

www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE CRÉTEIL
2021



SUJET DE L'ÉPREUVE



21^e ● LYMPIADES DE MATHÉMATI●QUES

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Créteil

Session 2021

L'épreuve de la partie académique se déroule en deux heures.

Les candidats traitent les deux exercices.

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Chaque équipe éventuellement constituée rend une seule copie.



III. Points sur une droite

On s'intéresse à présent aux points A_n (n étant un nombre entier naturel) de la droite d'équation $y = 2x$.

Pour les premières valeurs de n , on obtient le tableau suivant :

A_n	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
Distance parcourue	0	5	18	39	68	105	150	203

On appelle « le saut » la distance (suivant la trajectoire établie précédemment) entre deux points consécutifs de la droite.

Par exemple, le saut entre les points A_1 et A_2 est de 13, celui entre les points A_2 et A_3 est de 21.

On considère la suite de nombres définie par $s_0 = 5, s_1 = 13, s_2 = 21$, etc.

s_0 donne le saut entre les points A_0 et A_1 , s_1 donne le saut entre les points A_1 et A_2 ,

s_2 donne le saut entre les points A_2 et A_3 .

Pour tout entier naturel n , s_n donne le saut entre les points A_n et A_{n+1} .

- 1) Conjecturer la valeur de $s_{n+1} - s_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Démontrer votre conjecture.

IV. Oh ! Des fractions ...

Expliquer en quoi ce quadrillage permet de numéroter tous les nombres rationnels.

Exercice 2 : les jeux de Nim.

I. Avec des cailloux, le dernier perd...

Deux joueurs, Amélie et Balthazar jouent **au jeu de Nim** avec la règle du jeu suivante :

Ils disposent d'un ensemble de cailloux.

Chaque joueur peut prélever 1, 2 ou 3 cailloux.

Les joueurs jouent à tour de rôle.

Le joueur qui prélève le dernier caillou a perdu.

1) Dans cette question, nous supposons que c'est à Amélie de jouer.

Soit r le nombre de cailloux restant sur la table.

- a) Si $r = 1$, peut-elle gagner ?
- b) Si $r = 2$, que doit-elle faire pour gagner ? même question avec $r = 3$ et $r = 4$?
- c) On considère que Balthazar adopte la meilleure stratégie possible.
S'il reste 5 cailloux, Amélie peut-elle gagner ?

On donne la définition suivante :

On dit qu'un nombre entier est « **perdant** » si les deux conditions suivantes sont réunies :

- lorsqu'il reste ce nombre de cailloux à un joueur, il est sûr de perdre et,
- l'autre joueur adopte la meilleure stratégie possible.

Par exemple, les **nombre 1 et 5 sont des nombres perdants.**

- 2) Amélie et Balthazar jouent une partie avec 20 cailloux ; on rappelle que chaque joueur peut prélever 1, 2 ou 3 cailloux.
 - a) Déterminer tous les nombres perdants dans ce jeu.
 - b) Quelle stratégie faut-il adopter si l'on veut gagner ? C'est Amélie qui commence la partie, est-elle sûre de gagner ?
- 3) Amélie et Balthazar décident de modifier les règles du jeu de la façon suivante :
 - Chaque joueur peut prélever de 1 à 5 cailloux.
 - C'est Balthazar qui commence la partie.Balthazar propose à Amélie de choisir le nombre de cailloux initial, qui doit être compris entre 20 et 40. Pour être sûre de gagner en adoptant la meilleure stratégie possible, quel(s) nombre(s) doit choisir Amélie ?
- 4) Déterminer les nombres perdants dans le cas général : n cailloux au total et la possibilité de prendre de 1 à p cailloux avec $p \geq 2$.
- 5) Amélie et Balthazar ont écrit le programme suivant, qui permet de simuler une partie où le joueur commence contre l'ordinateur, dans le cas où le nombre de cailloux initial est égal à 20 et que chaque joueur peut prélever 1, 2 ou 3 cailloux.

```
from random import randint

def nim_20_3 () :
    nombre = 20
    while nombre > 0 :
        cailloux = int( input("Nombre de cailloux entre 1 et 3"))
        nombre = nombre - cailloux
        if nombre <= 0 :
            res = "Perdu"
        else :
            print ("Il reste",nombre,"cailloux")
            ordi = randint (1,3)
            nombre = nombre - ordi
            print ("L'ordinateur prend", ordi,"cailloux")
            if nombre <= 0 :
                res = "Gagné"
            else :
                print ("Il reste",nombre,"cailloux")
    return res
```

Modifier le programme précédent de telle façon que l'ordinateur commence et qu'il gagne la partie à coup sûr.

