OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE CORSE
2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

Olympiades académiques de mathématiques 2021

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La deuxième partie de l'épreuve contient deux exercices.

Les candidats doivent traiter les deux exercices académiques.

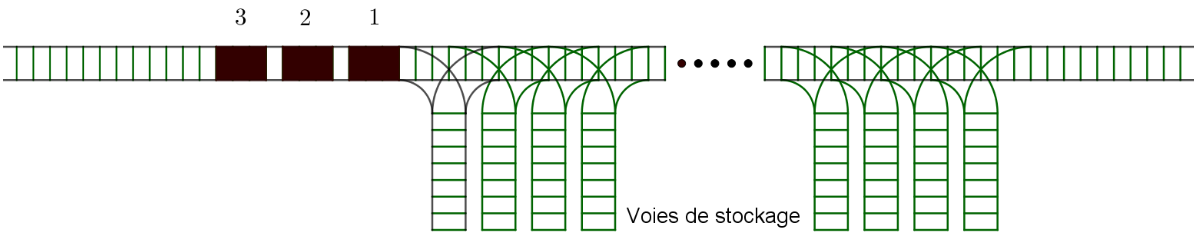
Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

Meli mélo de trains à la Catalane.

Partie A

Dans une gare imaginaire, plusieurs trains sont sur une voie principale et doivent transiter par une voie de stockage. Dans cette gare, il y a ***un nombre infini de voies*** de stockage sur lesquelles ***un seul train*** peut transiter.



Chaque train qui arrive en gare se met sur une voie de stockage libre. Il a la possibilité de repartir tout de suite ou bien d'attendre l'arrivée et le départ d'un ou de plusieurs trains.

Les trains sont numérotés par ordre sur la voie principale comme sur le schéma ci-dessus, c'est à dire de droite à gauche.

Par exemple, dans le cas de 2 trains, on note (1,2) la liste avec les numéros des trains par ordre sur la voie principale il y a deux cas possibles :

- Le train numéro 1 arrive en gare et repart de suite, le train numéro 2 arrive en gare et repart aussi. On aura donc la liste (1,2) après le passage en gare des trains.
- Le train numéro 1 arrive en gare et reste en transit, le train numéro 2 arrive sur une autre voie de stockage et repart en première position, puis le train numéro 1 repart à son tour. On aura donc la liste (2,1) après le passage en gare des trains.

On dit que dans le cas de deux trains il y a deux permutations possibles de l'ordre des trains (en comptant celle qui laisse inchangé cet ordre).

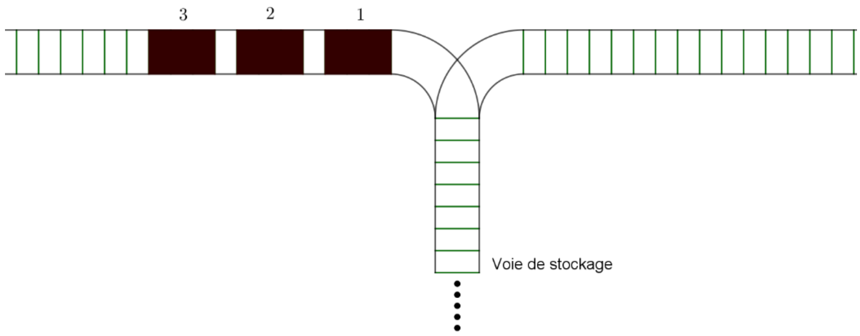
1. Donner le nombre de permutations possibles avec 3 trains en précisant toutes ces permutations.

2. Donner le nombre de permutations possibles avec 4 trains.

3. Donner le nombre de permutations pour n trains où n est un entier naturel supérieur à 1.

Partie B

Une nouvelle gare imaginaire ne contient plus ***qu'une seule voie de stockage*** infiniment longue pouvant accueillir ***une infinité de trains*** dans laquelle ils transitent les uns derrière les autres.



