OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE CRÉTEIL 2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

CRETEIL 2022

Exercice 1 : Un étrange collier de perles

Partie I : Etude des inscriptions sur les perles

a. $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 24 + 1 = 25 = 5^2$.

b. $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 120 + 1 = 121 = 11^2$.

c. $3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 360 + 1 = 361 = 19^2$.

d. Un examen sommaire de l'entier précédent 3024 fait apparaître que $3024 = 56 \times 54 = 7 \times 8 \times 6 \times 9$. On en déduit : $6 \times 7 \times 8 \times 9 + 1 = 3024 + 1 = 3025 = 55^2$.
Il existe bien un entier n adéquat, c'est l'entier $n = 6$.

e. Déléguons la démonstration à un logiciel de calcul formel. Ci-contre, c'est TI-Nspire CAS qui fait la démonstration à notre place.

$\text{expand}(n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3))$	$n^4+6\cdot n^3+11\cdot n^2+6\cdot n$
$\text{expand}\left(\left(n^2+3\cdot n+1\right)^2\right)$	$n^4+6\cdot n^3+11\cdot n^2+6\cdot n+1$
$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1=\left(n^2+3\cdot n+1\right)^2$	true

Partie II : Etude de la forme des perles

NB. Dans cette partie, nous allons noter P_1, P_2, …, P_{12} les perles numérotées de gauche à droite sur le collier et nous allons définir pour $1 \leq i \leq 7$ les sept colliers $C_i = \{P_i, \dots, P_{i+6}\}$. C'est-à-dire que le collier C_1 contient les perles de P_1 à P_6, le collier C_2 contient les perles de P_2 à P_7, …, le collier C_7 contient les perles de P_7 à P_{12}.

a. Le collier proposé par l'énoncé alterne les perles sphériques et cubiques. Il en résulte que les sept colliers C_i définis ci-dessus contiennent chacun exactement 3 perles cubiques et 3 perles sphériques. Anouck peut isoler n'importe lequel de ces colliers en coupant juste avant et juste après et donner les deux autres morceaux à son ami. Elle obtient ainsi 6 façons différentes d'obtenir un partage équitable (6 façons et non 7 parce que, si elle isole C_1, elle isole par la même occasion et en une seule coupe le collier C_7).

b. Supposons les perles mélangées dans un ordre de formes quelconque sur le collier.

Pour $1 \leq i \leq 7$, notons m_i le nombre de perles cubiques et n_i le nombre de perles sphériques du collier C_i.

- Nous avons pour tout $1 \leq i \leq 7$ la relation : $m_i + n_i = 6$.
- Les colliers C_1 et C_7 forment une partition du collier initial, C_7 contient les perles que C_1 ne contient pas.

  Il en résulte que : $\begin{cases} m_7 = n_1 = 6 - m_1 \\ n_7 = m_1 = 6 - n_1 \end{cases}$

Etudions d'abord comment évoluent ces nombres quand on passe d'un collier C_i au suivant C_{i+1} :

Pour $1 \leq i \leq 6$:

- $m_{i+1} = m_i$ et $n_{i+1} = n_i$ si la perle P_{i+6} a la même forme que la perle P_i.
- $m_{i+1} = m_i + 1$ et $n_{i+1} = n_i - 1$ si la perle P_{i+6} est cubique et la perle P_i est sphérique.
- $m_{i+1} = m_i - 1$ et $n_{i+1} = n_i + 1$ si la perle P_{i+6} est sphérique et la perle P_i est cubique.

Ces nombres varient donc au plus d'une unité lorsqu'on passe d'un collier au suivant.

