10**k:`
	`        k = k+1`
	`    c = []`
	`    for i in range(k):`
	`        chiffre = n % 10`
	`        c = c + [chiffre]`
	`        n = (n-chiffre) // 10`
	`    return c`

SUJET ACADEMIQUE

Exercice 2

1. 6 est un nombre balançoire car $1+2+3+4+5=15$, et $7+8=15$. Du fait que $8=6+2$ $r=2$ et donc 6 est un nombre balançoire de balance 2.

2.

a. On a

$$S_n = 1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)$$
$$S_n = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$

Donc $2S_n = \big(1+(n-1)\big)+\big(2+(n-2)\big)+\cdots+\big((n-2)+2\big)+\big((n-1)+1\big)$
$= \underbrace{n+n+\cdots+n+n}_{n-1 \text{ fois}}$
$= n(n-1)$.

Et donc on obtient : $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

b. On a $T_n = \underbrace{n+n+\cdots+n}_{r \text{ fois}} + \underbrace{1+2+\cdots+r}_{=S_{r+1}} = rn + S_{r+1}$.

c. On a donc $T_n = rn + \frac{r(r+1)}{2}$.

3. a. On a

$$\begin{aligned} S_n = T_n &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = rn + \frac{r(r+1)}{2} \\ &\Leftrightarrow n(n-1) = 2rn + r(r+1) \\ &\Leftrightarrow n^2 - n = 2rn + r^2 + r \\ &\Leftrightarrow r^2 + r + 2rn - n^2 + n = 0 \\ &\Leftrightarrow r^2 + (2n+1)r + (n-n^2) = 0 \end{aligned}$$

b. On a $\Delta = (2n+1)^2 - 4\times 1\times (n-n^2) = 4n^2+4n+1-4n+4n^2 = 8n^2+1$. On a bien $\Delta > 0$, donc cette équation possède deux solutions réelles

$$R_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2n-1-\sqrt{8n^2+1}}{2}$$

$$R_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2n-1+\sqrt{8n^2+1}}{2}$$

R étant un entier naturel, il est positif, donc R_1 est impossible car $R_1 < 0$. Donc la seule solution de cette équation est le nombre réel $R = \frac{-2n-1+\sqrt{8n^2+1}}{2}$.

c. d. Comme R doit être un entier naturel, il faut que $\sqrt{8n^2+1}$ le soit également, donc que $8n^2+1$ est un carré parfait. (N.B. : On peut également remarquer que, dans ce cas, $\sqrt{8n^2+1}$ est impair).

4.

a. $8n^2+1$ est un carré parfait si et seulement s'il existe un entier naturel m tel que $8n^2+1=m^2$. Cela revient à résoudre l'équation $m^2-8n^2=1$. On note cette équation (E).

b. Pour $(m;n) = (3;1)$, $3^2 - 8 \times 1^2 = 9 - 8 = 1$. Donc $(3;1)$ est bien solution de (E).

c.

i. Puisque $n_2 = 6$, on a $m_2 + 6\sqrt{8} = \left(3+\sqrt{8}\right)^2 = 17 + 6\sqrt{8}$, donc $m_2 = 17$. En vérifiant, $17^2 - 8 \times 6^2 = 289 - 288 = 1$.

ii.
$$\begin{aligned} m_{k+1} + n_{k+1}\sqrt{8} &= \left(3+\sqrt{8}\right)^{k+1} \\ &= \left(3+\sqrt{8}\right)\left(3+\sqrt{8}\right)^k \\ &= \left(3+\sqrt{8}\right)\left(m_k + n_k\sqrt{8}\right) \\ &= 3m_k + 3n_k\sqrt{8} + m_k\sqrt{8} + 8n_k \\ &= 3m_k + 8n_k + (m_k + 3n_k)\sqrt{8} \end{aligned}$$

Par identification, on a bien $m_{k+1} = 3m_k + 8n_k$ et $n_{k+1} = m_k + 3n_k$.

iii. On a
$$\begin{aligned} m_k - 3n_k &= 3m_{k-1} + 8n_{k-1} - 3(m_{k-1} + 3n_{k-1}) \\ &= 3m_{k-1} + 8n_{k-1} - 3m_{k-1} - 9n_{k-1} \\ &= -n_{k-1} \end{aligned}$$

Ainsi, $n_{k+1} = m_k + 3n_k = 3n_k - n_{k-1} + 3n_k = 6n_k - n_{k-1}$.