II. Avec des triangles, le dernier gagne...

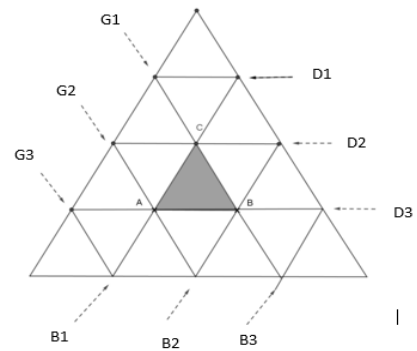
Dans cette partie, Amélie et Balthazar jouent **au jeu de Nim** avec la règle du jeu suivante :

Ils disposent de triangles équilatéraux superposables qui s'emboîtent comme dans la figure ci-contre.

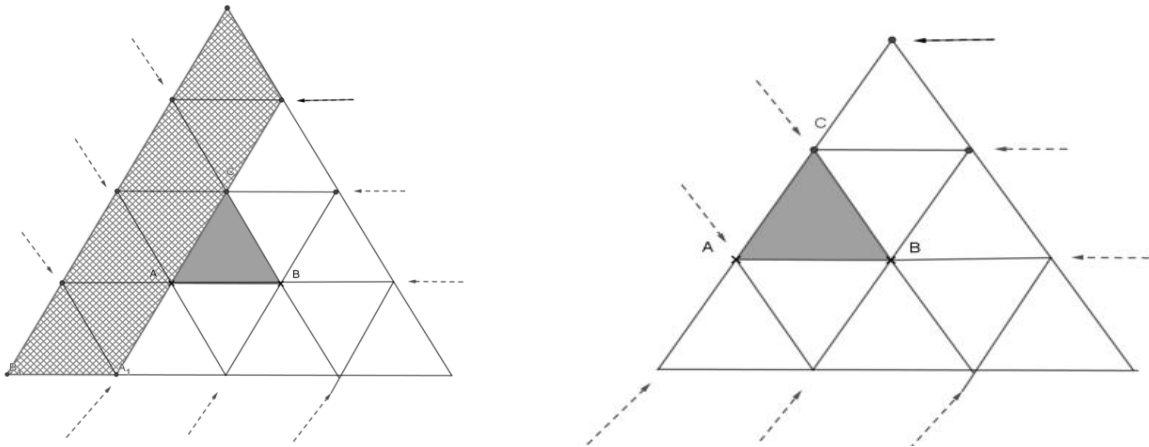
Chaque joueur peut ôter des triangles en découpant suivant l'un des 9 axes horizontaux ou obliques.

Les joueurs jouent à tour de rôle.

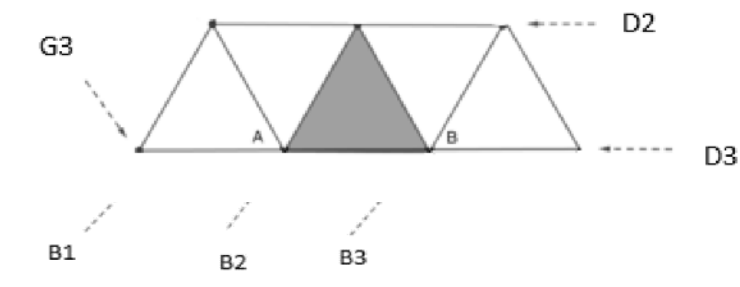
Le joueur à qu'il ne reste que le triangle ABC grisé, après une dernière découpe, a gagné.



Par exemple, voici en hachuré un tour où le joueur découpe suivant B1 :



Supposons que ce soit à Balthazar de jouer et qu'il se retrouve devant la configuration suivante :



Peut-il gagner la partie si l'on considère qu'Amélie adopte la meilleure stratégie possible ?