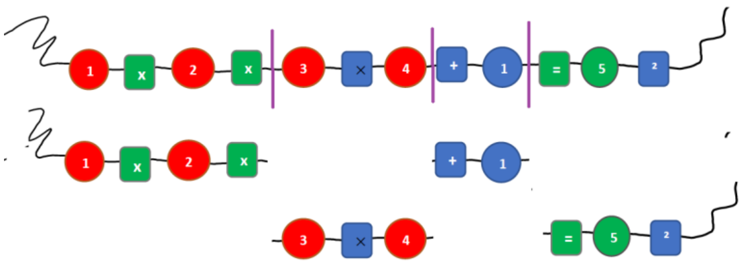
Nous allons montrer qu'il y a au moins un des colliers C_i pour lequel : $m_i = n_i = 3$.

- Si $m_1 = 3$, la question est réglée, le collier C_1 convient.
- Sinon, si $m_1 > 3$, alors $m_7 < 3$ et inversement, si $m_1 < 3$, alors $m_7 > 3$. Il en résulte que l'écart entre ces deux nombres est d'au moins 2 unités. Compte tenu de leur évolution (d'une unité au plus d'un collier au suivant), lorsque i varie de 1 à 7, les nombres m_i ne peuvent varier de m_1 à m_7 sans prendre au passage au moins une fois la valeur 3.

Il existe donc au moins un collier C_i pour lequel $m_i = n_i = 3$. Anouck peut isoler ce collier en coupant juste avant et juste après puis donner les morceaux restants à son ami.

Partie III : Etude de la couleur des perles

a. La réponse est oui comme en témoigne le découpage ci-contre.



b. La fonction « partition » permet de dresser de façon exhaustive la liste de tous les partages possibles du collier en quatre parties disjointes. Pour $1 \leq i < i + j < i + j + k < 12$, **Part1** contient les i premières boules, **Part2** les j suivantes, **Part3** les k suivantes et **Part4** les boules restantes.

Partie IV : Le collier se brise

NB. Nous proposons sans garantie aucune l'interprétation du ficelage des colliers de perles qui suit. Nous la laissons à l'appréciation du lecteur et à son sens critique.

a. Il y a 12 ! façons d'ordonner les perles sur la chaîne ouverte. Cependant, considérons une certaine ordonnance des perles P_1, P_2, …, P_{12}.
Une fois le collier refermé, on ne peut pas distinguer cette ordonnance parmi les 12 ordonnances $P_i, P_{i+1}, \dots, P_{12}, P_1, \dots, P_{i-1}$ où les perles sont permutées circulairement. On ne peut pas la distinguer non plus de l'ordonnance inversée $P_{12}, P_{11}, \dots, P_1$ ou de ses permutations circulaires. Il y a 24 ordonnances différentes qui donnent un même collier puisqu'il n'y a pas de « première » perle sur la chaîne et qu'il n'a pas de sens (horaire ou anti-horaire) de succession. Le nombre de colliers fermés différents semble être égal à :

$$\frac{12!}{24} = \frac{11!}{2} = 19\,958\,400$$

b. Lorsque la chaîne est ouverte, et les boules ordonnées, on peut permuter les 4 boules vertes entre elles, les 4 boules rouges entre elles et les 4 boules bleues entre elles sans changer l'apparence de la chaîne.
Or, il y a $4! = 24$ permutations possibles d'un ensemble de 4 éléments. Donc, il y a $(24)^3 = 13824$ façons de permuter entre elles les perles sur la chaîne ouverte en conservant l'ordonnance des couleurs. Une fois le collier refermé, il y a 24 chaînes ouvertes différentes qui donnent un même collier. Le nombre de colliers différents correspondant à un même collier fermé semble être :