5. a.

```
def balance(N) :
   L=[1,6]              #deux premiers nombres balançoires
   for k in range(N) :
      B=6*L[k+1]-L[k]
      L=L+[B]
   Return(L)
```

b. On a $n_7 = 6 \times 6930 - 1189 = 40\ 391$ et On a $n_8 = 6 \times 40391 - 6930 = 235\ 416$. **(1 pt)**

SUJET ACADEMIQUE

Exercice 3

Dans tout cet exercice, on appelle **« fonction digitale »**, notée f, la fonction qui à chaque nombre entier naturel associe le nombre de « bâtons » nécessaires à l'écriture de cet entier, en utilisant la police ci-dessous :

Source : http://villemin.gerard.free.fr/aJeux1/Allumett/NbCarres.htm

Ainsi, par exemple, $f(9) = 6$ car le nombre 9 s'écrit avec 6 bâtons. Ou encore, $f(51) = 7$ pour la même raison.

1. Quelle est l'image de 2021 par fonction f ?
   $5 + 6 + 5 + 2 = 18$.

2. La fonction f est-elle croissante ?
   Non, donner un contre-exemple suffit.

3. Quel est l'entier inférieur à 1000 dont l'image par la fonction f est la plus grande ?
   888 dont l'image par la fonction f est $3 \times 7 = 21$.

4. On considère une liste ordonnée de dix entiers. Proposer une condition suffisante pour que leurs images respectives soient en progression arithmétique de raison 6.
   Il suffit par exemple d'ajouter un chiffre 0 sur chacun des nombres de cette liste (12 ; 120 ; 1200 ; 12000…).
   Cette condition est-elle nécessaire ?
   Non bien sûr (12 ; 1214 ; 1266…).

5. Déterminer le plus grand puis le plus petit antécédent de 2021 par la fonction f.
   - $2021 = 2 \times 1009 + 3$. Le plus gd antécédent de 2021 est : 71 … 1, s'écrivant avec 1009 fois le chiffre 1.
   - Avec une démarche analogue, on pourrait proposer le nombre 8 … 85 s'écrivant avec 288 fois le chiffre 8, mais il y a mieux 8 … 871 s'écrivant avec 288 fois le chiffre 8.

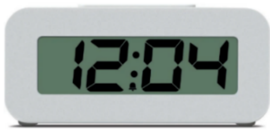
6. a. Les entiers compris entre 0 et 4 ont-ils un antécédent par la fonction f ?
   0 et 1 n'ont pas d'antécédent par f. 2, 3, 4 ont au moins un antécédent.

   b. Montrer que tout entier supérieur ou égal à 5 admet au moins un antécédent par la fonction f.
   - Si k est pair, le nombre s'écrivant avec $\frac{k}{2}$ fois le chiffre 1 est un antécédent de k par f.
   - Si k est impair, le nombre 71 … 1 s'écrivant avec $\frac{k-1}{2}$ fois le chiffre 1 est un antécédent de k par f.

7. a. Existe-t-il des entiers m et n tels que $f(m+n) = f(m) + f(n)$?
   Par exemple, $m = 15$ et $n = 7$.

   b. Existe-t-il des entiers p et q tels que $f(p \times q) = f(p) \times f(q)$?
   Par exemple, $p = 4$ et $q = 7$.

8. Digitaliser un horaire, c'est calculer l'image par la fonction f des chiffres composant cette heure affichée sur un réveil digital. Par exemple, la digitalisation de l'horaire 12h04 est égale à 17 car $f(1204) = 17$.



   a. Calculer la digitalisation de l'horaire 17h38.
   17.

   b. Déterminer les horaires qui ont la plus petite et la plus grande digitalisation au cours d'une journée.
   11h11 et 08h08 (de digitalisations respectives 8 et 26).

   c. En considérant tous les horaires de 00h00 à 23h59, calculer la digitalisation totale d'une journée.
   26496.

9. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $f(k) < k$, pour tout entier $k \geq n$.
À partir de $n = 7$, on a nécessairement $f(n) < n$.
- On peut aisément le vérifier pour $n = 7, 8, \dots, 14$.
- Pour $15 \leq n \leq 99$, on a $f(n) \leq 14 < n$ car 88 est le nombre à deux chiffres ayant la plus grande image (voir question 3).
- Supposons maintenant que n soit un nombre à p chiffres avec $p \geq 3$. On a donc $f(n) \leq 7p$ avec le même raisonnement que ci-dessus.
  D'une part, on a donc : $f(n) \leq 7n < 10^{p-1}$ et d'autre part, comme n possède p chiffres, on a aussi l'encadrement $10^{p-1} \leq n < 10^p$. De ces deux encadrements, on déduit : $f(n) < n$.