Par exemple, dans le cas de deux trains, il y a deux cas possibles :

- Le train numéro 1 arrive en gare et repart de suite, le train numéro 2 arrive en gare et repart aussi. On aura donc la liste (1,2) après le passage en gare des trains.
- Le train numéro 1 arrive en gare et reste en transit, le train numéro 2 arrive lui aussi sur l'unique voie de stockage. Ce train numéro 2 est obligé de repartir en première position puisqu'il bloque le train numéro 1 dans la voie de stockage, puis le train numéro 1 repart à son tour. On aura donc la liste (2,1) après le passage en gare des trains.

Soit n un entier naturel. On note C_n le nombre de permutations possibles avec n trains. On a, par exemple, $C_2 = 2$.

Par convention, dans le cas où il n'y pas de train, on notera : $C_0 = 1$.

1. Déterminer C_1 et C_3.

2. Avec 4 trains, il y a 14 permutations possibles c'est-à-dire $C_4 = 14$. Donner la liste de toutes ces permutations.

3. Donner une expression de C_4 en fonction de C_0, C_1, C_2 et C_3 en justifiant votre réponse.

4. Soit n un entier naturel, exprimer C_{n+1} en fonction de $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$.

5. On donne le programme suivant en langage python :

```python
def perm(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        L=[1]
        for i in range(n):
            S=0
            for j in range(i+1):
                S=S+L[j]*L[i-j]
            L.append(S)
        return L[n]
```

a. Que renvoient les commandes perm(0), perm(1) et perm(2) ?

b. Que fait la fonction perm ?

Exercice 2 (à traiter par les candidats)

Les nombres premiers

Partie A

Un entier naturel p supérieur ou égal à 2 est dit premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs distincts positifs : 1 et p.

1. 25 est-il un nombre premier ? Justifier.

2. 13 est-il un nombre premier ? Justifier.

3. 2 et 3 sont deux nombres premiers consécutifs. Est-il possible de trouver un autre couple de nombres premiers consécutifs ? Si oui, en donner un. Si non, expliquer pourquoi.

4. On dit qu'un nombre est un carré parfait lorsque c'est le carré d'un nombre entier. Par exemple, $36 = 6 \times 6$ est un carré parfait mais 35 n'est pas un carré parfait.

- **a.** Soit n un nombre entier qui n'est pas un carré parfait. Expliquer pourquoi n a un nombre pair de diviseurs distincts positifs.
- **b.** Soit n' un carré parfait. Que peut-on dire concernant la parité du nombre de diviseurs distincts positifs de n' ? Justifier.

Partie B

Deux entiers naturels sont premiers entre eux lorsque leur plus grand diviseur commun est égal à 1. On note $PGCD(a, b) = 1$.

1. Est-ce que 5 et 15 sont premiers entre eux ? Justifier.

2. On appelle f la fonction, définie pour tout entier naturel n non nul, telle que $f(n)$ est égal au nombre d'entiers naturels entre 1 et n qui sont premiers avec n.

- **a.** Expliquer pourquoi $f(9) = 6$.
- **b.** Calculer $f(11)$.

3. Soit p un nombre premier. Exprimer, en justifiant, $f(p)$ en fonction de p.

4. Soient p un nombre premier et $m \geq 2$ un entier naturel. On cherche à exprimer $f(p^m)$.

- **a.** On note A l'ensemble $\{p, 2p, 3p, \dots, p^m\}$. Expliquer pourquoi chaque élément de A n'est pas premier avec p^m.
- **b.** On admet que les éléments de A constituent la liste de tous les nombres entiers compris entre 1 et p^m qui ne sont pas premiers avec p^m.
  Montrer que : $f(p^m) = p^{m-1}(p-1)$.

5. Soit p un nombre entier tel que $f(p) = p - 1$. Que peut-on dire de p ? Justifier.

6. Les 100 premières valeurs de f sont représentées ci-dessous. Expliquer, grâce à ce graphique, comment on peut déterminer si un nombre compris entre 2 et 100 est premier.