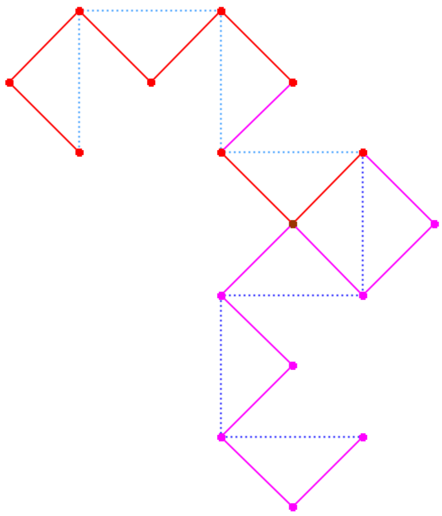
$$\frac{(24)^3}{24} = 576$$

c. Les $19\,958\,400$ colliers différents peuvent être répartis par groupes de 576 colliers indiscernables où l'ordonnance des couleurs est la même. Le nombre de colliers que l'on peut distinguer par leurs couleurs pourrait peut-être être égal à :

$$\frac{19\,958\,400}{576} = 34\,650$$

Exercice 2 : La courbe du dragon

Partie I : par pliage



a. La courbe du dragon à l'étape 4. En rouge, une courbe semblable à celle de l'étape 3 et en magenta sa duplication.

b. D_n est la réunion d'une courbe semblable à la courbe D_{n-1} et de son image par la rotation d'angle droit direct et de centre son extrémité.

Partie II : par L-Système

1.a. La chaîne de caractères $dragon(1)$ étant la chaîne $'DDG'$, la chaîne suivante est, d'après les règles de réécriture : $'DDG'+'D' + 'DGG'$. Il s'agit donc de la chaîne : $dragon(2) = 'DDGDDGG'$.

1.b. D'après les règles de réécriture : : $dragon(3) =' DDGDDGG'+'D' + 'DDGGDGG'$.
Ainsi : $dragon(3) = 'DDGDDGGDDDGGDGG'$, conformément à l'énoncé.

1.c. La courbe obtenue est une ligne brisée formée de segments jointifs en angle droit.
Si l'on parcourt cette ligne brisée, chaque élément de la chaîne représente un angle droit formé par deux segments consécutifs, angle droit de sens direct pour D et de sens indirect pour G.

Une telle chaîne décrit les changements de direction sur la ligne brisée.

2.a. On peut conjecturer que la longueur de la chaîne $dragon(n)$ est égale à $2^n - 1$.

2.b. Puisqu'on duplique à chaque pliage la ligne brisée, le nombre de segments est multiplié par 2 à chaque pliage. Ce nombre u_n de segments est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ (car la première ligne brisée est formée de 2 segments) et de raison 2. Ainsi : $u_n = 2^n$. Or, il y a un angle droit de moins que de segments : le premier angle est celui du premier segment avec le second et le dernier est celui de l'avant-dernier segment avec le dernier. Ce nombre d'angles droits est donc égal à $2^n - 1$.

.a. Un exemple d’algorithme construisant la chaîne-miroir d’une chaîne donnée. Une difficulté est d’inverser l’ordre des lettres. Nous avons trouvé sur le web la syntaxe « [:: -1] » qui réalise cette opération avec succès.

```
>>> def miroir(mot):
        u=""
        for lettre in mot:
                if lettre=='D':
                        u=u+'G'
                else :
                        u=u+'D'
        u=u[::-1]
        return(u)

>>> miroir("DDDGGD")
'GDDGGG'
```

3.b. Ci-contre, un exemple d’algorithme « dragon ».

```
>>> def dragon(n):
        mot='D'
        for k in range(1,n):
                mot=mot+'D'+miroir(mot)
        return mot

>>> dragon(2)
'DDG'
>>> dragon(3)
'DDGDDGG'
>>> dragon(4)
'DDGDDGGDDDGGDGG'
```

3.c. Ci-dessous un exemple d’algorithme « tracedragon » et à côté son exécution avec $n = 4$. Il faut importer le module « turtle » pour cela.

On peut ensuite tenter de tracer d’autres courbes du dragon (celle d’ordre 8 à gauche en noir et celle d’ordre 10 à droite en rouge)

```
>>> def tracedragon(n,l):
        chemin=dragon(n)
        for x in chemin:
                if x=="D":
                        forward(l)
                        right(90)
                else :
                        forward(l)
                        left(90)
        forward(l)
```